

MAREK ŁAGODA¹⁾

STAN ODKSZTAŁCENIA I NAPRĘŻENIA W SKLEINIE

STRESZCZENIE. Praca przedstawia analizę ścinania i rozwarstwienia połączenia klejowego w oparciu o teorię sprężystości. Wykorzystując równania różniczkowe opisujące naprężenia i odkształcenia w warstwie kleju przedstawiono ogólne równanie ciągłości połączenia. Przeanalizowano przypadek belki obciążonej siłą skupioną oraz belki obciążonej równomiernie. W rezultacie przedstawionych rozważań określono ogólną postać występujących w skleinie naprężeń ścinających-rozwarstwiających i normalnych-odrywających. Uwzględniając warunki brzegowe podano też wzory opisujące naprężenia o maksymalnych wartościach.

1. WSTĘP

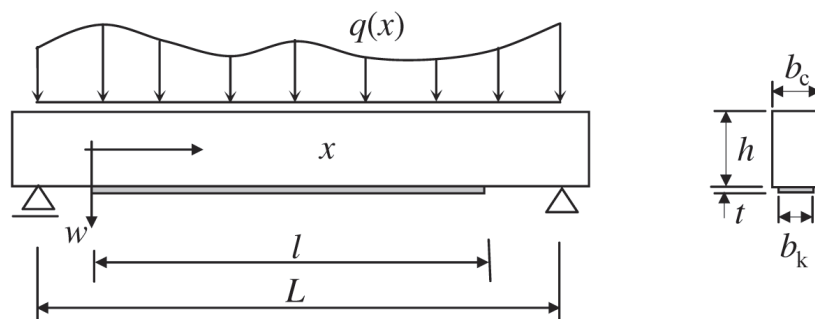
Metoda wzmocnienia konstrukcji betonowych za pomocą doklejanych płaskowników stalowych została wprowadzana najpierw w Polsce w latach sześćdziesiątych, potem w innych krajach europejskich w połowie lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Jednakże, rozważania teoretyczne pracy połączeń klejowych, poza [1] nie cieszyły się większym zainteresowaniem. Więcej wysiłków koncentrowano w obszarze doświadczalnym. Następnie w latach osiemdziesiątych zaczęto stosować do wzmocnienia materiały kompozytowe. Wówczas zaczęło pojawiać się więcej opracowań [2 - 5], odnoszących się do stanu odkształceń i naprężeń wzmocnianych przez doklejenie zewnętrznych elementów konstrukcji. Wykorzystywały one przede wszystkim liniową

¹⁾ dr hab.inż. – docent Instytutu Badawczego Dróg i Mostów w Warszawie
oraz profesor Politechniki Lubelskiej

teorię sprężystości, czasami z wprowadzeniem warunków nieliniowych lub z zastosowaniem mechaniki pęknięcia [5].

2. OGÓLNE RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI POŁĄCZENIA

W celu opisu ciągłości połączenia wyprowadza się równanie różniczkowe, opisujące naprężenia ścinające-rozwarsztwiające w połączeniu klejowym (w skleinie) między elementem doklejonym (kompozytowym lub stalowym) a belką betonową. Analiza jest przeprowadzona w oparciu o klasyczną mechanikę budowli. Zakłada się ważność prawa Hooke'a w odniesieniu do materiałów łączonych i skleiny oraz zachowanie zasady płaskich przekrojów w odniesieniu do każdego elementu z osobna. Model obliczeniowy oraz schematyczny opis rozkładu sił w analizowanym odcinku pokazano na rysunkach 1 i 2.



Rys.1. Belka wzmocniona przyklejonym elementem
Fig.1. Beam strengthened with a plate glued

Z warunków równowagi wynika:

$$\sum_x = 0:$$

$$N_c(x) - N_c(x) - dN_c(x) + \tau(x)b_k dx = 0 \quad , \quad (1)$$

$$\frac{dN_c(x)}{dx} = \tau(x)b_k \quad ,$$

$$N_k(x) - N_k(x) + dN_k(x) - \tau(x)b_k dx = 0 \quad , \quad (2)$$

$$\frac{dN_k(x)}{dx} = \tau(x)b_k \quad ,$$

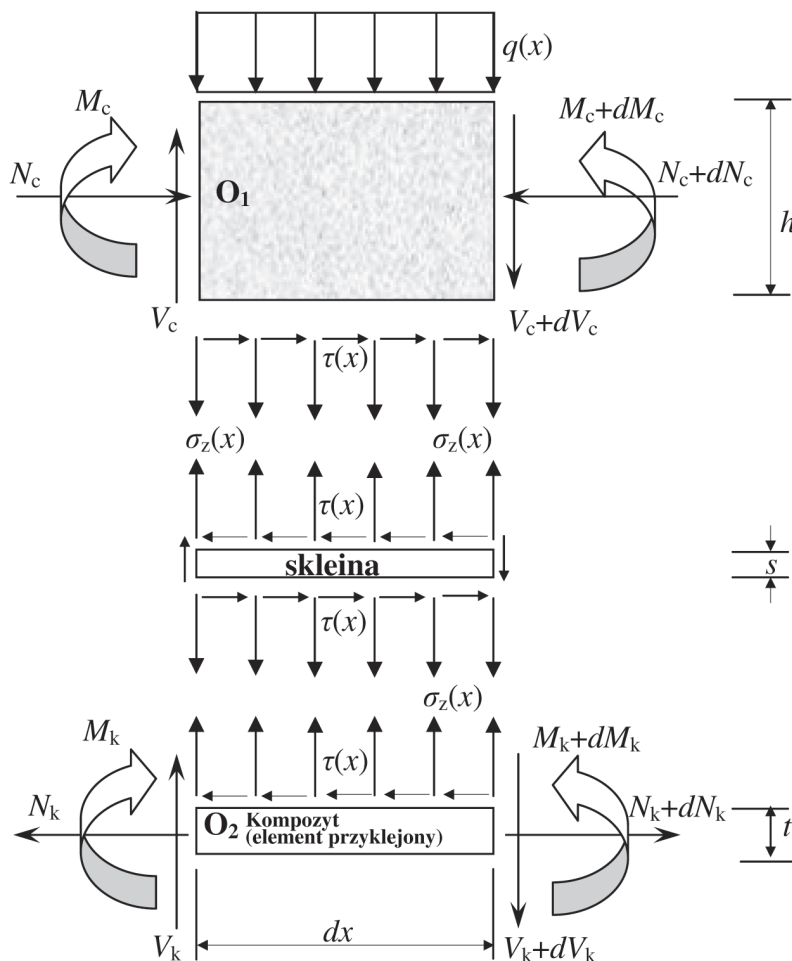
$$\sum_w = 0:$$

$$V_c(x) - V_c(x) - dV_c(x) - \sigma_z(x)b_k dx - q(x)dx = 0 \quad , \quad (3)$$

$$\frac{dV_c(x)}{dx} = -\sigma_z(x)b_k - q(x) \quad ,$$

$$V_k(x) - V_k(x) - dV_k(x) + \sigma_z(x)b_k dx = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dV_k(x)}{dx} = +\sigma_z(x)b_k.$$



Rys.2. Schemat rozkładu sił na odcinku dx
 Fig.2. Differential section dx , of strengthened beam studied

$$\sum M_{o1} = 0:$$

$$M_c(x) + dM_c(x) - M_c(x) - V_c(x)dx - dV_c(x)dx - q(x)dx \frac{dx}{2} +$$

$$- \sigma_z(x)dx b_k \frac{dx}{2} + \tau(x)b_k dx \frac{h}{2} = 0, \quad (5)$$

$$V(x) = V_c(x) + V_k(x),$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{dV_c(x)}{dx} + \frac{dV_k(x)}{dx} = -q(x) , \quad (6)$$

uwzględniając (3) oraz odrzucając małe wyższego rzędu, otrzymujemy równanie:

$$\frac{dM_c(x)}{dx} = V_c(x) - \tau(x)b_k \frac{h}{2} . \quad (7)$$

Podobnie postępując dla elementu przyklejonego z warunku $\sum M_{02} = 0$, otrzymujemy równanie:

$$M_k(x) + dM_k(x) - M_k(x) - V_k(x)dx + \tau(x)b_k dx \frac{t}{2} = 0 , \quad (8)$$

$$\frac{dM_k(x)}{dx} = V_k(x) - \tau(x)b_k \frac{t}{2} .$$

Po uwzględnieniu zgodności odkształceń i warunków geometrycznych, otrzymujemy równanie:

$$\varepsilon_c(x) = \frac{du_c(x)}{dx} = \frac{M_c(x)}{E_c W_c} - \frac{N_c(x)}{E_c A_c} . \quad (9)$$

