



MIROSŁAW GRACZYK¹⁾
JÓZEF RAFA²⁾

WYBRANE ASPEKTY ZACHOWANIA SIĘ NAWIERZCHNI PODATNYCH W MODELACH MATERIAŁÓW TERMOLEPKOSPĘŻYSTYCH³⁾

STRESZCZENIE. W artykule przedstawiono wybrane aspekty oddziaływań dynamicznych i termicznych na konstrukcję nawierzchni podatnej w modelu termolepkospężystym. Artykuł obejmuje skompensowanie zagadnień z prowadzonych prac własnych modelowych w zakresie teoretycznym oraz przedstawia podstawowe zależności i ich analizę. Przedstawiono również wynikające z tej analizy wnioski, które zostaną w przyszłości wykorzystane w praktyce przy projektowaniu i diagnozowaniu nawierzchni podatnych i półsztywnych.

1. WSTĘP

Modelowanie układu nawierzchni jest zawsze dużym problemem badacza, a w szczególności w zakresie wyboru modelu adekwatnego do rzeczywistych warunków pracy konstrukcji [1]. Z jednej strony zawsze istnieje pokusa przyjęcia jak najprostszego rozwiązania, ale zaraz rodzi się pytanie, czy wystarczająco dobrze opisuje on oddziaływania w niej występujące, z drugiej zaś strony przyjęcie modelu złożonego daje możliwość ujęcia wszystkich lub prawie wszystkich procesów zachodzących w konstrukcji, ale nastęrcza dużo trudności w jego sformułowaniu matematyczno - fizycznym.

¹⁾ dr inż. – Instytut Badawczy Dróg i Mostów, Warszawa

²⁾ dr inż. – Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

³⁾ rozszerzona wersja referatu z Konferencji ENVIROAD 2009

Powstaje wówczas wątpliwość, czy model „pełny”, w którym ujęto całą złożoność pracy nawierzchni jest dobry. Przy czym podstawą jest tutaj określenie istotności, każdego z osobna i wszystkich razem opisanych w modelu procesów, a także ich interakcji.

Jednocześnie opis matematyczny modelu dający możliwość uwzględnienia interakcji między różnymi oddziaływaniami lepiej odzwierciedla fizyczną naturę zjawisk zachodzących w nawierzchni niż np. stosowanie jedynie zasady superpozycji w celu wszystkich oddziaływań zewnętrznych. Taka klasyczna sytuacja ma miejsce w oddziaływaniach od obciążeń masowych i termicznych na konstrukcję nawierzchni.

Autorzy proponują opis matematyczny oddziaływań od obciążeń masowych i termicznych w modelu konstrukcji nawierzchni z obustronnym sprzężeniem termomechanicznym i mechaniczno - termicznym. W prezentowanym artykule omówiono jakościowo i graficznie wpływ wymienionych czynników na oddziaływanie na nawierzchnię i ocenę nośności konstrukcji.

2. OPIS MODELU NAWIERZCHNI Z MATERIAŁU TERMOLEPKOSPĘŻYSTEGO

2.1. UWAGI OGÓLNE

Model nawierzchni termolepkospężystej został opisany matematycznie analogicznie jak w ośrodku lepko - sprężystym zgodnie z modelem Biota [2], z uwzględnieniem opisu propagacji ciepła według teorii Gurtina - Pipkina [3 - 5]. Taka idea daje możliwość opisu w sposób bliższy rzeczywistej pracy nawierzchni podatnych, a tym samym aplikacji w nowych dokładniejszych metodach projektowania i diagnozowania, tak poszczególnych warstw bitumicznych jak i całej konstrukcji nawierzchni podatnych.

W opisie formalnym równania bilansu pędu i energii wewnętrznej przedstawiają układ równań różniczkowo - całkowych typu splotowego. Konstrukcję rozwiązania przeprowadzono metodą transformacji całkowych Laplace'a i Fouriera [6] z wykorzystaniem do retransformacji metody Cagniarda - de Hoopa [7 - 8].

