



DOMINIK PISARSKI¹⁾
CZESŁAW BAJER²⁾

AKTYWNE TŁUMIENIE DRGAŃ JEDNOWYMIAROWEGO OŚRODKA CIĄGŁEGO POD OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM

STRESZCZENIE. Praca prezentuje wyniki badań półaktywnego sterowania drgań jednowymiarowego ośrodka ciągłego pod obciążeniem ruchomym. Konstrukcje przęseł mostowych obciążonych pojazdami poruszającymi się z dużą prędkością można wzmocnić stosując selektywnie włączane elementy wsporcze w postaci tłumików z cieczą elektro lub magnetoreologiczną. Dzięki temu uzyskuje się skuteczniejsze obniżenie amplitud drgań niż przy stale działających tłumikach. Celem pracy jest wskazanie dróg postępowania przy doborze właściwej strategii sterowania. W modelu przyjęto dowolną liczbę tłumików wiskotycznych, zamocowanych w dowolnych punktach continuum i sterowanych funkcjami kawałkami stałymi. Zaprezentowano w pełni analityczne sformułowanie problemu. Odpowiedź układu została wyznaczona metodą szeregów potęgowych. Po licznych symulacjach numerycznych zaproponowana została prosta w realizacji metoda sterowania, której skuteczność wykazano na przykładach.

1. WSTĘP

Dynamika układów pod obciążeniem ruchomym stała się w ostatnich latach przedmiotem badań inżynierów, zarówno teoretyków jak i praktyków. Wiele zjawisk towarzyszących tym oddziaływaniom, ze względu na ich stopień komplikacji, pozostaje

¹⁾ mgr inż. – Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie

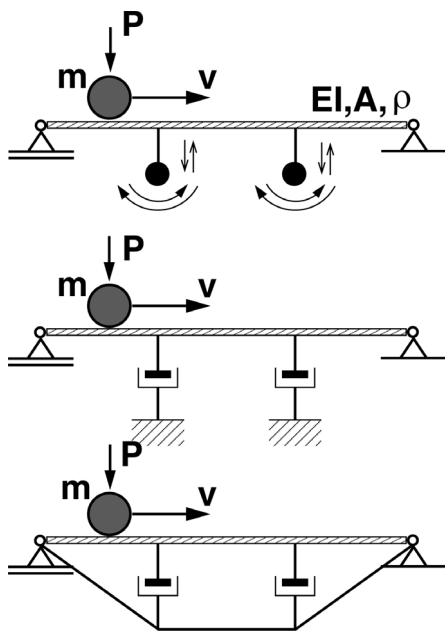
²⁾ dr hab. inż. – Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie

wciąż niewyjaśnionych. Ich znaczenie praktyczne jest niebagatelne, a zastosowanie w gałęziach inżynierii transportu, konstrukcji czy robotyce jest tylko fragmentem potencjalnych zastosowań. Do typowych zjawisk występujących w układach modelowanych jako układy ciągłe pod obciążeniem ruchomym zaliczamy m.in. oddziaływania kontaktowe par obiektów: pojazd szynowy – tor, pojazd – most, pantograf – przewód trakcji elektrycznej, prowadnica – element wykonawczy robota. Należy nadmienić, że dynamika omawianych układów staje się znacząca wówczas, gdy ruchome obciążenie porusza się z odpowiednio dużą prędkością tj. bliską prędkości fali w strunie i bliską tzw. prędkości krytycznej w belkach czy płytach [1, 2].

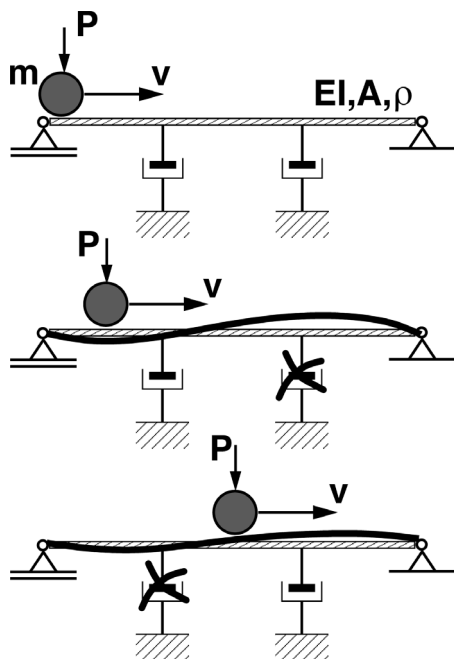
Przy obecnym stałym wzroście prędkości przejazdu pociągów oraz ich ciężaru ważną kwestią jest wzmocnienie istniejących mostów i dostosowanie ich wytrzymałości do obciążeń statycznych i dynamicznych, wywołanych przejazdem. Ugięcia wywołane poruszającym się obciążeniem bezmasowym i masowym są znacznie większe od statycznych. Wymiana lub wzmocnienie przęseł często nie wchodzi w rachubę z powodów technicznych lub ekonomicznych. W takim przypadku można zaproponować zastosowanie sterowania, by zmienne w czasie parametry konstrukcji wykorzystać do obniżenia amplitud drgań.

Mechatronika oferuje dziś bogatą gamę rozwiązań problemów inżynierii konstrukcji. Mowa o systemach sterowania, których zadaniem jest poprawa stabilności, lub realizacja z góry określonych trajektorii. Ze względu na charakter oddziaływania tych systemów na układ mechaniczny dzielimy je na aktywne i półaktywne (semi-aktywne). Przez aktywny system sterowania rozumiemy taki, który oddziałuje na układ siłowo. Sterowanie półaktywne polega natomiast na modyfikacji parametrów samego układu tj. sprężystości lub tłumienia. Każda z metod z jednakowym powodzeniem znajduje swoje zastosowanie. W ogólności systemy sterowania aktywnego, choć pobierają znaczne ilości energii, to ze względu na sterowalność, wykazują lepszą skuteczność w realizacji założonych zadań. Półaktywna kontrola jest natomiast podejściem słuszniejszym wszędzie tam, gdzie celem jest poprawa stabilności układu przy małym wkładzie energii, a bezpieczeństwo odgrywa rolę nadrzędną. Istotnie, tego typu rozwiązania zapobiegają katastrofalnym w skutkach awariom systemu, gdzie aktywna regulacja mogłaby przykładowo zadziałać przeciwnie do założonej strategii, a tym samym zwiększyć amplitudę układu do poziomu zniszczenia.