Wskaźnik wytrzymałości i pole przekroju prostokątnej belki betonowej w stanie niezarysowanym ma postać:

$$W_c = \frac{b_c h^2}{6} , \quad A_c = b_c h ,$$

wtedy równanie (9) przekształci się następująco:

$$\varepsilon_c(x) = \frac{du_c(x)}{dx} = \frac{6M_c(x)}{E_c b_c h^2} - \frac{N_c(x)}{E_c b_c h} . \quad (10)$$

A dla elementu doklejonego:

$$\varepsilon_k(x) = \frac{du_k(x)}{dx} = -\frac{M_k(x)}{E_k W_k} + \frac{N_k(x)}{E_k A_k} \quad (11)$$

$$W_k = \frac{b_k t^2}{6} , \quad A_k = b_k t ,$$

$$\varepsilon_k(x) = \frac{du_k(x)}{dx} = \frac{6M_k(x)}{E_k b_k t^2} + \frac{N_k(x)}{E_k b_k t} , \quad (12)$$

oraz

$$\tau(x) = \frac{G}{S} [u_k(x) - u_c(x)] . \quad (13)$$

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem x równania (10) i (12) przyjmują postać:

$$\frac{d^3 u_c(x)}{dx^3} = \frac{6}{E_c b_c h^2} \frac{d^2 M_c(x)}{dx^2} - \frac{1}{E_c b_c h} \frac{d^2 N_c(x)}{dx^2}, \quad (14)$$

$$\frac{d^3 u_k(x)}{dx^3} = -\frac{6}{E_k b_k t^2} \frac{d^2 M_k(x)}{dx^2} + \frac{1}{E_k b_k t} \frac{d^2 N_k(x)}{dx^2}, \quad (15)$$

ale

$$\frac{d^2 N_c(x)}{dx^2} = b_k \frac{d\tau(x)}{dx}, \quad (16)$$

$$\frac{d^2 N_k(x)}{dx^2} = b_k \frac{d\tau(x)}{dx}, \quad (17)$$

$$\frac{d^2 M_c(x)}{dx^2} = \frac{dV_c(x)}{dx} - b_k \frac{h}{2} \frac{d\tau(x)}{dx}, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 M_k(x)}{dx^2} = \frac{dV_k(x)}{dx} - b_k \frac{t}{2} \frac{d\tau(x)}{dx}. \quad (19)$$

Po wykorzystaniu równań (16 ÷ 19) w związkach (14) i (15) otrzymujemy zależności:

$$\frac{d^3 u_c(x)}{dx^3} = \frac{6}{E_c b_c h^2} \frac{dV_c(x)}{dx} - \frac{4b_k}{E_c b_c h} \frac{d\tau(x)}{dx}, \quad (20)$$

$$\frac{d^3 u_k(x)}{dx^3} = -\frac{6}{E_k b_k t^2} \frac{dV_k(x)}{dx} + \frac{4}{E_k t} \frac{d\tau(x)}{dx}. \quad (21)$$

Trzecia pochodna (13) względem x ma postać:

$$\frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} = \frac{G}{s} \left(\frac{d^3 u_k(x)}{dx^3} - \frac{d^3 u_c(x)}{dx^3} \right), \quad (22)$$

którą, uwzględniając równania (20) i (21), można zapisać:

$$\frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} = \frac{4G}{s} \left(\frac{1}{E_k t} + \frac{b_k}{E_c b_c h} \right) \frac{d\tau(x)}{dx} + \frac{6G}{E_k s} \left[\frac{E_k}{E_c b_c h^2} q(x) - \left(\frac{1}{t^2} - \frac{E_k b_k}{E_c b_c h^2} \right) \sigma_z(x) \right],$$

lub

$$\frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} = C_a \frac{d\tau(x)}{dx} + C_b q(x) - C_c \sigma_z(x), \quad (23)$$

gdzie:

$$C_a = \frac{4G}{s} \left(\frac{1}{E_k t} + \frac{b_k}{E_c b_c h} \right), \quad C_b = \frac{6G}{s} \frac{1}{E_c b_c h^2}, \quad C_c = \frac{6G}{E_k s} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{E_k b_k}{E_c b_c h^2} \right).$$

Następny krok polega na wyprowadzeniu równania różniczkowego dla naprężenia odrywającego element przyklejany. Można to uczynić w podobny sposób jak w przypadku ścinania, rozpatrując deformacje w kierunku w zamiast deformacji w kierunku u :

$$\sigma_z(x) = \frac{E_s}{s} [w_k(x) - w_c(x)], \quad (24)$$

oraz:

$$\frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} = -\frac{M_k(x)}{E_k I_k} = -\frac{12M_k(x)}{E_k b_k t^3}, \quad (25)$$

$$\frac{d^2 w_c(x)}{dx^2} = -\frac{M_c(x)}{E_c I_c} = -\frac{12M_c(x)}{E_c b_c h^3}. \quad (26)$$

Dwukrotnie różniczkując równania (25) i (26) względem x , otrzymujemy:

$$\frac{d^4 w_k(x)}{dx^4} = -\frac{12}{E_k b_k t^3} \frac{d^2 M_k(x)}{dx^2}, \quad (27)$$

$$\frac{d^4 w_c(x)}{dx^4} = -\frac{12}{E_c b_c h^3} \frac{d^2 M_c(x)}{dx^2}, \quad (28)$$

$$\frac{d^4 \sigma_z(x)}{dx^4} = \frac{E_s}{s} \left(\frac{d^4 w_k(x)}{dx^4} - \frac{d^4 w_c(x)}{dx^4} \right), \quad (29)$$

a biorąc pod uwagę równania (5), (6), (18), (19), (27), (28) i (29), można napisać:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \sigma_z(x)}{dx^4} &= \frac{6E_s}{s} \left(\frac{1}{E_k t^2} - \frac{b_k}{E_c b_c h^2} \right) \frac{d\tau(x)}{dx} + \\ &- \frac{12E_s}{s} \left(\frac{1}{E_k t^3} + \frac{b_k}{E_c b_c h^3} \right) \sigma_z(x) - \frac{12E_s}{sE_c b_c h^3} q(x). \end{aligned} \quad (30)$$

Równanie (30) można zapisać w formie:

$$\frac{d^4 \sigma_z(x)}{dx^4} + C_d \sigma_z(x) - C_e \frac{d\tau(x)}{dx} + C_f q(x) = 0, \quad (31)$$

gdzie:

$$C_d = \frac{12E_s}{s} \left(\frac{1}{E_k t^3} + \frac{b_k}{E_c b_c h^3} \right), \quad C_e = \frac{6E_s}{s} \left(\frac{1}{E_k t^2} - \frac{b_k}{E_c b_c h^2} \right), \quad C_f = \frac{12E_s}{sE_c b_c h^3}.$$

Po dwukrotnym różniczkowaniu równania (31) względem x otrzymujemy:

$$\frac{d^6 \sigma_z(x)}{dx^6} + C_d \frac{d^2 \sigma_z(x)}{dx^2} - C_e \frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} + C_f \frac{d^2 q(x)}{dx^2} = 0. \quad (32)$$

Równania (23) i (31) można teraz zapisać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} &= C_a \frac{d\tau(x)}{dx} + C_b q(x) - C_c \sigma_z(x), \\ \frac{d\tau(x)}{dx} &= \frac{1}{C_e} \left[\frac{d^4 \sigma_z(x)}{dx^4} + C_d \sigma_z(x) + C_f q(x) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Wstawiając wartości z (33) do (32) otrzymujemy:

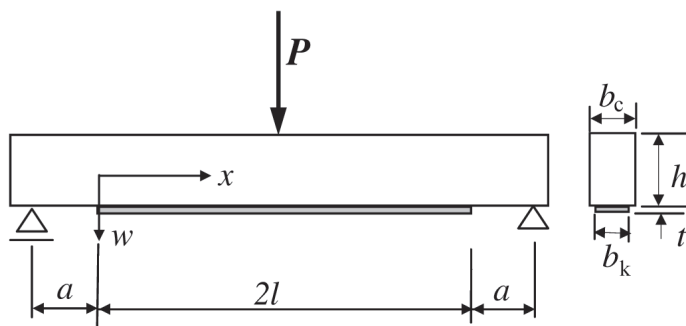
$$\frac{d^6 \sigma_z(x)}{dx^6} - C_a \frac{d^4 \sigma_z(x)}{dx^4} + C_d \frac{d^2 \sigma_z(x)}{dx^2} - (C_a C_d - C_e C_c) \sigma_z(x) + \Theta(x) = 0, \quad (34)$$

gdzie:

$$\Theta(x) = C_f \frac{d^2 q(x)}{dx^2} - (C_a C_f + C_b C_e) q(x). \quad (35)$$

3. PRZYPADKEM BELKI OBCIĄŻONEJ SIŁĄ SKUPIONĄ

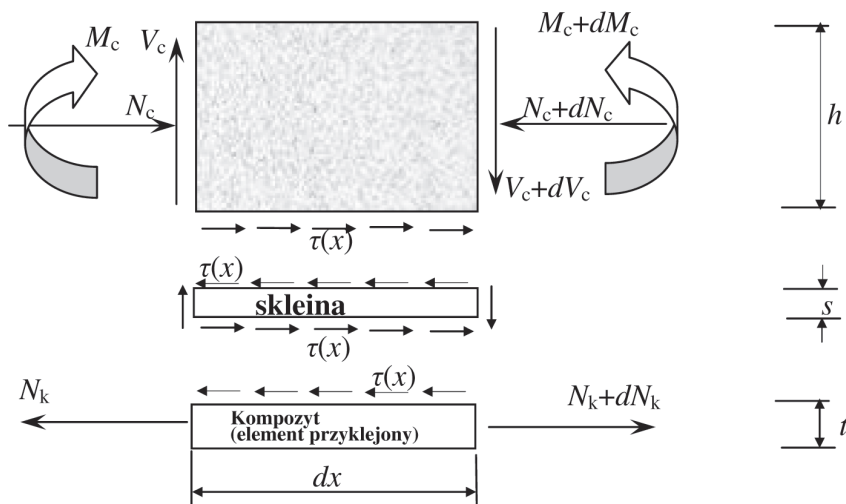
Nawet jeśli znane są parametry materiałowe, a kształt analizowanej belki jest prosty, powyższe równanie nie jest łatwe do rozwiązywania. Jednak, w celu uproszczenia, można problem sprowadzić do prostych schematów obciążenia. Najprostszym schematem jest obciążenie belki jedną siłą skupioną w środku jej rozpiętości (rys. 3).



Rys.3. Belka wzmocniona przyklejonym elementem i obciążona siłą skupioną P w środku rozpiętości

Fig.3. Beam strengthened with a plate glued loaded with a point P load at midsection

Analizowany jest wycinek belki „ dx ” (rys. 4). Ścinanie w skleinie jest wywołane obciążeniem zewnętrznym. Dla uproszczenia przyjęto, że zginanie w doklejonym elemencie jest bez znaczenia z uwagi na sztywność tego elementu. Wynika to z bardzo dużej różnicy sztywności przekroju betonowego i elementu doklejanego. Warstwa klejowa, nazwana skleina, przekazuje oddziaływanie z jednego elementu na drugi w postaci sił stycznych oraz sił normalnych. W pierwszym kroku analizy pomija się występowanie naprężeń odrywających, występujących w płaszczyźnie skleiny.



Rys.4. Przekrój dx analizowanej belki

Fig.4. Differential section dx of strengthened beam studied

Jeśli odkształcenie materiału skleiny nie wykracza poza zakres stosowalności prawa Hooke’a, to równanie zależności naprężeń ścinających i odkształceń, powracając do równania (13) można zapisać:

$$\tau(x) = \frac{G}{s} [u_k(x) - u_c(x)] . \quad (36)$$

Odkształcenia w betonie i elemencie przyklejonym mogą być opisane w postaci:

$$\varepsilon_c(x) = \frac{du_c(x)}{dx} = \frac{6M_c(x)}{E_c b_c h^2} - \frac{N_c(x)}{E_c b_c h} , \quad (37)$$

$$\varepsilon_k(x) = \frac{du_k(x)}{dx} = \frac{N_k(x)}{E_k h_k t} . \quad (38)$$

Po zróżniczkowaniu równań (36), (37) i (38) względem x otrzymujemy:

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} = \frac{G}{s} \left(\frac{d^2u_k(x)}{dx^2} - \frac{d^2u_c(x)}{dx^2} \right) , \quad (39)$$

$$\frac{d^2 u_c(x)}{dx^2} = \frac{6}{E_c b_c h^2} \frac{dM_c(x)}{dx} - \frac{1}{E_c b_c h} \frac{dN_c(x)}{dx}, \quad (40)$$

$$\frac{d^2 u_k(x)}{dx^2} = \frac{1}{E_k b_k t} \frac{dN_k(x)}{dx}, \quad (41)$$

gdzie:

$$\frac{dM_c(x)}{dx} = V(x) - \tau(x) b_k \frac{h}{2} = \frac{P}{2} - \tau(x) b_k \frac{h}{2}, \quad (42)$$

$$\frac{dN_c(x)}{dx} = \tau(x) b_k, \quad (43)$$

$$\frac{dN_k(x)}{dx} = \tau(x) b_k. \quad (44)$$

Po wstawieniu do równania (39) wielkości (40) ÷ (44) i po przekształceniu, otrzymamy:

$$\frac{d^2 \tau(x)}{dx^2} = -\frac{3GP}{sE_c b_c h^2} + \frac{G}{s} \frac{1}{E_k t} \tau(x) + \frac{4Gb_k}{sE_c b_c h} \tau(x),$$

lub

$$\frac{d^2 \tau(x)}{dx^2} - \lambda^2 \tau(x) + \frac{3GP}{sE_c b_c h^2} = 0, \quad (45)$$

gdzie:

$$\lambda^2 = \frac{G}{s} \left(\frac{1}{E_k t} + \frac{4b_k}{E_c b_c h} \right). \quad (46)$$

Całka ogólna równania (45) ma postać:

$$\tau(x) = C_1 \cosh(\lambda x) + C_2 \sinh(\lambda x) + \frac{3GP}{\lambda^2 sE_c b_c h^2}. \quad (47)$$

Pierwsza pochodna po x wynosi:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = C_1 \lambda \sinh(\lambda x) + C_2 \lambda \cosh(\lambda x). \quad (48)$$

Stałe C_1 i C_2 są stałymi całkowania, wyznaczanymi na podstawie warunków brzegowych:

$$\tau(x) = 0 \quad \text{jeżeli} \quad x = l,$$

$$\left. \begin{array}{l} N_{k,x} = N_{c,x} = 0 \\ M_{c,x} = \frac{Pa}{2} \end{array} \right\} \text{ jeżeli } x = 0 .$$

Ponadto uwzględniając równania (36) do (38):

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = -\frac{3GPa}{sE_c b_c h^2} \text{ jeżeli } x = 0 .$$

Obliczone stałe wynoszą:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{3GP}{sE_c b_c h^2} \left(\frac{a}{\lambda} \operatorname{tgh}(\lambda l) - \frac{1}{\lambda^2 \cosh(\lambda l)} \right), \\ C_2 &= -\frac{1}{\lambda} \frac{3GP}{sE_c b_c h^2} . \end{aligned} \quad (49)$$

Konsekwentnie, równanie (47) można zapisać w postaci:

$$\tau(x) = \frac{3GP}{sE_c b_c h^2} \left[\left(\frac{a}{\lambda} \operatorname{tgh}(\lambda l) - \frac{1}{\lambda^2 \cosh(\lambda l)} \right) \cosh(\lambda l) - \frac{a}{\lambda} \sinh(\lambda l) + \frac{1}{\lambda^2} \right]. \quad (50)$$