Wyznaczono rozwiązanie fundamentalne problemu, zbadano jego podstawowe własności i dokonano porównania z klasycznym, dotychczas stosowanym opisem. Uzyskane rozwiązania będą wykorzystane w zagadnieniach brzegowo - początkowych stosowanych między innymi w diagnostyce podatnych i półsztywnych nawierzchni warstwowych drogowych i lotniskowych.

2.2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Dla jednorodnego, izotropowego ośrodka o własnościach lepkospężystych ze sprzężeniem termomechanicznym, równanie bilansu pędu i energii wewnętrznej można zapisać w postaci [9 - 10]:

- równania zachowania pędu:

$$\partial t(\rho \vec{v}) - \nabla \circ \sigma = \vec{F} \quad , \quad (1)$$

- równania bilansu energii wewnętrznej:

$$\partial t(\rho e) - \nabla \circ q = w \quad . \quad (2)$$

Równanie konstytutywne w obustronnie sprzężonej termolepkosprężystości przyjmujemy w postaci podanej poniżej [3 - 5]:

- składowych tensora naprężeń:

$$\sigma_{ik} = (\lambda^*_t \varepsilon_{ll}) \delta_{ik} + 2(u^*_t \varepsilon_{ik}) - (\beta^*_t \theta) \delta_{ik} \quad , \quad (3)$$

- składowych strumienia ciepła:

$$q_k = -a^*_t \partial_k \theta \quad , \quad (4)$$

- energii wewnętrznej:

$$e = e_0 + (c^*_t \theta) + \theta_0 (\beta^*_t \varepsilon_{ll}) \quad , \quad (5)$$

gdzie:

$(m^* n)$ – splot,

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3$, $t \in R_+$,

ρ – gęstość masowa ośrodka,

$\vec{v} = \partial_t \vec{u}$ – prędkość masowa ośrodka,

∇ – operator Hamiltona,

σ – tensor naprężeń,

q – strumień ciepła,

\vec{u} – wektor przemieszczeń,

$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\partial_k u_i + \partial_i u_k)$ – składowe tensora odkształceń,

$\varepsilon_{ll} = \partial_{ll} u_l$ – składowe diagonalne tensora odkształceń,

$\theta = \Theta - \theta_0$ – temperatura względna ośrodka,

Θ – temperatura bezwzględna,

θ_0 – temperatura odniesienia,

\vec{F} – wektor sił masowych,

w – wewnętrzne źródła energii,

e_0 – energia odniesienia,

$\beta(t) = 3\alpha_T K(t)$	– funkcja relaksacji sprzężenia termomechanicznego,
α_T	– współczynnik rozszerzalności termicznej,
$K(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3}\mu(t)$	– moduł objętościowy,
λ, μ	– stałe Lamé,
$a(t)$	– funkcja relaksacji strumienia ciepła,
$c(t) = c_v \delta(t) + b(t)$	– funkcja relaksacji przewodnictwa ciepła,
$\delta(t)$	– delta Diraca,
$b(t)$	– funkcja relaksacji energii wewnętrznej,
c_v	– współczynnik przewodnictwa ciepła,
δ_{ik}	– delta Kroneckera,
$(f *_t g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$	

Poza wymienionymi oznaczeniami, w dalszej części artykułu wykorzystano także:

T	– bezwymiarowe chwile czasu, $T = \frac{t}{t_0}$,
t_0	– czas, po którym czoło fali przebędzie jednostkową odległość,
v	– bezwymiarowa temperatura bieżąca, $v = \frac{\theta}{\theta_w}$,
θ_w	– temperatura równoważna intensywności źródła ciepła $w(x, t)$,
η_0	– bezwymiarowa odległość od osi walca, $\eta_0 = \frac{\rho}{vt_0}$.