Sterowanie półaktywne układu ciągłego realizuje się najczęściej za pomocą sterowalnych tłumików dyskretnych, dołączonych do układu w ustalonych punktach. Rysunki 1 i 2 stanowią ilustrację do możliwych zastosowań półaktywnej regulacji układu ciągłego belki. Układy takie są modelowane jako dyskretno-ciągłe. Różnorodność rozwiązań konstrukcyjnych daje duże możliwości w zakresie kontroli. Dopasowanie odpowiedniej strategii sterowania u założonych konstrukcji jest szerokim polem badań dla projektantów systemów sterowania. Przed przystąpieniem do opracowywania takich strategii niezbędna jest bardzo dobra znajomość zjawisk towarzyszących dynamicznie rozważanego układu, co w przypadku złożonych modeli wymaga od badaczy wielu rozmaitych prób symulacyjnych. Z tego względu punktem wyjścia do proponowanej w pracy koncepcji półaktywnej regulacji będą wyniki numeryczne. Próby poszukiwania sterowań optymalnych zostaną ujęte jako dalszy kierunek prac.



Rys. 1. Przykłady pasywnego i półaktywnego sterowania drgań przęsła mostu pod obciążeniem ruchomym
 Fig. 1. Examples of passive and semi-active control in a bridge span under a moving load



Rys. 2. Koncepcja półaktywnego sterowania ugięcia belki pod obciążeniem ruchomym
 Fig. 2. The idea of semi-active control of a beam deflection under a moving load

2. AKTUALNY STAN WIEDZY

Zagadnienia układów ciągłych pod ruchomym obciążeniem są szeroko omawiane w literaturze. Obciążenie jest przyjmowane jako bezinercyjne lub inercyjne. W pierwszym przypadku zakłada się stałą co do wartości amplitudę siły. Takie podejście znacznie upraszcza stopień rachunkowych komplikacji przy poszukiwaniu rozwiązań i analizie układu. Wśród licznych prac należy tu wymienić prace [1, 3]. Grupa zagadnień obciążeń masowych może być modelowana dwoma sposobami. Pierwszy z nich obejmuje zagadnienia ruchomego oscylatora, gdzie ruchoma para masa-układ ciągły jest sprzężona przy pomocy elementów lepkosprężystych [4 - 7]. Drugi model zakłada brak elementów lepkosprężystych i jest rozważany w pracach [8 - 10]. Odnoszące się do tego modelu ciekawe zjawisko nieciągłości zostało zbadane w pracy [11].

Idee metod sterowania półaktywnego przemakają obecnie do coraz większej liczby zastosowań. Należą do nich układy wibroizolacji, zawieszenia pojazdów, wieże, maszty i liczna grupa konstrukcji budowlanych. Układy te są z reguły stateczne w otoczeniu pewnego położenia równowagi statycznej. Ponieważ w warunkach rzeczywistych układy mechaniczne mogą być narażone na działanie różnego rodzaju zaburzeń, nierzadko wymagana jest poprawa ich stabilności, co z powodzeniem może być realizowane przez modyfikację parametrów samego układu. Do dziś zaproponowano już wiele strategii takich modyfikacji. Większość z nich bazuje na regulacji ze sprzężeniem zwrotnym. Najpopularniejsze *sky-hook* czy *ground-hook* zaliczane są tu do grupy metod heurystycznych. Ich strategię opracowane są dzięki licznym eksperymentom i symulacjom numerycznym, a skuteczność potwierdza się w wielu układach aktywnego tłumienia drgań pojazdów, maszyn i robotów [12]. Idea ta została również wykorzystana do redukcji drgań ruchomego oscylatora w pracy [13]. Aktywna wibroizolacja konstrukcji jest rozważana w pracach [14, 15]. Oparta na metodzie optymalnych funkcji Lapunowa koncepcja tłumienia drgań belki jest zaproponowana w pracy [16]. Metody aktywnego sterowania drgań układów ciągłych pod obciążeniem ruchomym rozważa się m.in. w pracach [17 - 21].

Sterowanie półaktywne klasyfikuje się do grupy sterowania układów biliniowych. Liczne techniki, opracowane już w latach 60. i 70. XX wieku, wywodzą się z postulatów rachunku wariacyjnego i prowadzą do rozwiązań zadań sterowania optymalnego. Najczęściej rozwiązaniami tymi jest sterowanie dwustanowe tzw. bang-bang. Niestety, tylko w nielicznych, najprostszych przypadkach daje się wyrazić to sterowanie przez zamknięte funkcje zmiennych stanu i (lub) czasu [22]. Znaczne trudności pojawiają się w układach o dużej liczbie stopni swobody. Optymalne przełączenie takich układów dokonuje się na skomplikowanych w swej naturze hiperpłaszczyznach w przestrzeni stanu. W celu uproszczenia obliczeń opracowano wiele alternatywnych metod gradientowych i bezgradientowych, które prowadzą do numerycznych wartości chwil przełączeń i są rozwiązaniami suboptymalnymi [23].

3. CEL I ZAKRES PRACY

W artykule zaprezentowana zostanie analityczna metoda wyznaczania dynamicznej odpowiedzi układu dyskretno-ciągłego, na który składa się belka lub struna wraz z systemem sterowalnych tłumików wiskotycznych. Rozważany model matematyczny reprezentowany przez biliniowe równanie cząstkowe, zostanie przy odpowiednich założeniach sprowadzony do układu równań liniowych o stałych współczynnikach. Rozwiązanie globalne będzie sklejeniem rozwiązań lokalnych, w których funkcja sterowania będzie z założenia przyjmować wartości stałe. Zaletą takiego podejścia jest łatwe w numerycznej implementacji generowanie trajektorii dynamiki układu przy dowolnych przebiegach sterowania. Ze względu na ciągłość rozwiązań, opracowana metoda oferuje możliwość definiowania zadań sterowania optymalnego z kryterium całkowym.

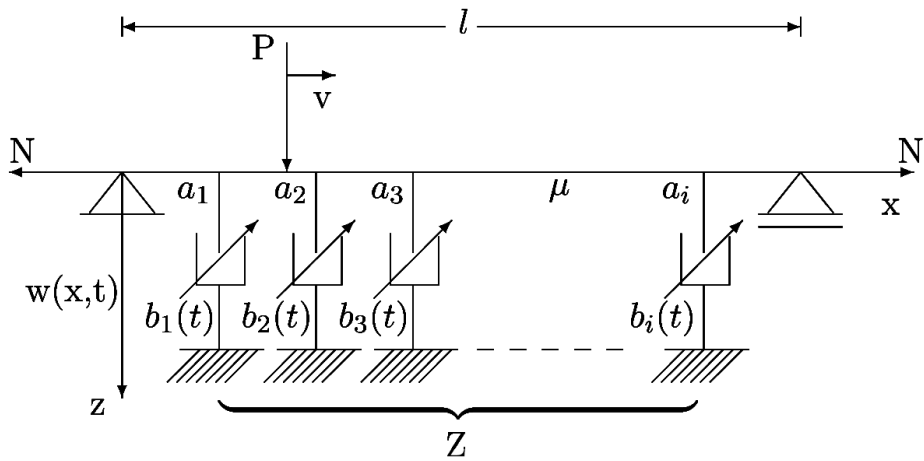
Przy doborze strategii sterowania zasadniczym problemem jest trafne zdefiniowanie wskaźnika odpowiedzialnego za jakość sterowania w celu uzyskania powziętego celu. Zwykle w zjawiskach rozważanych w domkniętym przedziale czasu takie wskaźniki mają postać całkową, a ich wartości liczbowe reprezentują odchylenia zmiennych stanu układu oraz ich pochodnych od wartości żądanych. W omawianym problemie istotne będą wskaźniki odpowiedzialne za obciążenie dynamiczne konstrukcji oraz za komfort przejazdu. W tym celu rozważane będą wartości całek przemieszczeń, prędkości oraz przyspieszeń w punktach najbardziej wrażliwych w konstrukcji, a także w ruchomym punkcie śledzącym obciążenie.