W przypadku, gdy λl jest większe od 10, równanie (50) można zapisać:

$$\tau(x) = \frac{3GP}{sE_c b_c h^2} \frac{(a\lambda e^{-\lambda x} + 1)}{\lambda^2}. \quad (51)$$

Równanie (51) powinno być używane tylko dla przekrojów blisko końca elementu doklejonego, gdyż błąd spowodowany uproszczeniem jest znaczący dla przekrojów w pobliżu środka belki. Maksymalne naprężenia ścinające występują w pobliżu końca elementu przyklejonego i mogą być obliczane dla $x = 0$, wówczas można równanie (51) zapisać w postaci:

$$\tau_{\max} = \frac{3GP}{sE_c b_c h^2} \frac{(a\lambda + 1)}{\lambda^2}. \quad (52)$$

Następny krok, to wyprowadzenie naprężeń odrywających w skleinie. Posłużono się tu warunkami geometrycznymi, określonymi na rysunku 2.

$$\frac{dM_k(x)}{dx} = V_k(x) - \tau(x) b_k \frac{1}{2}. \quad (53)$$

Biorąc drugą pochodną po x równania (53) otrzymujemy:

$$\frac{d^2 M_k(x)}{dx^2} = \frac{dV_k(x)}{dx} - \frac{d\tau(x)}{dx} b_k \frac{t}{2}, \quad (54)$$

a uwzględniając równanie (6) można zapisać:

$$\frac{d^2 M_k(x)}{dx^2} = \sigma_z(x) b_k - \frac{d\tau(x)}{dx} b_k \frac{t}{2} . \quad (55)$$

Skoro naprężenia odrywające można określić jako:

$$\sigma_z(x) = \frac{E_s}{s} [w_k(x) - w_c(x)] , \quad (56)$$

więc równanie (55) można przedstawić w postaci:

$$\frac{d^2 M_k(x)}{dx^2} = \frac{E_s b_k}{s} [w_k(x) - w_c(x)] - \frac{d\tau(x)}{dx} b_k \frac{t}{2} . \quad (57)$$

Ponieważ:

$$\frac{d^4 w_k}{dx^4} E_k I_k = - \frac{d^2 M_k(x)}{dx^2} , \quad (58)$$

otrzymujemy:

$$\frac{d^4 w_k}{dx^4} E_k I_k = - \frac{E_s b_k}{s} [w_k(x) - w_c(x)] + \frac{d\tau(x)}{dx} b_k \frac{t}{2} , \quad (59)$$

lub:

$$\frac{d^4 w_k}{dx^4} E_k I_k + K w_k(x) = K w_c(x) + \frac{d\tau(x)}{dx} b_k \frac{t}{2} , \quad (60)$$

gdzie:

$$K = \frac{E_s b_k}{s} . \quad (61)$$

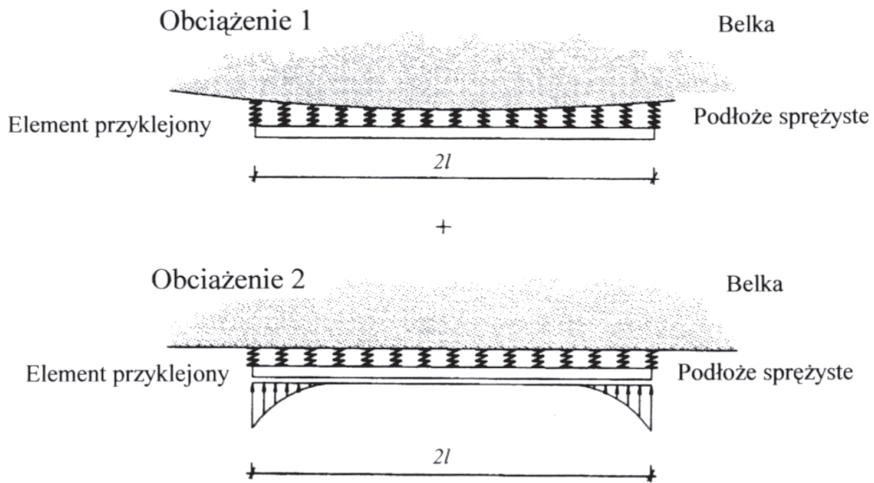
Równanie (60) jest równaniem dla belki na podłożu sprężystym, z dwoma rodzajami działającego obciążenia (rys. 5). Pierwsze obciążenie wynika z odkształcenia belki, zaś drugie od naprężeń ścinających na końcu elementu przyklejonego (w strefie zakotwienia).

Wartość momentu zginającego belkę, obciążoną jak na rysunku 6, wynosi:

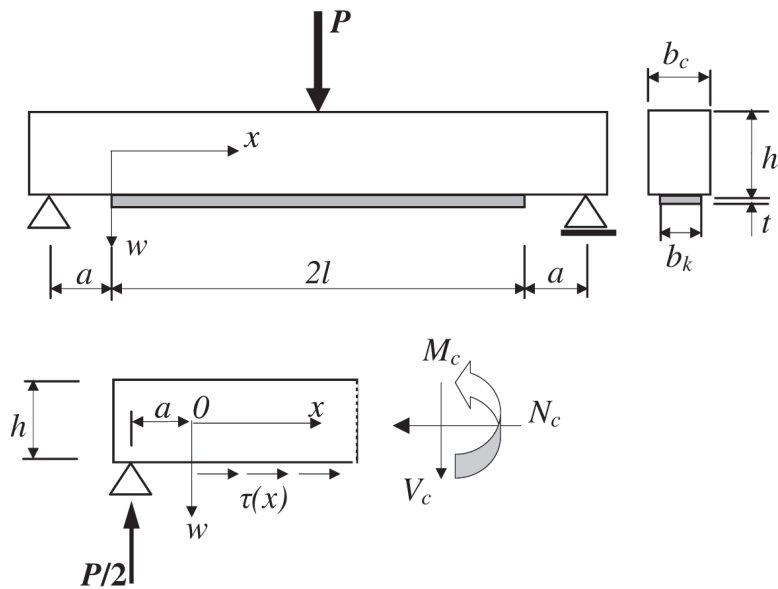
$$\frac{d^2 w_c(x)}{dx^2} E_c I_c = -M_c(x) . \quad (62)$$

Zgodnie z rysunkiem 6 możemy zapisać:

$$M_c(x) = \frac{P}{2}(a+x) - \int_0^x \tau(x) b_k \frac{h}{2} dx . \quad (63)$$



Rys.5. Siły działające na element przyklejany
 Fig.5. Forces acting on the glued plate



Rys.6. Model obliczeniowy i określenie momentu zginającego w belce
 Fig.6. Model for calculation of the bending moment in the beam

Wstawiając równanie (51) do (63) oraz wprowadzając wartości graniczne całki otrzymujemy:

$$M_c(x) = \frac{P}{2}(a+x) - \frac{\eta P}{2} [a(1 - e^{-\lambda x}) + x], \quad (64)$$

gdzie:

$$\eta = \frac{3Gb_k}{sE_c b_c h \lambda^2}. \quad (65)$$

Wstawiając równanie (64) do (62) oraz całkując dwukrotnie po x otrzymujemy:

$$w_c(x) = -\frac{P}{2E_c I_c} \left[\left(\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) (1-\eta) + \frac{\eta a e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right] - \frac{(Ax+B)}{E_c I_c}. \quad (66)$$

Stałe A i B zostaną określone z uwzględnieniem warunków brzegowych:

$$w_c(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = -a,$$

$$\frac{dw_c(x)}{dx} = 0 \quad \text{dla} \quad x = l.$$

$$A = -\frac{P}{2} \left[\left(al + \frac{l^2}{2} \right) (1-\eta) - \frac{\eta a e^{-\lambda l}}{\lambda} \right],$$

$$B = -\frac{P}{2} \left[\left(\frac{a^3}{3} + \frac{al^2}{2} + a^2 l \right) (1-\eta) + \frac{\eta a e^{-\lambda a}}{\lambda^2} - \frac{\eta a^2 e^{-\lambda l}}{\lambda} \right], \quad (67)$$

więc:

$$w_c(x) = \frac{P}{2E_c I_c} \left[\left(\frac{a^3}{3} + \frac{al^2}{2} + a^2 l + alx + \frac{l^2}{2} x - \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) (1-\eta) + \right. \\ \left. - \frac{\eta a e^{-\lambda l}}{\lambda} x + \frac{\eta a e^{\lambda a}}{\lambda^2} - \frac{\eta a^2 e^{-\lambda l}}{\lambda} - \frac{\eta a e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right]. \quad (68)$$