Układ równań (1) ÷ (5) rozwiążemy przy uwzględnieniu skupionych wymuszeń masowych i termicznych, wyznaczając: $\vec{u}(t, x) = [u_1, u_2, u_3]^T$ oraz $\theta(t, x)$. W tym celu zastosujemy metodę przekształceń całkowitych Laplace'a względem t oraz Fouriera względem x_1 oraz x_2 [4, 9]. W otrzymanych rozwiązaniach w postaci transformat zastosujemy uogólnioną i zmodyfikowaną metodę Cagniarda - de Hoopa [9] i wyznaczmy rozwiązanie w czasoprzestrzeni (t, x) .

3. ROZWIĄZANIE FUNDAMENTALNE PROBLEMU

Przyjmujemy źródła zewnętrzne w postaci:

$$\vec{F} = \rho [P_1, P_2, P_3]^T \delta(t, x), \quad (6)$$

$$w = \rho Q \delta(t, x).$$

Równania (1) ÷ (5) jako układ równań drugiego rzędu zapisujemy następująco:

$$\rho \partial_t^2 \vec{u} - (\lambda + \mu) * \nabla \nabla \circ \vec{u} - \mu * (\nabla \nabla \circ \vec{u} - \nabla \times \nabla \times \vec{u}) + \beta * \nabla \theta = \rho \vec{P} \delta(t) \delta(x), \quad (7)$$

$$\partial_t (\rho c * \theta + \theta_0 \beta * \nabla \circ \vec{u}) - a * \nabla \circ \nabla \theta = \rho Q \delta(t) \delta(x).$$

Układ równań (7) zastąpimy równoważnym układem w postaci:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 \varepsilon - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varepsilon + \beta \nabla^2 \theta &= \rho \delta(t) \nabla \circ (\vec{P} \delta(x)) , \\ \rho \partial_t^2 \vec{w} + \mu \nabla \times \nabla \vec{w} &= \rho \delta(t) \nabla \times (\vec{P} \delta(x)) , \\ \rho \partial_t (c \theta) + \theta_0 \partial_t (\beta \varepsilon) - a \nabla^2 \theta &= \rho Q \delta(t) \delta(x) , \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \overset{div}{\nabla} \circ \vec{u} , \\ \vec{w} &= \overset{rot}{\nabla} \times \vec{u} , \\ \nabla \circ \vec{w} &\equiv 0 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \nabla \circ (\vec{P} \delta(x)) &= \\ &= P_1 \partial_1 \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) + P_2 \delta(x_1) \partial_2 \delta(x_2) \delta(x_3) + P_3 \delta(x_1) \delta(x_2) \partial_3 \delta(x_3) , \end{aligned} \quad (9)$$

$$\nabla \times (\vec{P} \delta(x)) = \vec{S} = \begin{bmatrix} P_3 \partial_1 \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) - P_2 \delta(x_1) \partial_2 \delta(x_2) \partial_3 \delta(x_3) \\ P_1 \delta(x_1) \delta(x_2) \partial_3 \delta(x_3) - P_3 \partial_1 \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \\ P_2 \partial_1 \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) + P_1 \delta(x_1) \partial_2 \delta(x_2) \delta(x_3) \end{bmatrix}^T . \quad (10)$$

Na obecnym etapie pracy wyznaczono rozwiązanie wyrażone przez dylatację pola przemieszczeń i temperaturę ośrodka (nawierzchni podatnej) wywołanych źródłem termicznym zgodnie z wzorem (11):

$$\begin{aligned} \vec{F} = \rho [P_1, P_2, P_3]^T \delta(t, x) &= 0 , \\ w &= \rho Q \delta(t, x) . \end{aligned} \quad (11)$$

Ogólną postać rozwiązania można zapisać w postaci wzorów (12):