Celem pracy jest prezentacja idei półaktywnego sterowania konstrukcji modelowanych jako układy ciągłe i dyskretno-ciągłe. Proponowany algorytm sterowania jest prosty w realizacji, a jego skuteczność zostanie wykazana na licznych przykładach obliczeniowych. Wyniki badań są kontynuacją pracy [24].

4. MODEL MATEMATYCZNY I ODPOWIEDŹ DYNAMICZNA UKŁADU

W tej części sformułowany zostanie model matematyczny badanego układu. Do rozwiązania równania ruchu wykorzystana zostanie metoda szeregów potęgowych. W dalszej kolejności rozwiązanie poddane zostanie badaniom ze względu na zbieżność. Wyniki zestawione zostaną z otrzymanymi przy pomocy metody elementów skończonych. Prezentowana poniżej procedura wyznaczania odpowiedzi układu jest zastosowana w modelu ze struną. Analogiczne kroki pozwalają rozwiązać układ z belką Bernoulliego-Eulera czy Timoshenki.

Rozważać będziemy układ prezentowany na rysunku 3. Do struny zamocowanej na obydwu końcach przymocowana jest seria sterowalnych tłumików wiskotycznych. Ze względu na założenie o małej masie obciążenia efekty inercyjne zostaną pominięte i siła będzie mieć stałą wartość. Stała będzie również jej prędkość przemieszczenia. Wartości reakcji tłumików będą proporcjonalne do prędkości przemieszczeń w punktach ich mocowania.



Rys. 3. Układ struny wsparty na zestawie aktywnych lepkich tłumików

Fig. 3: String system supported by active viscous dampers

Dynamikę tak zdefiniowanego układu można wyrazić równaniem cząstkowym:

$$-N \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = - \sum_{i=1}^Z b_i(t) \frac{\partial w(a_i,t)}{\partial t} \delta(x - a_i) + P \delta(x - vt) , \quad (1)$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

N – siła napięcia struny,

μ – gęstość struny na jednostkę długości,

P – wartość obciążenia,

v – prędkość przejazdu obciążenia,

Z – liczba tłumików,

$b_i(t)$ – współczynnik tłumienia w funkcji czasu i -tego tłumika,

a_i – położenie i -tego tłumika,

$w(x,t)$ – pionowe przemieszczenie struny w funkcji położenia i czasu,

δ – delta Diraca.

Równanie (1) rozwiązane zostanie przy następujących warunkach brzegowych i początkowych:

$$w(0,t) = 0 , \quad w(l,t) = 0 , \quad w(x,0) = 0 , \quad \dot{w}(x,0) = 0 . \quad (2)$$

Przewidywana postać rozwiązania (1) przy warunkach (2) będzie miała postać następującą:

$$w(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} V(j,t) \sin \frac{j\pi x}{l}, \quad V(j,t) = \int_0^l w(x,t) \sin \frac{j\pi x}{l} dx. \quad (3)$$

W celu wyznaczenia równań zwyczajnych $V(j,t)$ wykonujemy kolejno podane niżej operacje:

- mnożymy każdy czynnik (1) przez $\sin \frac{j\pi x}{l}$, a następnie całkujemy je ze względu na x w przedziale $[0, l]$

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left(-N \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \sin \frac{j\pi x}{l} + \mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \sin \frac{j\pi x}{l} \right) dx = \\ & = \int_0^l \left(-\sum_{i=1}^Z b_i(t) \frac{\partial w(a_i,t)}{\partial t} \sin \frac{j\pi x}{l} \delta(x - a_i) + P \sin \frac{j\pi x}{l} \delta(x - vt) \right) dx, \end{aligned} \quad (4)$$

- całkujemy przez części czynniki lewej strony równania i otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{Nj^2 \pi^2}{l^2} V(j,t) + \mu \dot{V}(j,t) = \\ & = \int_0^l \left(-\sum_{i=1}^Z b_i(t) \frac{\partial w(a_i,t)}{\partial t} \sin \frac{j\pi x}{l} \delta(x - a_i) \right) dx + P \sin \frac{j\pi vt}{l}, \end{aligned} \quad (5)$$

- korzystając z własności splotu z funkcją Diraca czynnik całkowy prawej strony przepiszemy jako

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left(-\sum_{i=1}^Z b_i(t) \frac{\partial w(a_i,t)}{\partial t} \sin \frac{j\pi x}{l} \delta(x - a_i) \right) dx = \\ & = -\sum_{i=1}^Z b_i(t) \int_0^l \frac{\partial w(a_i,t)}{\partial t} \sin \frac{j\pi x}{l} \delta(x - a_i) dx = -\sum_{i=1}^Z b_i(t) \frac{\partial w(a_i,t)}{\partial t} \sin \frac{j\pi a_i}{l} = \\ & = -\frac{2}{l} \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^{\infty} b_i(t) \dot{V}(k,t) \sin \frac{k\pi a_i}{l} \sin \frac{j\pi a_i}{l}. \end{aligned} \quad (6)$$

Otrzymujemy zatem układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\mu \dot{V}(j,t) + \frac{2}{l} \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^{\infty} b_i(t) \dot{V}(k,t) \sin \frac{k\pi a_i}{l} \sin \frac{j\pi a_i}{l} + \frac{Nj^2 \pi^2}{l^2} V(j,t) = P \sin \frac{j\pi vt}{l}. \quad (7)$$

W celu rozwiązania układu (7) podzielimy dziedzinę czasu na s przedziałów i na każdym z nich zdefiniujemy funkcje $b_i(t)$ jako kawałkami stałe, co zapiszemy następująco:

$$b_i: \left[0, \frac{l}{v}\right] \rightarrow [b_{\min}, b_{\max}] \quad b_i(t) = \begin{cases} b_{ip}, & \forall t \in (t_{p-1}, t_p], \quad p=1 \dots s \\ 0, & t=0 \end{cases}, \quad (8)$$

gdzie b_{ip} oznacza stałą wartość tłumienia i -tego tłumika w p -tym przedziale czasu.

Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{\pi v}{l} = \omega, \quad \sin \frac{j\pi a_i}{l} \sin \frac{k\pi a_i}{l} = \alpha_{ijk}$$

równanie (7) przybiera postać

$$\mu \ddot{V}(j, t) + \frac{2}{l} \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^{\infty} b_{ip} \dot{V}(k, t) \alpha_{ijk} + \frac{Nj^2 \pi^2}{l^2} V(j, t) = P \sin(j\omega t). \quad (9)$$

Liniowy układ (9) o stałych współczynnikach rozwiązany zostanie metodą szeregów potęgowych. Za szukaną funkcję $V(j, t)$ podstawimy

$$V(j, t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(j) (t-r)^n, \quad (10)$$

gdzie r oznacza chwilę, względem której dokonujemy rozwinięcia. Poszukiwane będą teraz ciągi $d_n(j)$. Różniczkując (10) i wstawiając wynik do (9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n d_n(j) (t-r)^{n-2} + \frac{2}{l} \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{ip} \alpha_{ijk} n d_n(k) (t-r)^{n-1} + \\ + \frac{Nj^2 \pi^2}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(j) (t-r)^n = P \sin(j\omega t). \end{aligned} \quad (11)$$

Prawą stronę równania (11) można przedstawić jako

$$\cos(j\omega r) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (j\omega)^{2n+1} (t-r)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sin(j\omega r) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (j\omega)^{2n} (t-r)^{2n}}{(2n)!}. \quad (12)$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) d_{n+2}(j) (t-r)^n + \\ + \frac{2}{l} \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{ip} \alpha_{ijk} (n+1) d_{n+1}(k) (t-r)^n + \frac{Nj^2 \pi^2}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(j) (t-r)^n = \\ = P \cos(j\omega r) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (j\omega)^{2n+1} (t-r)^{2n+1}}{(2n+1)!} + P \sin(j\omega r) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (j\omega)^{2n} (t-r)^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned} \quad (13)$$

Po prostych przekształceniach algebraicznych otrzymujemy rekurencyjny układ

$$\begin{aligned} \mu(2n+1)(2n+2)d_{2n+2}(j) = & -\frac{2}{l} \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^{\infty} b_{ip} \alpha_{ijk} (2n+1)d_{2n+1}(k) + \\ & -\frac{Nj^2\pi^2}{l^2} d_{2n}(j) + P \sin(j\omega r) \frac{(-1)^n (j\omega)^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned} \quad (14)$$

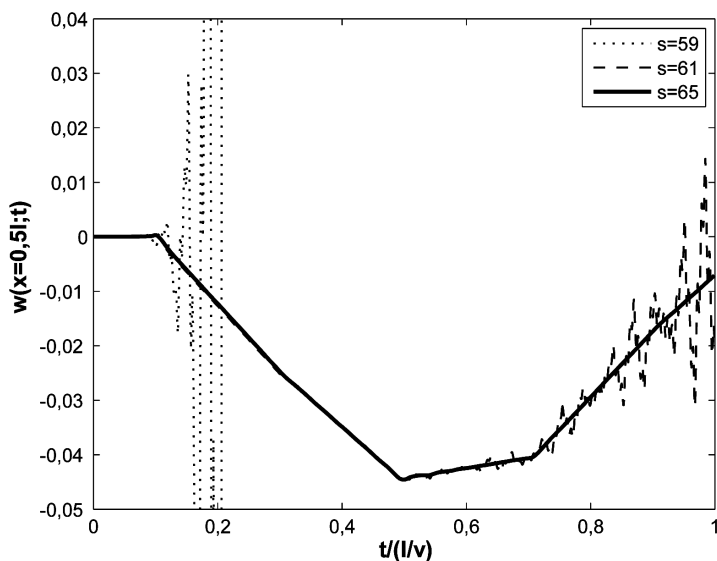
$$\begin{aligned} \mu(2n+2)(2n+3)d_{2n+3}(j) = & -\frac{2}{l} \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^{\infty} b_{ip} \alpha_{ijk} (2n+2)d_{2n+2}(k) + \\ & -\frac{Nj^2\pi^2}{l^2} d_{2n+1}(j) + P \cos(j\omega r) \frac{(-1)^n (j\omega)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

gdzie obliczamy kolejno wyrazy ciągów $d_n(j)$ przy $n=0, 1, \dots$, biorąc za $d_0(j)=V(j,r)$ oraz $d_1(j)=\dot{V}(j,r)$.

Należy teraz sprawdzić zbieżność otrzymanego rozwiązania. Wyniki obliczeniowe zostaną przedstawione przy następujących danych:

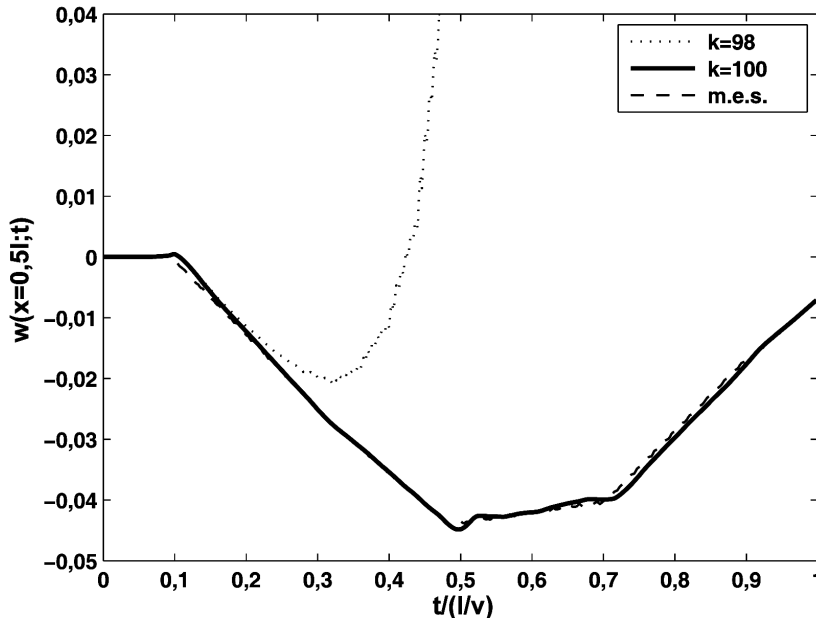
$$\mu=1, l=1, N=0,5, P=0,1, v=0,2\sqrt{\frac{N}{\mu}}, Z=1, a_1=0,5l.$$

Wartość tłumienia jest stała i wynosi ($b_{1p}=1, \forall p=1, \dots, s$). Rysunek 4 prezentuje odpowiedź układu w punkcie o współrzędnej $x=l/2$. Krzywe zostały narysowane przy różnej liczbie przedziałów czasu $s=59, 61$ oraz 65 . Do obliczeń przyjęto 60 modów ($j=1, 2, \dots, 60$) i 40 wyrazów w szeregach potęgowych ($k=1, 2, \dots, 40$). Przy mniejszej liczbie przedziałów rozwiązania były rozbieżne.