Wykorzystując (51) oraz biorąc pierwszą pochodną po x mamy:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = -\frac{3GPa}{sE_c b_c h^2} e^{-\lambda x}. \quad (69)$$

Wstawiając równania (68) i (69) do (60) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_k}{dx^4} E_k I_k + K w_k(x) = \\ & = \frac{KP}{2E_c I_c} \left[\left(\frac{a^3}{3} + \frac{al^2}{2} + a^2 l + alx + \frac{l^2}{2} x - \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) (1-\eta) + \right. \\ & \left. - \frac{\eta a e^{-\lambda l}}{\lambda} x + \frac{\eta a e^{\lambda a}}{\lambda^2} - \frac{\eta a^2 e^{-\lambda l}}{\lambda} - \frac{\eta a e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right] - \frac{3GP a b_k t}{2sE_c h^2} e^{-\lambda x}. \end{aligned} \quad (70)$$

Jeśli belka jest bardzo długa przy $\beta > 5$, gdzie:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4E_k I_k}}, \quad (71)$$

rozwiązanie równania (70) można zapisać w postaci:

$$w_k(x) = C_1 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{-\beta x} \sin \beta x + w_p(x), \quad (72)$$

gdzie $w_p(x)$ jest szczególnym rozwiązaniem analizowanego równania różniczkowego. Składa się ono z dwóch części, tj. wielomianu i funkcji wykładniczej. W niektórych zadaniach można zapisać:

$$w_{p1}(x) = \frac{P}{2E_c I_c} \left[\left(\frac{a^3}{3} + \frac{al^2}{2} + a^2 l + alx + \frac{l^2}{2} x - \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) (1-\eta) + \right. \\ \left. - \frac{\eta a e^{-\lambda l}}{\lambda} x + \frac{\eta a e^{\lambda a}}{\lambda^2} - \frac{\eta a^2 e^{-\lambda l}}{\lambda} \right], \quad (73)$$

$$w_{p2}(x) = -\frac{P}{2E_c I_c (\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{E_s b_k \eta a}{sE_k I_k \lambda^2} + \frac{Gab_k t h}{4sE_k I_k} \right) e^{-\lambda x}. \quad (74)$$

Można to zapisać łącznie:

$$w_p(x) = w_{p1}(x) + w_{p2}(x). \quad (75)$$

W równaniu (72) niewiadome są dwie stałe, więc potrzebne są do rozwiązania dwa warunki brzegowe. Do uzyskania stałych posłużono się analizą równowagi końca przyklejonego elementu. Jeśli rozpatrujemy mały element dx w sklecinie, to możemy zauważyć, że warunki równowagi na końcu elementu przyklejonego nie są spełnione. Na krawędzi elementu w warunku równowagi występuje siła poprzeczna, która nie musi istnieć w rzeczywistości. W celu spełnienia warunku granicznego potrzebne jest wprowadzenie siły równej, ale o przeciwnym zwrocie. Wartość tej siły może być obliczana z równana (53):

$$T = \frac{dM_{k,x=0}}{dx} = V_{k,x=0} - \tau_{x=0} b_k \frac{t}{2}, \quad (76)$$

które można zapisać w postaci:

$$T = -\frac{3GPb_k t}{2sE_c b_c h^2} \frac{(a\lambda + 1)}{\lambda^2} = -\frac{GPb_k th}{8sE_c I_c} \frac{(a\lambda + 1)}{\lambda^2}. \quad (77)$$

Następujące warunki brzegowe pozwolą rozwiązać problem:

$$\frac{d^2 w_k(0)}{dx^2} = 0, \quad (78)$$

$$\frac{d^3 w_k(0)}{dx^3} = -\frac{1}{E_k I_k} \frac{dM_{k,x=0}}{dx} = -\frac{T}{E_k I_k} = -\frac{GPb_k th}{8sE_c I_c E_k I_k} \frac{(a\lambda + 1)}{\lambda^2}.$$

Druga i trzecia pochodna równania (72) względem x ma postać:

$$\frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} = 2\beta^2 C_1 e^{-\beta x} \sin \beta x - 2\beta^2 C_2 e^{-\beta x} \cos \beta x + \frac{d^2 w_p(x)}{dx^2}, \quad (79)$$

$$\frac{d^3 w_k(x)}{dx^3} = -2\beta^3 C_1 e^{-\beta x} \sin \beta x + 2\beta^3 C_1 e^{-\beta x} \cos \beta x +$$

$$+ 2\beta^3 C_2 e^{-\beta x} \cos \beta x + 2\beta^3 C_2 e^{-\beta x} \sin \beta x + \frac{d^3 w_p(x)}{dx^3}, \quad (80)$$

gdzie:

$$\frac{d^2 w_p(x)}{dx^2} = -\frac{P}{2E_c I_c} \left[(a+x)(1-\eta) + \frac{\lambda^2}{(\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{E_s b_k \eta a}{sE_k I_k \lambda^2} + \frac{Gab_k th}{4sE_k I_k} \right) e^{-\lambda x} \right], \quad (81)$$

$$\frac{d^3 w_p(x)}{dx^3} = -\frac{P}{2E_c I_c} \left[(1-\eta) + \frac{\lambda^3}{(\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{E_s b_k \eta a}{sE_k I_k \lambda^2} + \frac{Gab_k th}{4sE_k I_k} \right) e^{-\lambda x} \right]. \quad (82)$$

Wprowadzając:

$$4\psi^4 = \frac{Gb_k}{sE_k I_k}, \quad (83)$$

stałe równania (72) z uwzględnieniem warunków granicznych (78) mają postać:

$$C_1 = \frac{P}{4E_c I_c} \left[\frac{a\beta + 1}{\beta^3} (1-\eta) + \frac{\beta\lambda^2 - \lambda^3}{\beta^3 (\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{4\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + \psi^4 ath \right) + \frac{\psi^4 th}{\beta^3 \lambda^2} \frac{a\lambda + 1}{\beta^3 \lambda^2} \right], \quad (84)$$

$$C_2 = -\frac{P}{4E_c I_c} \left[\frac{a(1-\eta)}{\beta^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 (\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{4\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + \psi^4 ath \right) \right],$$

więc równanie (72) możemy wyrazić w formie:

$$\begin{aligned}
 w_k(x) = & \frac{P}{4E_c I_c} \left[\frac{a\beta+1}{\beta^3} (1-\eta) + \frac{\beta\lambda^2 - \lambda^3}{\beta^3 (\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{4\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + \psi^4 ath \right) + \right. \\
 & \left. + \psi^4 th \frac{a\lambda+1}{\beta^3 \lambda^2} \right] e^{-\beta x} \cos \beta x + \\
 & - \frac{P}{4E_c I_c} \left[\frac{a(1-\eta)}{\beta^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 (\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{4\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + \psi^4 ath \right) \right] e^{-\beta x} \sin \beta x + \\
 & + \frac{P}{2E_c I_c} \left[\left(\frac{a^3}{3} + \frac{al^2}{2} + a^2 l + alx + \frac{l^2}{2} x - \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) (1-\eta) + \right. \\
 & \left. - \frac{\eta a e^{-\lambda l}}{\lambda} x + \frac{\eta a e^{\lambda a}}{\lambda^2} - \frac{\eta a^2 e^{-\lambda l}}{\lambda} + \right. \\
 & \left. - \left(\frac{1}{(\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{4\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + \psi^4 ath \right) \right) e^{-\lambda x} \right],
 \end{aligned} \tag{85}$$

a biorąc pod uwagę (24) i (56) z równaniem (68) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \sigma_z(x) = & \frac{E_s P}{4sE_c I_c} \left\{ \left[\frac{a\beta+1}{\beta^3} (1-\eta) + \frac{\beta\lambda^2 - \lambda^3}{\beta^3 (\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{4\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + \psi^4 ath \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \psi^4 th \frac{a\lambda+1}{\beta^3 \lambda^2} \right] e^{-\beta x} \cos \beta x + \right. \\
 & \left[\frac{a(1-\eta)}{\beta^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 (\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{4\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + \psi^4 ath \right) \right] e^{-\beta x} \sin \beta x + \\
 & \left. - \left[\frac{1}{(\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{8\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + 2\psi^4 ath \right) - \frac{2\eta a}{\lambda^2} \right] e^{-\lambda x} \right\}.
 \end{aligned} \tag{86}$$

