



CZESŁAW MACHELSKI¹⁾
ROBERT TOCZKIEWICZ²⁾

EFEKTY REOLOGICZNE W BELKACH ZESPOLONYCH Z DWUWARSTWOWĄ PŁYTĄ POMOSTOWĄ

STRESZCZENIE. Praca dotyczy przęseł mostów utworzonych z belek stalowych, zespolonych z płytą betonową, stanowiącą szalunek właściwej płyty pomostowej. Tematyka obejmuje również modernizowane mosty z betonowych belek prefabrykowanych, wzmacniane wtórną płytą pomostową. W pracy poddano analizie efekty powstałe w wyniku zmian cech fizycznych betonu i zespolenia betonowej, dwuwarstwowej płyty pomostowej z belką w dźwigarze mostowym. Dla takiego układu zespolonego przedstawiono rozwiązanie, w którym globalne, wypadkowe siły przekrojowe rozdziela się na składowe przyłożone do elementów tworzących dźwigar: belki, płyty pierwotnej i płyty wtórnej. Analizuje się wpływ skurczu i pełzania betonu na siły wewnętrzne i ugięcia w dźwigarze zespolonym. Procesy reologiczne ujęto w modelu zmodyfikowanego modułu sprężystości H. Trosta. Na przykładach liczbowych określono znaczenie pełzania betonu w stalowych mostach zespolonych oraz efekty skurczu betonu w szczególności w belkach wieloprzęsłowych i uciąganych.

1. KSZTAŁTOWANIE PRZĘSEŁ

Do realizacji wiaduktów nad przeszkodami komunikacyjnymi wykorzystuje się obecnie coraz częściej dźwigary w postaci belki stalowej z utworzoną wcześniej, zespoloną z nią płytą betonową, jak na rys. 1a. Stanowi ona szalunek właściwej płyty

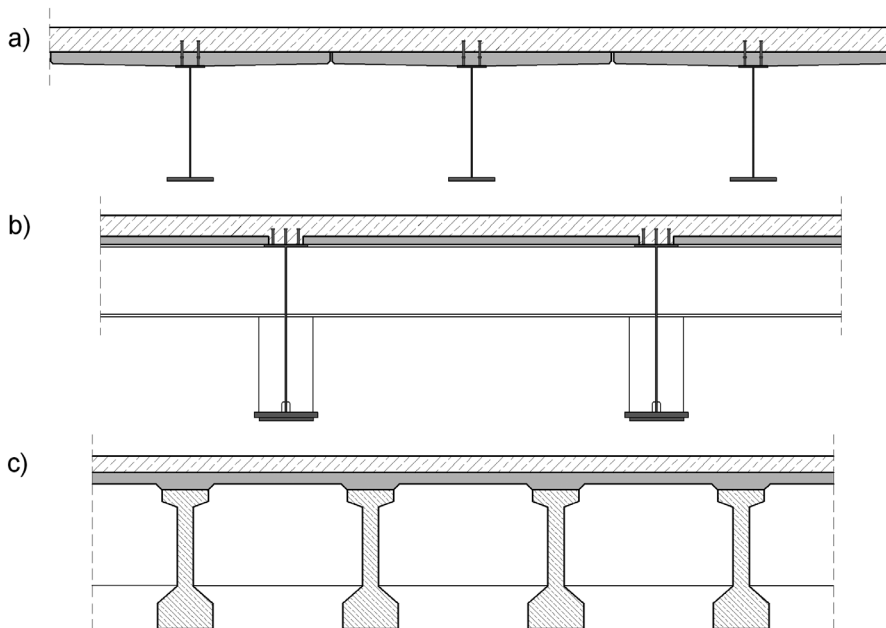
¹⁾ dr hab. inż. – profesor na Wydziale Inżynierii Lądowej i Środowiska Uniwersytetu Zielonogórskiego

²⁾ mgr inż. – Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej

pomostowej, a z powodu połączenia obydwu betonów jest również elementem dźwigara zespolonego (tzw. deskowanie aktywne), jak w dźwigarach VFT [1, 2] przedstawionych na rys. 2. Mamy więc do czynienia z belką stalową, zespoloną z dwoma warstwami, wykonanymi z różnych betonów, w których procesy reologiczne przebiegają w fazach wzajemnie przesuniętych.