Rys. 4. Rozwiązania otrzymane przy różnej liczbie przedziałów czasu
Fig. 4. Solutions computed for different number of time intervals

W celu zwiększenia promienia zbieżności należy przyjąć w obliczeniach większą liczbę wyrazów w szeregach potęgowych. Rysunek 5 prezentuje wyniki przy danych jak poprzednio oraz mniejszej liczbie przedziałowej $s = 25$. Krzywe obliczone zostały przy 98 i 100 wyrazach w szeregach potęgowych. Linia przerywaną oznaczono rozwiązanie otrzymane metodą elementów skończonych.



Rys. 5. Rozwiązanie otrzymane przy różnej liczbie wyrazów szeregu potęgowego, porównane z wynikiem uzyskanym metodą elementów skończonych

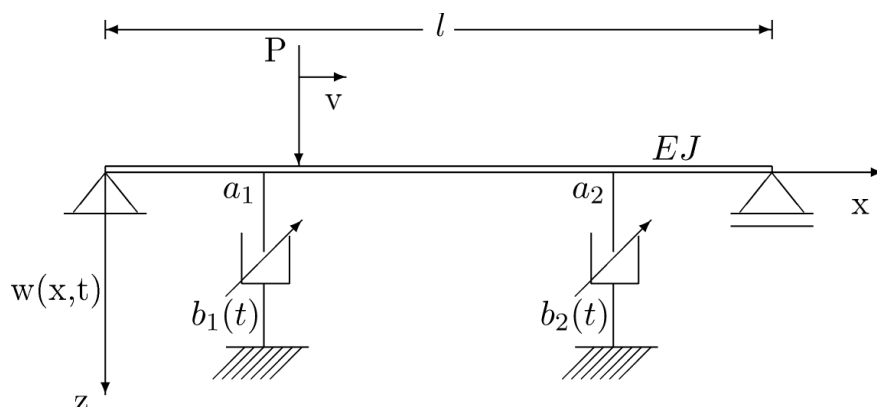
Fig. 5. Solutions computed for different number of terms in power series. FEM comparison

5. METODA STEROWANIA

Przedstawimy teraz strategię półaktywnej kontroli układu belki Bernoulliego-Eulera z dołączoną parą aktywnych tłumików. Proponowana koncepcja sterowania jest wynikiem analizy numerycznej dokonanej przy użyciu rozwiązań wyprowadzonych w poprzednim rozdziale. Zamierzeniem autorów było stworzenie możliwie najprostszego algorytmu do realizacji sterowania w układzie otwartym. Przedstawione dalej wyniki numeryczne mają na celu zbadanie wydajności i oceny proponowanej metody.

Dynamikę badanego układu (rys. 6) opisuje następujące równanie cząstkowe

$$EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = - \sum_{i=1}^2 b_i(t) \frac{\partial w(a_i,t)}{\partial t} \delta(x - a_i) + P \delta(x - vt) . \quad (15)$$



Rys.6. Belka Bernoulliego-Eulera, podparta dwoma aktywnymi tłumikami lepkimi
Fig. 6. Euler-Bernoulli beam system supported with two viscous active dampers

W obliczeniach drgań belki (dwuteownik szerokostopowy $301 \times 320 \times 8$) przyjęto następujące dane: $l = 20$ m, $\mu = 74,2$ kg/m, $EJ = 3,4 \cdot 10^7$ Nm². Tłumiki sterowalne w kolejnych przykładach umieszczone są w pozycjach $a_1 = 0,25l$, $a_2 = 0,75l$ oraz $a_1 = 0,2l$, $a_2 = 0,8l$. Siła o wartości $|P| = 10^4$ N poruszać się będzie ze stałą prędkością o wartościach kolejno $v = 0,1c$; $v = 0,4c$; $v = 0,9c$; gdzie przez c oznaczona została tzw. prędkość krytyczna, obliczana według wzoru $c = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ / \mu}$.

Idea proponowanego sterowania zaprezentowana została na rysunku 2. Funkcje sterujące $b_1(t)$, $b_2(t)$ są kawałkami stałe i działają na domknięty zbiór $B = [0, b_{\max}]$. Badania numeryczne wykazały najlepszą skuteczność sterowań typu *bang-bang*. Z tego względu zadanie poszukiwania optymalnych rozwiązań zostało ograniczone właśnie do sterowań *bang-bang* z możliwością jednego przełączenia każdego z tłumików w ten sposób, że tłumik umieszczony po lewej stronie zostaje wyłączony ze stanu b_{\max} po pewnym czasie τ_1 , natomiast tłumik z prawej strony zostaje załączony na stan b_{\max} z opóźnieniem τ_2 . Formalnie można to zapisać następująco:

$$b_1(t) = b_{\max} U_1(t) - b_{\max} U_1(t - \tau_1), \quad b_2(t) = b_{\max} U_1(t - \tau_2), \quad (16)$$

gdzie $U_1(t)$ jest funkcją skokową.

Poniżej zdefiniowane zostaną wskaźniki jakości sterowania:

1. WSKAŹNIK₁ = $\int_0^{l/v} |w(vt, t)| dt$,
2. WSKAŹNIK₂ = $\text{RMS}(\dot{w}(vt, t)) = \left(\frac{v}{l} \int_0^{l/v} (\dot{w}(vt, t))^2 dt \right)^{1/2}$,
3. WSKAŹNIK₃ = $\int_0^{l/v} |\ddot{w}(vt, t)| dt$.

$$(17)$$

Wskaźniki zostały dobrane tak aby odpowiadały za obciążenie dynamiczne konstrukcji oraz za komfort przejazdu. Celem będzie znalezienie takich par przełączeń (τ_1, τ_2) , przy których wskaźniki te będą osiągać wartości minimalne:

$$(\tau_1, \tau_2) = \arg \min_{\tau_1, \tau_2 \in [0, l/v]} \text{WSKAŹNIK}(w(t), b_1(t), b_2(t)) . \quad (18)$$

We wszystkich przeliczonych przypadkach założono wartość $b_{\max} = 5 \cdot 10^5 \text{ Ns/m}$. Tablice 1 i 2 zawierają numeryczne wyniki rozwiązań sformułowanego wyżej zadania optymalizacji. Wartości wskaźników optymalnych zostały zestawione z wartościami obliczonymi w przypadku tłumienia pasywnego, w którym obydwie tłumiki są permanentnie ustawione na poziomie maksimum: $b_1 = b_{\max}$, $b_2 = b_{\max}$.