Naprężenia odrywające w skleinie uzyskują swoje maksymalne wartości tuż przy końcu elementu przyklejonego. Dla $x=0$ równanie (86) ma postać:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\max} = & \frac{E_s P}{4sE_c I_c} \left\{ \left[\frac{a\beta+1}{\beta^3} (1-\eta) + \frac{\beta\lambda^2 - \lambda^3}{\beta^3 (\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{4\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + \psi^4 ath \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \psi^4 th \frac{a\lambda+1}{\beta^3 \lambda^2} \right] + \right. \\
 & \left. - \left[\frac{1}{(\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{8\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + 2\psi^4 ath \right) - \frac{2\eta a}{\lambda^2} \right] e^{-\lambda x} \right\}.
 \end{aligned} \tag{87}$$

Jednakże, pomijając małe wyższego rzędu, dla obliczania naprężeń odrywających w warstwie klejowej równanie (86) można przedstawić w prostszej postaci:

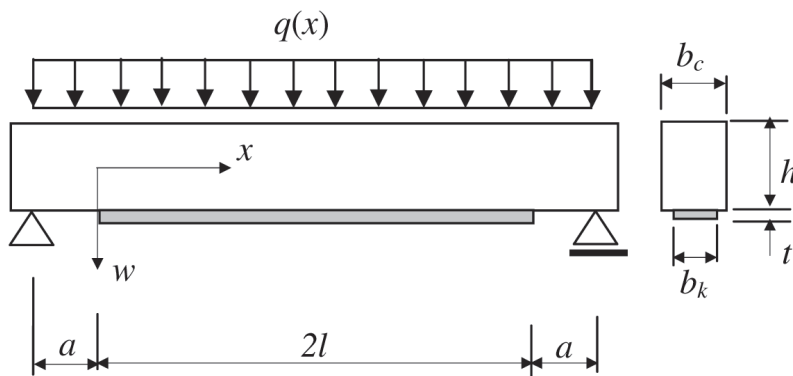
$$\sigma_z(x) = \frac{E_s P}{4sE_c I_c} \left\{ \begin{aligned} &\psi^4 th \frac{a\lambda + 1}{\beta^3 \lambda^2} e^{-\beta x} + \\ &\left[\frac{1}{(\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{8\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + 2\psi^4 ath \right) - \frac{2\eta a}{\lambda^2} \right] e^{-\lambda x} \end{aligned} \right\}. \quad (88)$$

Jeżeli interesuje nas poznanie jedynie maksymalnych wartości naprężeń odrywających przy końcu elementu doklejonego, równanie (88) można jeszcze bardziej uprościć, przedstawiając zależność:

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{E_s P}{4sE_c I_c} \left\{ \psi^4 th \frac{a\lambda + 1}{\beta^3 \lambda^2} - \left[\frac{1}{(\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(\frac{8\beta^4 \eta a}{\lambda^2} + 2\psi^4 ath \right) - \frac{2\eta a}{\lambda^2} \right] \right\}. \quad (89)$$

4. PRZYPADEK BELKI OBCIĄŻONEJ RÓWNOMIERNIE

Następny krok analizy teoretycznej polega na wyprowadzeniu odpowiednich równań dla naprężeń ścinających i odrywających (rozwarstwiających) działających w skleinie dla belki pod równomiernie rozłożonym obciążeniem q (rys. 7). Przeprowadza się ten sam tok myślowy, co przy rozważaniu belki obciążonej siłą skupioną P . Założono również identyczny rozkład sił wewnętrznych.



Rys.7. Belka betonowa wzmocniona przyklejonym elementem i obciążona równomiernie obciążeniem q

Fig.7. Beam strengthened with a plate glued loaded with a distributed load q

Uwzględniając obciążenie zewnętrzne, równania (42) do (44) zapisać można w postaci:

$$\frac{dM_c(x)}{dx} = V(x) - \tau(x)b_k \frac{h}{2} = q(l-x) - \tau(x)b_k \frac{h}{2}, \quad (90)$$

$$\frac{dN_c(x)}{dx} = \tau(x)b_k, \quad (91)$$

$$\frac{dN_k(x)}{dx} = \tau(x)b_k. \quad (92)$$

Odpowiednik równania (45) przyjmuje wygląd:

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - \lambda^2\tau(x) + \frac{6Gq(l-x)}{sE_c b_c h^2} = 0, \quad (93)$$

gdzie:

$$\lambda^2 = \frac{G}{s} \left(\frac{1}{E_k t} + \frac{4b_k}{E_c b_c h} \right). \quad (94)$$

Całka ogólna równania (93) wygląda następująco:

$$\tau(x) = C_1 \cosh(\lambda x) + C_2 \sinh(\lambda x) + \frac{6Gq(l-x)}{\lambda^2 s E_c b_c h^2}. \quad (95)$$

Pierwsza pochodna po x wynosi:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = C_1 \lambda \sinh(\lambda x) + C_2 \lambda \cosh(\lambda x) - \frac{6Gq}{\lambda^2 s E_c b_c h^2}. \quad (96)$$

Odpowiednie warunki brzegowe można sformułować w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \tau(x) &= 0 && \text{jeżeli } x = l, \\ \left. \begin{aligned} N_{k,x} &= N_{b,x} = 0 \\ M_{c,x} &= \frac{q}{2}(a^2 + 2al) \end{aligned} \right\} && \text{jeżeli } x = 0. \end{aligned}$$

Uwzględniając (36) do (38) oraz warunki brzegowe, dla $x = 0$ otrzymujemy:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = -\frac{3Gq(a^2 + 2al)}{sE_c b_c h^2},$$

co pozwala określić stałe C_1 i C_2 :

$$C_1 = \frac{3Gq}{sE_c b_c h^2} \left(\frac{a^2 + 2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} \right) \operatorname{tgh}(\lambda l), \quad C_2 = \frac{3Gq}{sE_c b_c h^2} \left(\frac{a^2 + 2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} \right) \quad (97)$$

i w konsekwencji równanie (95) można zapisać w postaci:

$$\tau(x) = \frac{3Gq}{sE_c b_c h^2} \left\{ \left(\frac{a^2 + 2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} \right) [\operatorname{tgh}(\lambda l) \cosh(\lambda x) - \sinh(\lambda x)] + \frac{2(l-x)}{\lambda^2} \right\}. \quad (98)$$

W przypadku, kiedy λl ma dużą wartość > 10 , równanie (98) można zapisać:

$$\tau(x) = \frac{3Gq}{sE_c b_c h^2} \left[\left(\frac{a^2 + 2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} \right) e^{-\lambda x} + \frac{2(l-x)}{\lambda^2} \right]. \quad (99)$$

Maksymalne naprężenia ścinające wystąpią przy końcu elementu przyklejanego, więc dla $x = 0$ i wówczas równanie (98) można zapisać w postaci:

$$\tau_{\max} = \frac{3Gq}{sE_c b_c h^2} \left[\frac{a^2 + 2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{2(l-x)}{\lambda^2} \right]. \quad (100)$$

W celu wyprowadzenia równania na naprężenia odrywające w skleinie, analizę należy rozpocząć od równania (60) i (56)

$$\frac{d^4 w_k}{dx^4} E_k I_k + K w_k(x) = K w_c(x) + \frac{d\tau(x)}{dx} b_k \frac{t}{2}, \quad (101)$$

$$\frac{d^2 w_c}{dx^2} E_c I_c = -M_c(x). \quad (102)$$

Równanie momentu zginającego można przedstawić w postaci:

$$M_c(x) = q(a+l)(a+x) - q \frac{(a+x)^2}{2} - \int_0^x \tau(x) b_c \frac{h}{2} dx. \quad (103)$$