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, x) &= \frac{Q}{4\pi R} \sum_{l=1,3} L^{-1} \left[\frac{\bar{\beta} w_l^2 a_l}{\bar{a} \bar{c}_1^2 (w_1^2 - w_3^2)} \right]_t * L^{-1} [e^{w_l R}] , \\ \theta(t, x) &= \frac{Q}{4\pi R} \sum_{l=1,3} (-a_l) L^{-1} \left[\frac{\rho (s - \bar{c}_1^2 w_l^2)}{\bar{a} \bar{c}_1^2 (w_1^2 - w_3^2)} \right]_t * L^{-1} [e^{-w_l R}] , \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} L^{-1} &\text{ oznacza retransformatę Laplace'a,} \\ R &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \text{ jest odległością od źródła ciepła.} \end{aligned}$$

Występujące współczynniki w_l wyrażają się poprzez funkcje relaksacji, opisane przy sformułowaniu problemu, zaś $\bar{c}_1^2 = \frac{\lambda + 2\bar{a}}{\rho}$.

Wskaźnik:

$l=1$ dotyczy fali sprężysto - termicznej,

$l=3$ dotyczy fali termiczno - sprężystej.

4. ANALIZA NUMERYCZNA

W celu ilustracji otrzymanych rozwiązań przedstawiono rozkład temperatury w ośrodku (w warstwie bitumicznej nawierzchni podatnej), w funkcji współrzędnych przestrzennych i czasu, wywołanej źródłem ciepła rozłożonego wzdłuż osi $x_3 \in \langle -l, l \rangle$ o intensywności $w_0 f(t)$ w następującej postaci:

$$w(x, t) = w_0 f(t) \delta(x_1) \delta(x_2) H(l - |x_3|) . \quad (13)$$

Obliczenia wykonano dla modelu relaksacji Maxwella. Proporcjonalnie do rozkładu temperatur zachowują się naprężenia termiczne:

$$\sigma = \alpha K * \theta . \quad (14)$$

Wzór, przedstawiający rozkład temperatury w ośrodku zależny od czasu i współrzędnych, przyjmuje następującą postać:

$$\theta(t, x) = \theta_w \sum_{k=0}^2 (-c_k) H\left(\frac{t}{t_0} - \frac{R_k}{vt_0}\right) e^{-\frac{t}{t_0} \int_{R_k}^{vt_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)} I_0 \sqrt{\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 - \left(\frac{T}{vt_0}\right)^2}} dT , \quad (15)$$

gdzie:

I_0 – oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela,

$$c_0 = 2H(l - |x_3|),$$

$$R_0 = \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$c_1 = \text{sgn}(x_3 + l),$$

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 + (x_3 + l)^2},$$

$$c_2 = \text{sgn}(x_3 - l),$$

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 + (x_3 - l)^2}.$$

Analiza numeryczna uzyskanego rozwiązania pokazuje istnienie trzech fal propagujących się w czasoprzestrzeni. Pierwsza z nich jest falą walcową opisaną równaniem:

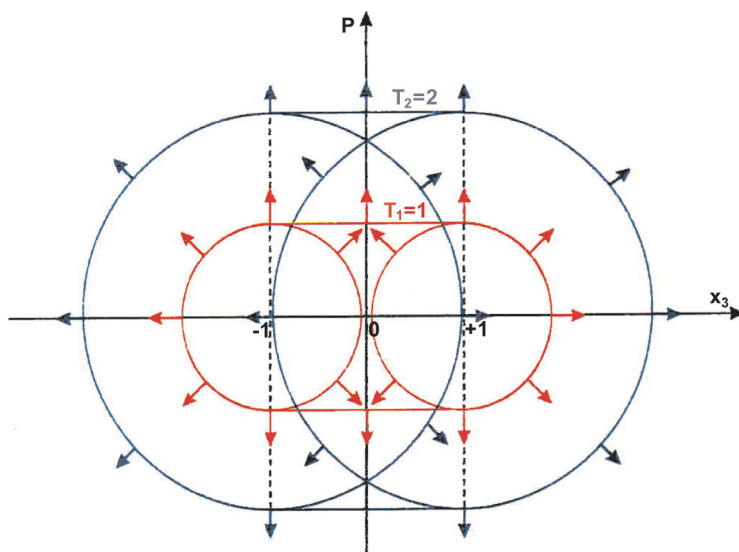
$$\begin{aligned} \rho - vt &= 0 , \\ x_3 &\in \langle -l, l \rangle . \end{aligned} \quad (16)$$