Tablica 1. Wartości wskaźników jakości sterowania w przypadku $a_1 = 0,25 \text{ l}$, $a_2 = 0,75 \text{ l}$
Table 1. Payoff values in case of $a_1 = 0,25 \text{ l}$, $a_2 = 0,75 \text{ l}$

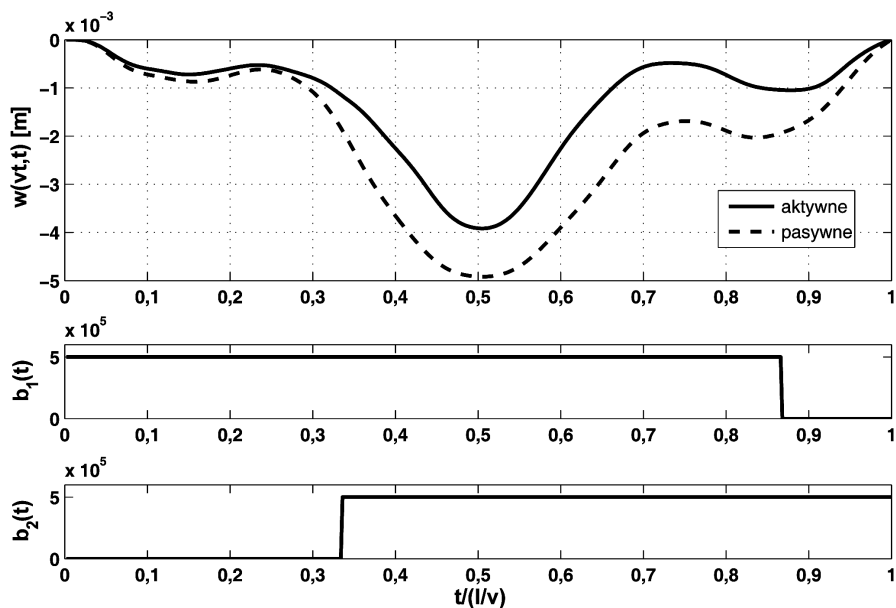
Prędkość przejazdu	WSKAŹNIK ₁ (tł. aktywne/pasywne)	WSKAŹNIK ₂ (tł. aktywne/pasywne)	WSKAŹNIK ₃ (tł. aktywne/pasywne)
0,1 c	0,014579/0,015712	0,011214/0,011306	0,000612/0,000612
0,4 c	0,001118/0,001290	0,018115/0,018298	0,000168/0,000168
0,9 c	0,000268/0,000391	0,019774/0,019992	0,000110/0,000112

Tablica 2. Wartości wskaźników jakości sterowania w przypadku $a_1 = 0,2 \text{ l}$, $a_2 = 0,8 \text{ l}$
Table 2. Payoff values in case of $a_1 = 0,2 \text{ l}$, $a_2 = 0,8 \text{ l}$

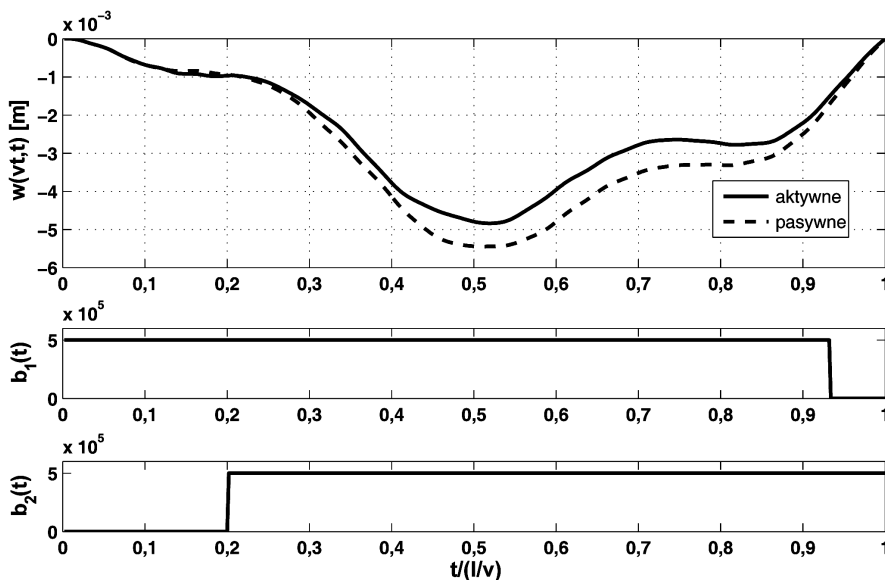
Prędkość przejazdu	WSKAŹNIK ₁ (tł. aktywne/pasywne)	WSKAŹNIK ₂ (tł. aktywne/pasywne)	WSKAŹNIK ₃ (tł. aktywne/pasywne)
0,1 c	0,019126/0,019248	0,013700/0,013727	0,000442/0,000442
0,4 c	0,001723/0,001826	0,023436/0,023367	0,000157/0,000159
0,9 c	0,000408/0,000537	0,053741/0,056092	0,000128/0,000135

6. WNIOSKI

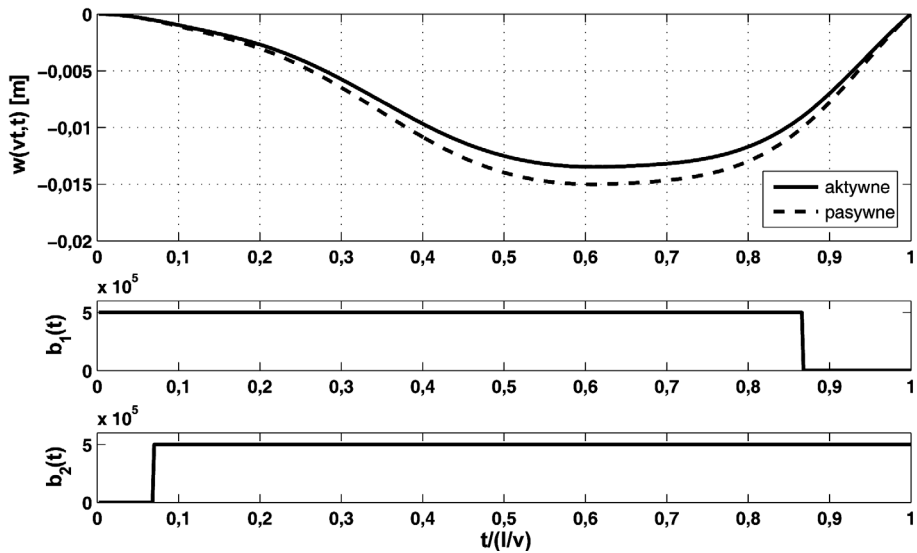
Zestawienie wyników dowodzi słuszności proponowanej metody. Wyższe prędkości przejazdu (0,4c; 0,9c), uwydatniając zjawiska falowe, dają większą szansę na lepszą poprawę wyniku pod wpływem sterowań. W każdym z przeliczonych przypadków uzyskano efektywne wygładzenie trajektorii przemieszczeń (rys. 7 - 10), co liczbowo wyraża się przez obniżenie wskaźnika jakości nawet o 30 %. Trajektorie prędkości (rys. 11) i przyspieszeń (rys. 12), ze względu na obecność wyższych harmonicznych, wymagają sterowania o większej liczbie przełączeń. Liczne symulacje z założeniem różnych przypadków rozkładu przestrzennego tłumików wyłoniły rozwiązania symetryczne jako te najskuteczniejsze.