Wstawiając równanie (99) do (103) oraz wprowadzając wartości graniczne całki otrzymujemy:

$$M_c(x) = q \left(\frac{a^2}{2} + al + lx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{\eta q}{2} \left[\left(\frac{a^2 + 2al}{\lambda^2} \right) (l - e^{-\lambda x}) + 2lx - x^2 \right], \quad (104)$$

gdzie:

$$\eta = \frac{3Gb_k}{aE_c b_c h \lambda^2}. \quad (105)$$

Wstawiając równanie (104) do (102) oraz całkując dwukrotnie po x otrzymujemy:

$$w_c(x) = -\frac{q}{E_c I_c} \left(\frac{a^2 x^2}{4} + \frac{alx^2}{2} + \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{24} \right) + \frac{\eta q}{2} \left[\left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right) + \frac{lx^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right] - \frac{(Ax+B)}{E_c I_c}. \quad (106)$$

Stałe A i B zostaną określone po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$w_c(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = -a,$$

$$\frac{dw_c(x)}{dx} = 0 \quad \text{dla} \quad x = l,$$

$$A = -q \left(\frac{a^2 l}{2} + al^2 + \frac{l^3}{3} \right) + \frac{\eta q}{2} \left[\left(a^2 l + 2al^2 + \frac{2l^3}{3} - \frac{2l}{\lambda^2} \right) + \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \frac{e^{-\lambda l}}{\lambda} \right],$$

$$B = -q \left(\frac{5a^4}{24} + \frac{5a^3 l}{6} + a^2 l^2 + \frac{al^3}{3} \right) + \frac{\eta q}{2} \left[\left(\frac{5a^4}{12} + \frac{5a^3 l}{3} + 2a^2 l^2 + \frac{2al^3}{3} - \frac{a^2}{\lambda^2} - \frac{2al}{\lambda^2} \right) + \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{e^{-\lambda l}}{\lambda} - \frac{e^{\lambda a}}{\lambda^2} \right) \right], \quad (107)$$

co pozwala napisać:

$$w_c(x) = \frac{q}{E_c I_c} \left[\left(\frac{5a^4}{24} + \frac{5a^3 l}{6} + a^2 l^2 + \frac{al^3}{3} + \frac{a^2 lx}{2} + al^2 x + \frac{l^3 x}{3} - \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{alx^2}{2} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) (1 - \eta) + \frac{\eta}{\lambda^2} (a^2 + 2al - x^2 + 2lx) + \eta \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{ae^{-\lambda l}}{\lambda} - \frac{e^{\lambda a}}{\lambda^2} + \frac{e^{-\lambda l}}{\lambda} x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (108)$$

Pierwsza pochodna po x równania (99) wynosi:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = -\frac{3Gq}{sE_c b_c h^2} \left[\left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda^2} \right]. \quad (109)$$

Wstawiając równanie (108) i (109) do (101) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_k}{dx^4} + \frac{K}{E_k I_k} w_k(x) = \\ & \left[\left(\frac{5a^4}{24} + \frac{5a^3 l}{6} + a^2 l^2 + \frac{al^3}{3} + \frac{a^2 lx}{2} + al^2 x + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{l^3 x}{3} - \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{alx^2}{2} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) (1-\eta) + \right. \\ & \left. + \frac{K}{E_k I_k} \frac{q}{E_c I_c} + \frac{\eta}{\lambda^2} (a^2 + 2al - x^2 + 2lx) + \right. \\ & \left. - \eta \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{ae^{-\lambda l}}{\lambda} - \frac{e^{\lambda a}}{\lambda^2} + \frac{e^{-\lambda l}}{\lambda} x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right) \right] + \\ & - \frac{3Gqb_k t}{2E_k I_k sE_c b_c h^2} \left[\left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda^2} \right]. \quad (110) \end{aligned}$$

Jeżeli belka jest bardzo długa, przy $\beta > 5$, gdzie:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4E_k I_k}}, \quad (111)$$

równanie (110) można zapisać w postaci:

$$w_k(x) = C_1 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{-\beta x} \sin \beta x + w_p(x), \quad (112)$$

gdzie $w_p(x)$ jest całką szczególną analizowanego równania różniczkowego. Składa się ona z dwóch części, tj. wielomianu i funkcji wykładniczej. W naszym przypadku można zapisać:

$$w_{p1}(x) = \frac{q}{E_c I_c} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{5a^4}{24} + \frac{5a^3 l}{6} + a^2 l^2 + \frac{al^3}{3} + \frac{a^2 lx}{2} + al^2 x + \right. \\ & \left. + \frac{l^3 x}{3} - \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{alx^2}{2} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) (1-\eta) + \\ & + \frac{\eta}{\lambda^2} (a^2 + 2al - x^2 + 2lx) + \\ & - \eta \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{ae^{-\lambda l}}{\lambda} - \frac{e^{\lambda a}}{\lambda^2} + \frac{e^{-\lambda l}}{\lambda} x \right) \end{aligned} \right] + \\ - \frac{q}{E_c I_c} \frac{Gb_k th}{16\beta^4 s E_k I_k \lambda^2} - \frac{q}{E_c I_c} \frac{1-\eta}{4\beta^4}, \quad (113)$$

$$w_{p2}(x) = -\frac{q}{E_k I_k} \frac{1}{(\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{4\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{Gb_k th}{8s E_k I_k} \right) e^{-\lambda x}. \quad (114)$$

Całka szczególna analizowanego równania wynosi:

$$w_p(x) = w_{p1}(x) + w_{p2}(x). \quad (115)$$

Równanie (112) zawiera dwie nieznanne stałe. W tym przypadku możemy postąpić podobnie, jak z rozwiązaniem belki obciążonej pojedynczą siłą skupioną i zakłócić na końcu przyklejonego elementu fikcyjną siłę, która może być obliczona z równania (53) i określona jako:

$$T = \frac{dM_{k,x=0}}{dx} = V_{k,x=0} - \tau_{x=0} b_k \frac{t}{2}, \quad (116)$$

$$T = -\frac{3Gb_k tq}{2s E_c b_c h^2} \left(\frac{a^2 + 2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{2l}{\lambda^2} \right). \quad (117)$$

Następujące warunki brzegowe pozwolą rozwiązać problem:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^2 w_k(0)}{dx^2} = 0, \\ & \frac{d^3 w_k(0)}{dx^3} = -\frac{1}{E_k I_k} \frac{dM_{k,x=0}}{dx} = -\frac{T}{E_k I_k} = \frac{Gb_k thq}{8s E_c I_c E_k I_k} \left(\frac{a^2 + 2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{2l}{\lambda^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Druga i trzecia pochodna równania (112) względem x ma postać:

$$\frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} = 2\beta^2 C_1 e^{-\beta x} \sin \beta x - 2\beta^2 C_2 e^{-\beta x} \cos \beta x + \frac{d^2 w_p(x)}{dx^2}, \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w_k(x)}{dx^3} = & -2\beta^3 C_1 e^{-\beta x} \sin \beta x + 2\beta^3 C_1 e^{-\beta x} \cos \beta x + \\ & + 2\beta^3 C_2 e^{-\beta x} \cos \beta x + 2\beta^3 C_2 e^{-\beta x} \sin \beta x + \frac{d^3 w_p(x)}{dx^3}, \end{aligned} \quad (120)$$

gdzie:

$$\frac{d^2 w_p(x)}{dx^2} = \frac{q}{E_c I_c} \left[\left((a+l)x - \frac{x^2}{2} \right) (1-\eta) + \right. \\ \left. - \frac{\lambda^2}{\lambda^4 + 4\beta^4} \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{4\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\psi^4 th}{4} \right) e^{-\lambda x} \right], \quad (121)$$

$$\frac{d^3 w_p(x)}{dx^3} = \frac{q}{E_c I_c} \left[(a+l-x)(1-\eta) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda^3}{\lambda^4 + 4\beta^4} \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{4\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\psi^4 th}{2} \right) e^{-\lambda x} \right], \quad (122)$$

przyjmując:

$$4\psi^4 = \frac{Gb_k}{sE_k I_k}. \quad (123)$$

Rozwiązanie równania (112) z uwzględnieniem warunków brzegowych (118) daje:

$$C_1 = \frac{q}{E_c I_c} \left[\frac{a+l}{2\beta^3} (1-\eta) + \frac{\psi^4 th}{4\beta^3} \left(\frac{a^2 + 2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\lambda^2}{\beta^2} - \frac{\lambda^3}{\beta^3} \right) \frac{1}{\lambda^4 + 4\beta^4} \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{2\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\psi^4 th}{4} \right) \right], \quad (124)$$

$$C_2 = \frac{q}{E_c I_c} \left[\frac{\lambda^2}{\beta^2 (\lambda^4 + 4\beta^4)} \left(a^2 + 2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{2\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\psi^4 th}{4} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
w_k(x) = & \frac{q}{E_c I_c} \left[\frac{a+l}{2\beta^3} (1-\eta) + \frac{\Psi^4 th}{4\beta^3} \left(\frac{a^2+2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^2} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\lambda^2}{\beta^2} - \frac{\lambda^3}{\beta^3} \right) \frac{1}{\lambda^4+4\beta^4} \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{2\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\Psi^4 th}{4} \right) \right] \cdot e^{-\beta x} \cos \beta x + \\
& - \frac{q}{E_c I_c} \left[\frac{\lambda^2}{\beta^2(\lambda^4+4\beta^4)} \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{2\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\Psi^4 th}{4} \right) \right] e^{-\beta x} \sin \beta x + \\
& \left[\begin{aligned} & 2 \left(\frac{5a^4}{24} + \frac{5a^3 l}{6} + a^2 l^2 + \frac{al^3}{3} + \frac{a^2 l x}{2} + al^2 x + \right. \\ & \left. + \frac{l^3 x}{3} - \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{alx^2}{2} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) (1-\eta) + \end{aligned} \right. \\
& \left. + \frac{q}{E_c I_c} \left[\frac{\eta}{\lambda^2} (a^2+2al-x^2+2lx) + \right. \right. \\
& \left. \left. - \eta \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{ae^{-\lambda l}}{\lambda} - \frac{e^{\lambda a}}{\lambda^2} + \frac{e^{-\lambda l}}{\lambda} x \right) \right] \right] + \\
& - \frac{q}{E_c I_c} \frac{\Psi^4 th}{4\beta^4 \lambda^2} - \frac{q}{E_c I_c} \frac{1-\eta}{4\beta^4} + \frac{q}{E_c I_c} \frac{1}{\lambda^4+4\beta^4} \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{4\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\Psi^4 th}{2} \right) e^{-\lambda x}.
\end{aligned} \tag{125}$$

Uwzględniając równanie (108) i (56) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\sigma_z(x) = & \frac{E_s q}{sE_c I_c} \left\{ \left[\begin{aligned} & \frac{a+l}{2\beta^3} (1-\eta) + \\ & + \frac{\Psi^4 th}{4\beta^3} \left(\frac{a^2+2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^2} \right) + \\ & + \left(\frac{\lambda^2}{\beta^2} - \frac{\lambda^3}{\beta^3} \right) \frac{1}{\lambda^4+4\beta^4} \cdot \end{aligned} \right] e^{-\beta x} \cos \beta x + \right. \\
& \left[\begin{aligned} & \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{2\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\Psi^4 th}{4} \right) \\ & \left. \frac{\lambda^2}{\beta^2(\lambda^4+4\beta^4)} \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \cdot \right] e^{-\beta x} \sin \beta x + \\
& \left[\begin{aligned} & \left(\frac{2\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\Psi^4 th}{4} \right) \\ & - \frac{\Psi^4 th}{4\beta^4 \lambda^2} - \frac{1-\eta}{4\beta^4} - \frac{1}{\lambda^4+4\beta^4} \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \cdot \end{aligned} \right] \\
& \left. \left[\begin{aligned} & \left(\frac{4\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\Psi^4 th}{2} \right) e^{-\lambda x} + \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \frac{\eta}{\lambda^2} \end{aligned} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{126}$$

Naprężenia odrywające w skleinie uzyskują swoje maksymalne wartości tuż przy końcu elementu przyklejonego. Dla $x=0$ równanie (126) ma postać:

$$\sigma_{\max} = \frac{E_s q}{sE_c I_c} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{a+l}{2\beta^3} (1-\eta) + \frac{\psi^4 th}{4\beta^3} \left(\frac{a^2+2al}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\lambda^2}{\beta^2} - \frac{\lambda^3}{\beta^3} \right) \frac{1}{\lambda^4+4\beta^4} \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{2\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\psi^4 th^4}{4} \right) \right] + \\ - \frac{\psi^4 th}{4\beta^4 \lambda^2} - \frac{1-\eta}{4\beta^4} - \frac{1}{\lambda^4+4\beta^4} \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \cdot \\ \cdot \left(\frac{4\beta^4 \eta}{\lambda^2} + \frac{\psi^4 th}{2} \right) + \left(a^2+2al - \frac{2}{\lambda^2} \right) \frac{\eta}{\lambda^2} \end{array} \right\}. \quad (127)$$

5. PODSUMOWANIE

Przedstawione w artykule rozważania stanowią w zakresie liniowo sprężystym ściśle rozwiązanie stanu przemieszczenia i naprężenia w płaszczyźnie skleiny konstrukcji wzmacnianej przez doklejanie dodatkowego elementu stalowego lub kompozytowego. Rozważania te dają możliwość rozpoznania poziomu sił wewnętrznych działających w zespoleniu, zwłaszcza na końcach doklejonych elementów. Są one niezwykle przydatne dla określania skutków wywołanych różnymi czynnikami, a w szczególności zróżnicowaną rozszerzalnością cieplną materiałów kompozytowych i betonu lub stali oraz grubością skleiny.

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Rybak M.*: Wybrane zagadnienia połączeń klejowych. Prace COBiRTD, 1/1973
- [2] *Theillout J.N.*: Repair and strengthening of bridges by means of bonded steel plates. LCPC, Paris 1983
- [3] *Roberts T. M.*: Approximate analysis of shear and normal stress concentrations in the adhesive layer of plated RC beams. The Structural Engineer, **67**, 12/1989
- [4] *Wei A., Saadatmanesh H., Eshani R.M.*: RC beams strengthen with GFRP plates, II: analysis and parametric study. Journal of Structural Engineering, **117**, 11/1991
- [5] *Hamoush S.A.*: Fracturing model for concrete beams strengthened by externally bonded steel plates. North Carolina State University, 1988

WYKAZ PODSTAWOWYCH OZNACZEŃ

Indeksy:

- c – dotyczy betonu,
- k – dotyczy elementu doklejonego.

Wielkie litery łacińskie:

- A – pole przekroju poprzecznego,
- E – moduł Younga,
- G – moduł Kirchhoff'a,
- I – moment bezwładności,
- L – rozpiętość,
- M – moment zginający,
- N – siła podłużna,
- P – siła skupiona,
- T – siła poprzeczna na krawędzi elementu spełniająca warunek równowagi,
- V – siła poprzeczna,
- W – wskaźnik wytrzymałości,

Małe litery łacińskie:

- a – odległość,
- b – szerokość,
- h – wysokość,
- l – długość,
- s – grubość skleiny,
- q – intensywność obciążenia,
- t – grubość,
- u – przemieszczenie w kierunku osi x ,
- w – przemieszczenie w kierunku osi y ,

Małe litery greckie:

- ε – odkształcenia,
- τ – naprężenia ścinające,
- σ – naprężenia normalne,
- x – zmienna niezależna wzdłuż osi x

SHEAR AND PEELING STRESSES IN ADHESIVE JOINTS

Abstract

This paper discusses elastic analysis of the shear and peeling stresses. The method to strengthen a structure with steel plates glued to it has been used in Poland since the mid 60's. However, the theory behind the strengthening methods has not been given much interest and most efforts have been invested in the experimental tests. However, since the mid 80's different theories have been proposed and methods to calculate forces and stresses in the adhesive layer have been presented. The theories have so far mostly dealt with linear elastic conditions, but also some theories regarding non elastic conditions and fracture mechanics have been presented. They can be used for the strengthening of concrete structures. In this paper the differential equations describing stresses in the adhesive layer are presented. This is done both for a beam under a single transverse load or distributed load and strengthened in bending with a single epoxy glued plate.