Następnie generują się dwie duże fale kuliste styczne do powierzchni walcowej i opisane równaniami:

$$\begin{aligned} R_k - vt &= 0, \\ R_1 &= \sqrt{\rho^2 + (x_3 + l)^2}, \\ R_2 &= \sqrt{\rho^2 + (x_3 - l)^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

czyli sfery i środków w: $S_1 = (0,0,-1)$ oraz $S_2 = (0,0,1)$ i promieniu vt .

Propagację tych fal pokazano na rysunku 1 w wybranych przypadkach: $T_1 = vt_1 = 1$ oraz $T_2 = vt_2 = 2$.



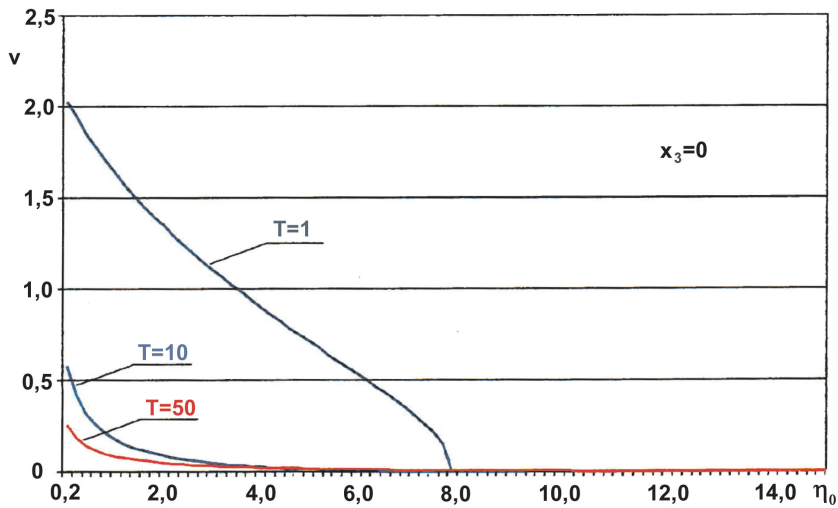
Rys. 1. Rozkład powierzchniowych fal termicznych w warstwie bitumicznej w czasie $T_1 = 1$ i $T_2 = 2$

Fig. 1. Distribution of surface thermal wave in asphalt layer at time $T_1 = 1$ and $T_2 = 2$

Rozkład temperatury będący sumą wkładów od poszczególnych fal w ustalonych czasach $T = 50$, $T = 10$, $T = 1$ przedstawiono na rysunkach 2 i 3.