Rys. 7. Sterowania optymalne i odpowiadająca im trajektoria przemieszczeń przy prędkości przejazdu 0,9 c i położeniu tłumików w punktach $a_1 = 0,25 l$; $a_2 = 0,75 l$
 Fig. 7. Extremal deflection trajectory and controls, load travels with speed $v = 0.9 c$, damper fix points are $a_1 = 0.25 l$, $a_2 = 0.75 l$

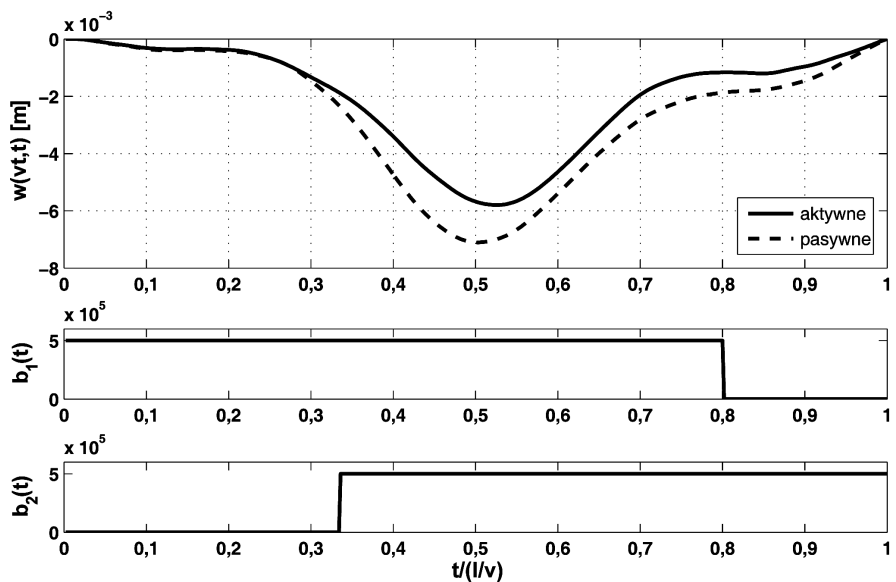


Rys. 8. Sterowania optymalne i odpowiadająca im trajektoria przemieszczeń przy prędkości przejazdu 0,4 c i położeniu tłumików w punktach $a_1 = 0,25 l$; $a_2 = 0,75 l$
 Fig. 8. Extremal deflection trajectory and controls, load travels with speed $v = 0.4 c$, damper fix points are $a_1 = 0.25 l$, $a_2 = 0.75 l$



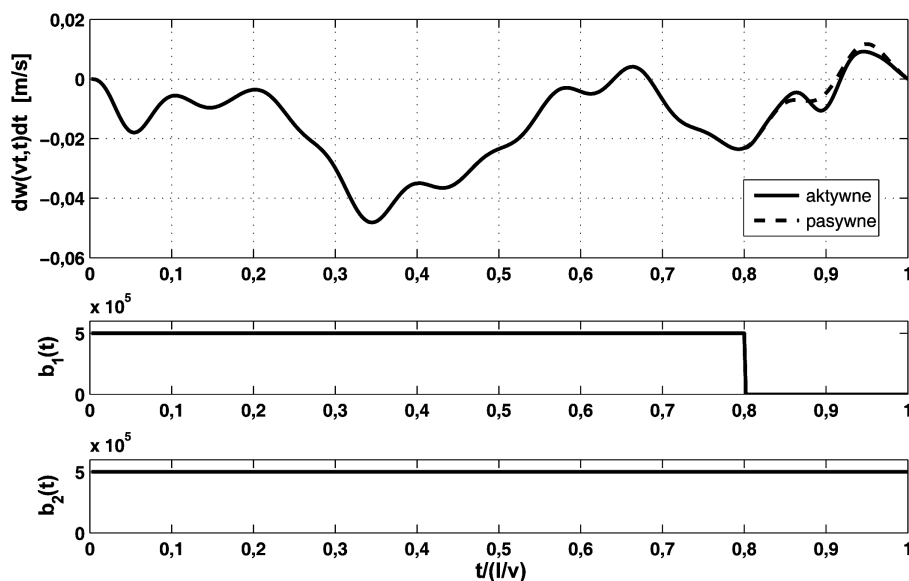
Rys. 9. Sterowania optymalne i odpowiadająca im trajektoria przemieszczeń przy prędkości przejazdu 0,1 c i położeniu tłumików w punktach $a_1 = 0,25 l$; $a_2 = 0,75 l$

Fig. 9. Extremal deflection trajectory and controls, load travels with speed $v = 0.1 c$, damper fix points are $a_1 = 0.25 l$, $a_2 = 0.75 l$

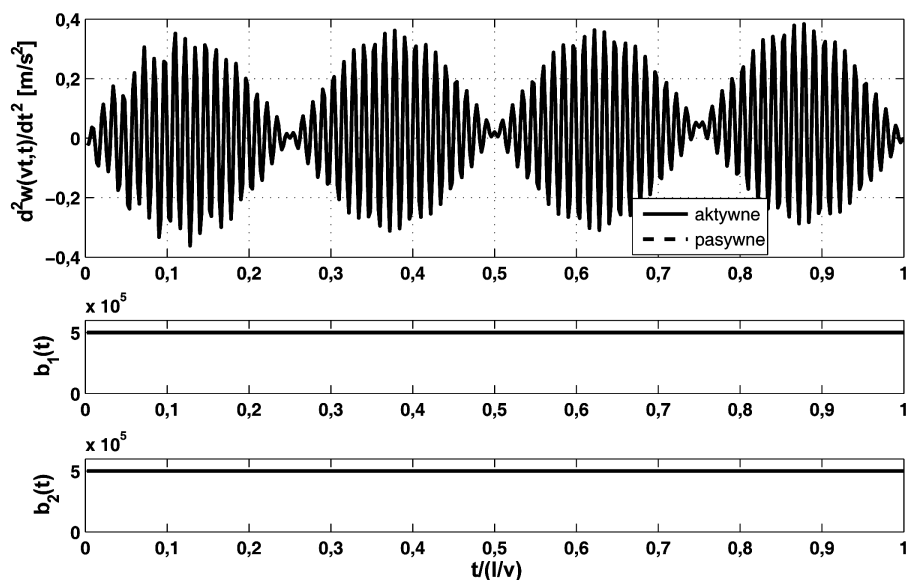


Rys. 10. Sterowania optymalne i odpowiadająca im trajektoria przemieszczeń przy prędkości przejazdu 0,9 c i położeniu tłumików w punktach $a_1 = 0,2 l$; $a_2 = 0,8 l$