Dźwigary wielokrotnie zespolone wykorzystuje się również do tworzenia przęseł mostów zespolonych, do budowy których stosuje się prefabrykowane płyty żelbetowe [3], np. typu filigran, jak na rys. 1b. W tym jednak przypadku występuje jedynie zespolenie płyty pierwotnej (filigran) z wtórną (monolityczną płytą pomostową). Nie korzysta się z połączenia elementów prefabrykowanych z belkami stalowymi, jak na rys. 3. Traktuje się je jako deskowanie tracone, faktycznie będące również elementem dźwigara, współpracującym ze stalową belką poprzez płytę wtórną. Obydwie koncepcje konstrukcyjne szczególnie chętnie stosowane są w przypadku realizacji obiektów w trudno dostępnym terenie. Dzięki ich stosowaniu możliwe jest znaczne przyspieszenie prac przy budowie lub przebudowie [4] obiektów mostowych. Rozwiązania te cechuje efektywność ekonomiczna, wynikająca ze skrócenia czasu prac budowlanych (szybkość montażu) i eliminacji lub minimalizowania utrudnień w ruchu (wiadukty nad czynnymi trasami drogowymi i kolejowymi).

W przypadku modernizacji mostów z belek prefabrykowanych [5] często wykonuje się dodatkową płytę pomostową. Jeśli w założeniach projektowych był to most zespolony, również mamy do czynienia z zespoleniem wtórnym, jak na rys. 1c.



Rys.1. Przekroje poprzeczne dźwigarów zespolonych
Fig.1. Cross-sections of composite girders

Nowym typem dźwigarów, w których dokonuje się podwójnego zespolenia, są elementy w postaci rur wypełnionych betonem (przy założeniu jego współpracy z płaszczem stalowym), połączonych z żelbetową płytą pomostową [6].



Rys.2. Budowa wiaduktu z dźwigarów VFT
Fig.2. Construction of a viaduct made of VFT girders



Rys.3. Żelbetowe płyty prefabrykowane ułożone na belkach stalowych mostu zespolonego
Fig.3. Precast reinforced concrete panels placed on steel beams of a composite bridge

Obliczanie naprężeń w dźwigarze zespolonym jest procesem złożonym z uwagi na konieczność uwzględnienia:

- wpływu czynników reologicznych powodujących redystrybucję odkształceń i naprężeń wywołanych działaniem obciążeń długotrwałych,
- zmiany modułu sprężystości betonów w czasie,
- wpływu stanów montażowych, a w szczególności zmian podparcia konstrukcji przed i po zespoleniu.

Z podanych wyżej względów nie można sumować globalnych sił przekrojowych (M , N , T) w dźwigarze zespolonym. Dla celów projektowych i analiz studialnych przyjmuje się jako dopuszczalne [5], [7 - 10] dodawanie skutków działania poszczególnych obciążeń oraz oddziaływań w elementach składowych dźwigara. Zakłada się zatem, że rozwiązanie jest liniowe.

2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI SIŁ WEWNĘTRZNYCH

Do modelowania procesów reologicznych w dźwigarze zespolonym stosuje się zwykle następujące założenia ogólne [7, 10]:

- odkształcenia od grup obciążeń i oddziaływań są wzajemnie niezależne,
- zachowana jest zasada płaskich przekrojów Bernoulliego,
- występuje skuteczne zespolenie (brak poślizgu w styku elementów przekroju),
- płyta pomostowa jest niezarysowana.

W rozważaniach przyjęto pełne zespolenie betonów płyty i belki. W mostach stalowych, w szczególności gdy stosowane są łączniki podatne, założenie to może mieć ograniczone zastosowanie [7 - 9], [11 - 14]. W przypadku podatnego zespolenia belki i płyty związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami komplikuje funkcja podatności zespolenia [9, 11]. Uniemożliwia to realizację analizy parametrycznej uzyskanej z ogólnego ujęcia rozwiązania.

Założenie o braku zarysowania płyty pomostowej upraszcza rozwiązanie, ale może budzić uzasadnione wątpliwości, szczególnie gdy schemat dźwigara jest ciągły (wieloprzęsłowy). Dla uniknięcia tego efektu stosuje się w mostach: sprężenie płyty pomostowej (również sprężenie belek stalowych z wykorzystaniem tzw. sił wzbudzonych), podniesienie montażowe belki stalowej lub zwiększenie (w strefie podpór pośrednich) zbrojenia [10]. Takie zabiegi, zrealizowane na obiektach badanych pod obciążeniem eksploatacyjnym, wskazują na techniczną poprawność tego założenia np. [12]. W sytuacji braku tych zabezpieczeń, a szczególnie gdy obciążenia przekraczają wartości użytkowe, występuje redukcja sztywności dźwigara spowodowana zarysowaniem płyty pomostowej [8].

Przemieszczenia, naprężenia oraz siły wewnętrzne (momenty zginające i siły osiowe) są określone w funkcji czasu działania obciążenia stałego na konstrukcję, jako:

- doraźne, w chwili wystąpienia obciążenia ($t = 0$),

- długotrwałe (ostateczne, końcowe), gdy procesy reologiczne uległy ustabilizowaniu ($t = \infty$).

Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego odnosi się do trzech środków ciężkości: płyty pomostowej wtórnej i pierwotnej oraz belki prefabrykowanej. Jako niezależne traktuje się charakterystyki elementów przekroju zespolonego dźwigara: pola powierzchni przekroju (A_w , A_p i A_b), momenty bezwładności (I_w , I_p i I_b). Położenie środków ciężkości tych elementów, jak na rys. 4, określają wymiary pionowe: dla belki (v_g i v_d), płyty pierwotnej (y_g i y_d) i wtórnej (r_g i r_d). W ogólnym przypadku dogodnie jest również rozdzielenie wypadkowych sił przekrojowych M , N , T , podanych na rys. 4, na trzy układy działające na płytę (pierwotną i wtórną) oraz belkę (wykres ϵ podano dla $N = 0$). Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego dźwigara oblicza się na podstawie parametrów elementów składowych przekroju zespolonego z uwzględnieniem położenia ich środków ciężkości.

Siły wewnętrzne odniesione do elementów składowych przekroju poprzecznego są statycznie równoważne siłom M i N , spełniają bowiem warunki równowagi statycznej:

- sumy rzutów sił na oś poziomą

$$N_b - N_p - N_w = N, \quad (1)$$

- sumy momentów względem środka ciężkości przekroju zespolonego O

$$M_b + N_b \cdot a_d + M_p + N_p \cdot a_g + M_w + N_w (a_g + c) = M. \quad (2)$$

Z warunku zgodności odkształceń jednostkowych w styku belki i płyty (dla obciążeń doraźnych), powstałych od sił osiowych i momentów zginających w płycie pierwotnej i belce, jak na rys. 4, otrzymuje się równanie

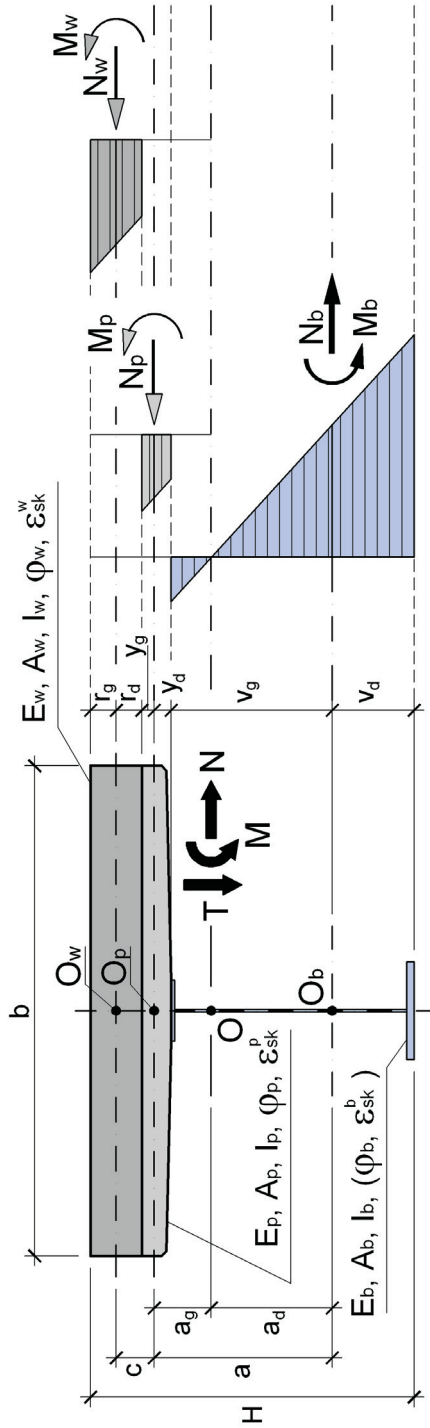
$$\frac{N_b}{E_b A_b} - \frac{M_b v_g}{E_b I_b} = -\frac{N_p}{E_p A_p} + \frac{M_p y_d}{E_p I_p}. \quad (3)$$

W przypadku styku płyty pierwotnej z wtórną równanie (3) sprowadza się do podobnej postaci

$$-\frac{N_p}{E_p A_p} - \frac{M_p y_g}{E_p I_p} = -\frac{N_w}{E_w A_w} + \frac{M_w r_d}{E_w I_w}. \quad (4)$$

Warunek zgodności krzywizn zginanego dźwigara, od obciążenia doraźnego, można przedstawić w postaci

$$\frac{M_b}{E_b I_b} = \frac{M_p}{E_p I_p} = \frac{M_w}{E_w I_w}. \quad (5)$$



Rys.4. Siły wewnętrzne i odkształcenia jednostkowe w przekroju poprzecznym dźwigara zespolonego
 Fig.4. Internal forces and strains in a cross-section of a composite girder