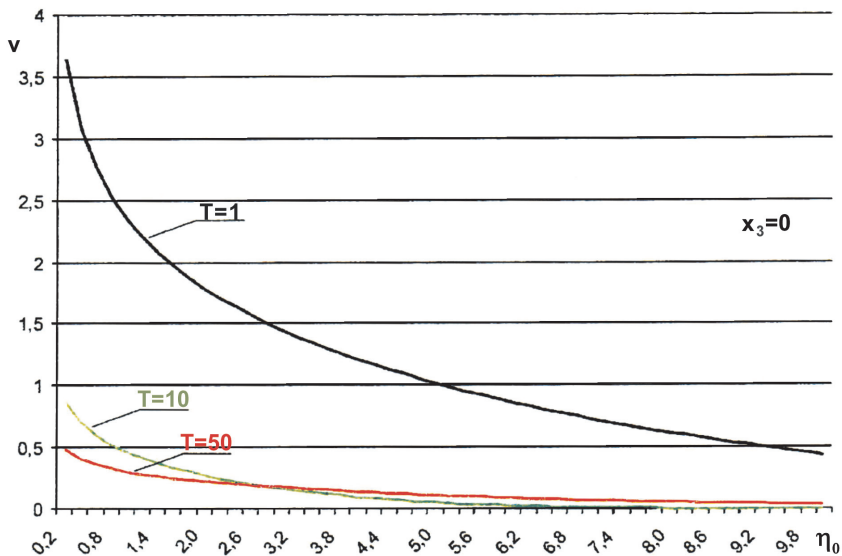
W celu porównania wyników rozwiązania wg modelu Gurtina - Pipkina ze skończoną prędkością propagacji ciepła, z modelem klasycznym Fouriera przy nieskończonej prędkości propagacji ciepła, wykonano zestawienie tych obliczeń, zobrazowane na rysunkach 4 i 5.

Na rysunku 6 przedstawiono zmianę temperatury w funkcji czasu, która jest proporcjonalna do rozkładu naprężeń termicznych w warstwie nawierzchni. Na rysunku tym wyraźnie widać pojawiające się czoło fali termosprężystej w ośrodku (warstwie bitumicznej) w celu modelu falowej propagacji ciepła (model Gurtina - Pipkina) i niewystępowanie czoła fali w celu modelu klasycznego (Fouriera).



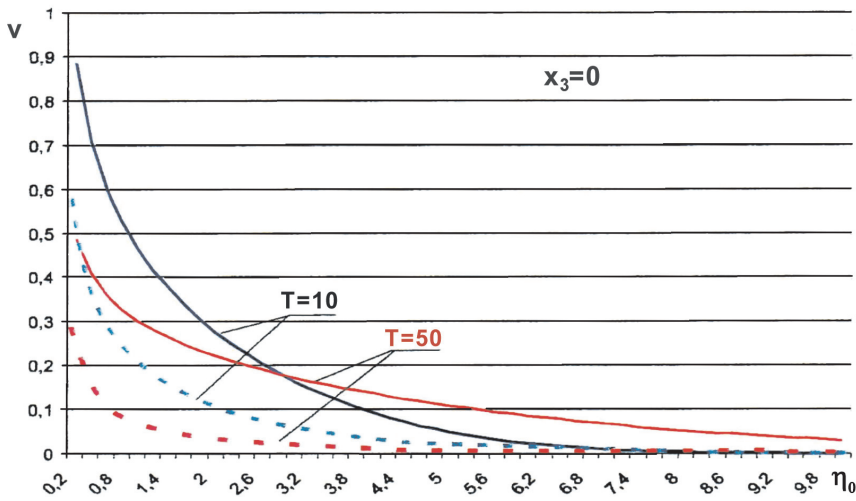
Rys. 2. Rozkład temperatury w modelu propagacji ciepła Gurtina - Pipkina w czasie $T = 50$, $T = 10$, $T = 1$, poprzecznie do osi $x_3 = 0$

Fig. 2. Distribution of temperature in Gurtin - Pipkin heat propagation model in time $T = 50$, $T = 10$, $T = 1$, in transverse direction to the axis of $x_3 = 0$