Fig. 10. Extremal deflection trajectory and controls, load travels with speed $v = 0.9 c$, damper fix points are $a_1 = 0.2 l$, $a_2 = 0.8 l$



Rys. 11. Sterowania optymalne i odpowiadająca im trajektoria prędkości, przy prędkości przejazdu 0,9 c i położeniu tłumików w punktach $a_1 = 0,25 l$; $a_2 = 0,75 l$
 Fig. 11. Extremal velocity trajectory and controls, load travels with speed $v = 0.9 c$, damper fix points are $a_1 = 0.25 l$, $a_2 = 0.75 l$



Rys. 12. Sterowania optymalne i odpowiadająca im trajektoria przyspieszeń, przy prędkości przejazdu 0,1 c i położeniu tłumików w punktach $a_1 = 0,25 l$; $a_2 = 0,75 l$
 Fig. 12. Extremal acceleration trajectory and controls, load travels with speed $v = 0.1 c$, damper fix points are $a_1 = 0.25 l$, $a_2 = 0.75 l$

Zamieszczone przykłady obliczeniowe wykazują, że proponowana koncepcja jest atrakcyjnym rozwiązaniem dla inżynierów. Pozwala nie tylko na nowe projekty konstrukcji nośnych, ale przede wszystkim daje możliwości efektywnej modernizacji mostów, wiaduktów, sieci trakcyjnych, których dotychczasowe konstrukcje poddawane są coraz większym obciążeniom dynamicznym i w rezultacie prowadzą do częstych uszkodzeń eksploatacyjnych. Stosowane dotychczas układy tłumienia pasywnego wykazują niższą skuteczność. Możliwości ich stosowania praktycznie są wyczerpane. Koncepcja sterowania półaktywnego z zastosowaniem elementów tłumiących stwarza możliwości jeszcze bardziej skutecznych zastosowań.

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Ryba L.*: Vibrations of solids and structures under moving loads. Thomas Telford House, 1999
- [2] *Yang Y.B., Wu Y.S., Yau J.D.*: Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways. World Scientific Publishing Company, 2004
- [3] *Olsson M.*: On the fundamental moving load problem. *Journal of Sound and Vibration*, **154**, 2, 1991, 299 - 307
- [4] *Szcześniak W., Ataman M., Zbiciak A.*: Drgania belki sprężystej wywołane ruchomym, liniowym oscylatorem jednomasowym. *Drogi i Mosty* nr 2/2002, 53 - 83
- [5] *Pesterev A.V., Bergman L.A.*: Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, **123**, 8, 1997, 878 - 884
- [6] *Metrikine A.V., Verichev S.N.*: Instability of vibration of a moving oscillator on a flexibly supported Timoshenko beam. *Archive of Applied Mechanics*, **71**, 9, 2001, 613 - 624
- [7] *Biondi B., Muscolino G.*: New improved series expansion for solving the moving oscillator problem. *Journal of Sound and Vibration*, **281**, 1-2, 2005, 99 - 117
- [8] *Bolotin W.W.*: Wpływ ruchomego obciążenia na mosty (w j. ros.). *Reports of Moscow University of Railway Transport MIIT*, **74**, 1950, 269 - 296
- [9] *Sadiku S., Leipholz H.H.E.*: On the dynamics of elastic systems with moving concentrated masses. *Ingenieur Archiv*, **57**, 3, 1987, 223 - 242
- [10] *Ichikawa M., Miyakawa Y., Matsuda A.*: Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass. *Journal of Sound and Vibration*, **230**, 3, 2000, 493 - 506
- [11] *Dyniewicz B., Bajer C.I.*: Paradox of the particle's trajectory moving on a string. *Archive of Applied Mechanics*, **79**, 3, 2009, 213 - 223
- [12] *Sapinski R., Piłat A., Rosół M.*: Modelling of a quarter car semi-active suspension with a MR damper. *Machine Dynamics Problems*, **27**, 2, 2003, 107 - 116
- [13] *Giraldo D., Dyke Sh.J.*: Control of an elastic continuum when traversed by a moving oscillator. *Journal of Structural Control and Health Monitoring*, **14**, 2007, 197 - 217

- [14] *Ruangrassamee A., Kawashima K.*: Control of nonlinear bridge response with pounding effect by variable dampers. *Engineering Structures*, **25**, 5, 2003, 593 - 606
- [15] *Yoshida K., Fujio T.*: Semi-active base isolation for a building structure. *International Journal of Computer Applications in Technology*, **13**, 1/2, 2000, 52 - 58
- [16] *Ossowski A.*: Semi-active control of free beam vibration. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, 11, 2003, 557 - 566
- [17] *Frischgesell T., Krzyżyński T., Bogacz R., Popp K.*: On the dynamics and control of a guideaway under a moving mass. *Heavy vehicle systems. A series of the International Journal of Vehicle Design*, **6**, 1/4, 1999, 176 - 189
- [18] *Frischgesell T., Popp K., Reckmann H., Schutte O.*: Regelung eines elastischen Fahrwegs inter Verwendung eines variablen Beobachters. *Technische Mechanik*, **18**, 1, 1998, 44 - 55
- [19] *Tylikowski A.*: Stabilization of parametric vibrations of a nonlinear continuous system. *Meccanica*, **38**, 6, 2003, 659 - 668
- [20] *Tylikowski A.*: Active damping of geometrically nonlinear transverse beam vibrations. *Mechanics and Mechanical Engineering*, **5**, 2, 2001, 127 - 136
- [21] *Tylikowski A., Watanabe K., Ziegler F.*: Active damping of parametric vibrations of mechanical distributed systems. *IUTAM Symposium on Dynamics of Advanced Materials and Smart Structures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2003, 409 - 418
- [22] *Mohler R.R.*: *Nonlinear Systems. Vol. 2. Applications to bilinear control.* Prentice Hall, 1991
- [23] *Mohler R.R.*: *Bilinear control processes.* Academic Press, New York 1973
- [24] *Bogacz R., Bajer C.I.*: Active control of beams under moving load. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **38**, 3, 2000, 523 - 530

ACTIVE DAMPING OF VIBRATIONS OF ONE DIMENSIONAL CONTINUUM UNDER A MOVING LOAD

Abstract

In this paper, a semi-active control of vibrations of 1D elastic continuum under a traveling load is presented. Bridge spans induced by vehicles traveling over it with high speed can be reinforced by supplementary supports with magneto or electroreological dampers controlled externally. Structures with such an external control of parameters can resist to the load in a more efficient way. Controlled system widely outperforms passive cases when decreasing amplitudes of transverse vibrations. The goal of the paper is to design a control method - effective and simple in practical realization. In the model the number of dampers and their fixed points are taken as arbitrary. Control functions are assumed to be piecewise constant. Response of the system is solved in modal space. Full analytical solution is based on the power series method and is given in an arbitrary time interval. The performance of assumed strategy is verified for different cost integrands. Several examples are solved by using the proposed method.