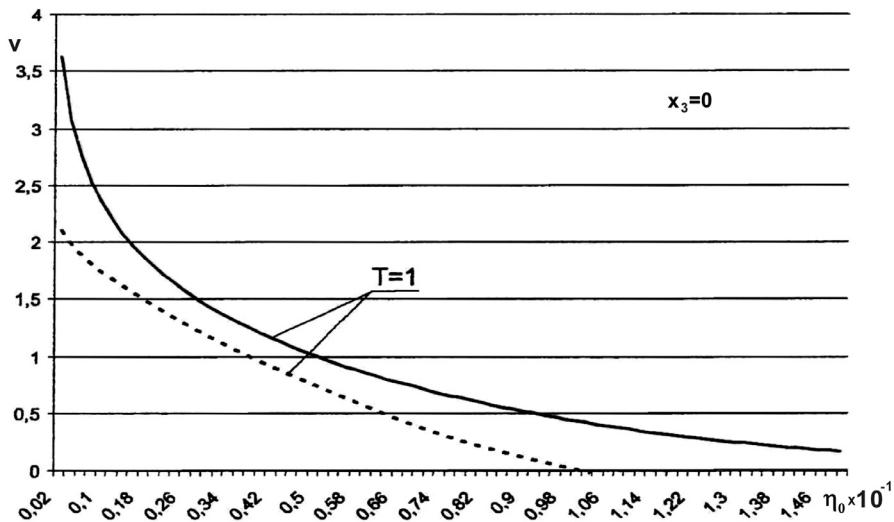
Rys. 3. Rozkład temperatury w klasycznym modelu Fouriera propagacji ciepła w czasie (odległości od źródła) $T = 50$, $T = 10$, $T = 1$

Fig. 3. Distribution of temperature in the classical Fourier model of heat propagation in time (distance from the source) for $T = 50$, $T = 10$, $T = 1$



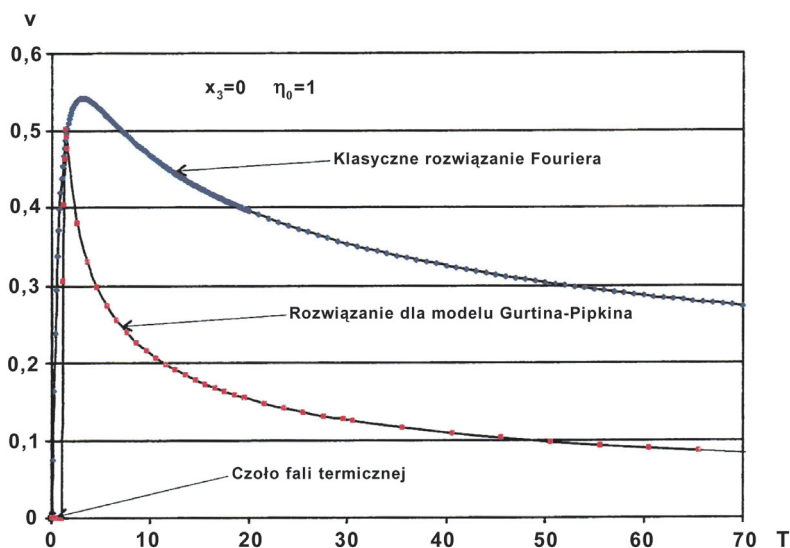
Rys. 4. Rozkład bezwymiarowej temperatury poprzecznie do osi $x_3 = 0$ w rozwiązaniu Gurtina - Pipkina (linia przerywana) i rozwiązaniu Fouriera (linia ciągła) w czasie (odległości od źródła) $T = 50$, $T = 10$

Fig. 4. Distribution of non-dimensional temperature in transverse direction to the axis of $x_3 = 0$ in Gurtin - Pipkin model (dashed line) and Fourier model (solid line) in time (distance from the source) for $T = 50$, $T = 10$



Rys. 5. Rozkład bezwymiarowej temperatury poprzecznie do osi $x_3 = 0$ w rozwiązaniu Gurtina - Pipkina (linia przerywana) i rozwiązaniu Fouriera (linia ciągła) w czasie (odległości od źródła) $T = 1$

Fig. 5. Distribution of non-dimensional temperature in transverse direction to the axis of $x_3 = 0$ in Gurtin - Pipkin model (dashed line) and Fourier model (solid line) in time (distance from the source) for $T = 1$



Rys. 6. Rozkład temperatury w ośrodku (warstwie asfaltowej) w funkcji czasu
 Fig. 6. Distribution of temperature in the asphalt layer in function of time

Na obecnym etapie konstruowana jest pełna analiza rozkładu odkształceń, naprężeń i temperatury w ośrodku – warstwie bitumicznej nawierzchni podatnej, której wyniki przedstawione zostaną w następnej publikacji.

5. WNIOSKI

W artykule przedstawiono oryginalny opis modelu warstwy asfaltowej nawierzchni podatnej termolepkosprężystej z uwzględnieniem falowej propagacji ciepła (ze skończoną prędkością) [11] wraz z obustronnym sprzężeniem termomechanicznym.

W celu ilustracji zjawiska wykonano obliczenia numeryczne, które również zostały przedstawione w postaci graficznej. Szczególnie podkreślono różnice w opisie propagacji ciepła z nieskończoną prędkością (klasyczny model – Fouriera) z bardziej nowoczesnym ujęciem propagacji ciepła (model Gurtina - Pipkina). Wynikające z porównania różnice jakościowe i ilościowe przedstawiono na rysunkach.

W porównaniu ilościowym widać występowanie ostrzejszych gradientów temperatury w przypadku modelu falowej propagacji ciepła, zaś w sensie jakościowym występowanie czoła fali termicznej tylko przy modelu Gurtina - Pipkina.

Bardziej obszernie wnioski i pełniejszą analizę wynikającą z prezentowanego modelu termolepkosprężystego zostaną przedstawione po zakończeniu wykonywanych obecnie obliczeń numerycznych. Istnieją realne podstawy, by przypuszczać, że wyniki tych analiz będą mogły mieć istotny wpływ na bardziej precyzyjne projektowanie i diagnozowanie układów konstrukcyjnych warstw asfaltowych nawierzchni podatnych.

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Graczyk M.*: Seasonal coefficients for the pavement roads in polish climate conditions. Eighth International Conference on the Bearing Capacity of Roads, Railways, and Airfields, Champaign, Illinois 2009, 1063 - 1072
- [2] *Biot M.A.*: Thermoelasticity and irreversible thermodynamic. Journal of Applied Physics, **27**, 3, 1956, 240 - 253
- [3] *Gurtin M.E., Pipkin A.C.*: A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds. Arch. Rational Mech. Anal., **31**, 1968, 113 - 126
- [4] *Nowacki W.*: Zagadnienia termosprężystości. PWN, 1960
- [5] *Chandrasekharaiah D.S.*: Thermoelasticity with second sound: a Review. Appl. Mech. Rev., **39**, 3, 1994, 355 - 375
- [6] *Piskorek A.*: Fourier and Laplace'a transform and its applications (in Polish). Warsaw University, Warsaw 1991
- [7] *Cagniard L.*: Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. McGraw – Hill, New York 1962
- [8] *De Hoop A.T.*: A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. Appl. Sci. Res., **B8**, 4, 1959, 349 - 356
- [9] *Gawinecki J.A., Sikorska B., Kamura G., Rafa J.*: Mathematical and physicals interpretation of the solution initial – boundary value problem in linear hyperbolic thermoelasticity theory. Journal of Applied Math. and Mech. (ZAMM), **87**, 10, 2007, 715 - 746
- [10] *Kaliski S.*: Wave equations of thermoelasticity. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech., **13**, 4, 1965, 253 - 260
- [11] *Catteano A.*: A form of heat equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **247**, 1958, 431- 433

SELECTED ASPECTS OF THE BEHAVIOUR OF FLEXIBLE PAVEMENTS IN THERMOVISCOELASTICITY MATERIAL MODELS**Abstract**

The presented paper shows the selected aspects of the dynamic and thermal impacts on the flexible pavement in thermoviscoelastic models. Paper includes theoretical modelling issues based on authors own works as well as the analysis of results of calculations. Furthermore the authors draw conclusions from this analysis that could be used in the practice in design and diagnostic of flexible and semi-rigid pavements.