3. EFEKTY REOLOGICZNE W DŹWIGARZE ZESPOLONYM

Do obliczeń sił wewnętrznych w dźwigarze zespolonym stosuje się opis procesów reologicznych w ujęciu zmodyfikowanego modułu sprężystości betonu, według H. Trosta [7, 10, 15]. W przypadku obciążeń długotrwałych, wartości modułów sprężystości podlegają redukcji wg zasady

$$E_{b\varphi} = \frac{E_b}{1 + \rho \cdot \varphi_b}, \quad (6)$$

$$E_{p\varphi} = \frac{E_p}{1 + \rho \cdot \varphi_p}, \quad (7)$$

$$E_{w\varphi} = \frac{E_w}{1 + \rho \cdot \varphi_w}, \quad (8)$$

gdzie ρ jest współczynnikiem H. Trosta. W celu sformułowania ogólnego rozwiązania przyjęto belkę prefabrykowaną z betonu sprężonego, jak na rys. 1c. Podstawiając (6), (7) i (8) do (3) oraz uwzględniając skurcz betonów, otrzymuje się

$$\frac{N_b}{E_b A_b} (1 + \rho \varphi_b) - \frac{M_p y_g}{E_b I_b} (1 + \rho \varphi_b) - \frac{N_p}{E_p A_p} (1 + \rho \varphi_p) - \frac{M_p y_d}{E_p I_p} (1 + \rho \varphi_p) = \varepsilon_{sk}^p - \varepsilon_{sk}^b, \quad (9)$$

a w przypadku równania (4) zależność

$$-\frac{N_p}{E_p A_p} (1 + \rho \varphi_p) - \frac{M_p y_g}{E_p I_p} (1 + \rho \varphi_p) + \frac{N_w}{E_w A_w} (1 + \rho \varphi_w) - \frac{M_w r_d}{E_w I_w} (1 + \rho \varphi_w) = \varepsilon_{sk}^w - \varepsilon_{sk}^p. \quad (10)$$

Równanie zgodności krzywizn zginanych elementów dźwigara, po korekcie modułów sprężystości, ma postać

$$\frac{M_b}{E_b I_b} (1 + \rho \varphi_b) = \frac{M_p}{E_p I_p} (1 + \rho \varphi_p) = \frac{M_w}{E_w I_w} (1 + \rho \varphi_w). \quad (11)$$

W celu uproszczenia zapisu podanych wyżej równań, wprowadza się zwykle [5, 7, 9, 10] współczynniki, służące do określania charakterystyk geometrycznych przekroju zespolonego jako sprowadzonych do jednorodnego. Wówczas cechy fizyczne materiału płyty (pierwotnej i wtórnej) porównuje się do materiału belki (w mostach stalowych jest to reguła), w postaci

$$n_{bp} = \frac{E_b (1 + \rho \varphi_p)}{E_p (1 + \rho \varphi_b)}, \quad (12)$$

$$n_{bw} = \frac{E_b (1 + \rho \varphi_w)}{E_w (1 + \rho \varphi_b)}. \quad (13)$$

Porównanie cech fizycznych materiałów płyty wtórnej i pierwotnej, można uzyskać na podstawie wcześniej podanych wzorów, jako

$$n_{pw} = \frac{n_{bw}}{n_{bp}} . \quad (14)$$

Równanie (9) sprowadza się do prostszej postaci, gdy podzieli się je przez czynnik $\frac{E_b A_b}{1 + \rho \varphi_b}$, a po wprowadzeniu parametrów n_{ij} otrzymuje się:

$$N_b - \frac{A_b v_g}{I_b} M_b + \frac{A_b n_{bp}}{A_p} N_p - \frac{A_b n_{bp} y_d}{I_p} M_p = E_b A_b \frac{\varepsilon_{sk}^p - \varepsilon_{sk}^b}{1 + \rho \varphi_b} , \quad (15)$$

natomiast po podzieleniu (10) przez $\frac{E_p A_p}{1 + \rho \varphi_p}$ uzyskuje się

$$-N_p - \frac{A_p y_g}{I_p} M_p + \frac{A_p n_{pw}}{A_w} N_w - \frac{A_p n_{pw} r_d}{I_w} M_w = E_p A_p \frac{\varepsilon_{sk}^w - \varepsilon_{sk}^p}{1 + \rho \varphi_p} . \quad (16)$$

Równanie (11) przyjmuje postać

$$\frac{M}{I_\varphi} = \frac{M_b}{I_b} = n_{bp} \frac{M_p}{I_p} = n_{bw} \frac{M_w}{I_w} , \quad (17)$$

gdry sztywność giętną przekroju zespolonego $E_b I_\varphi$ odniesie się do materiału belki.

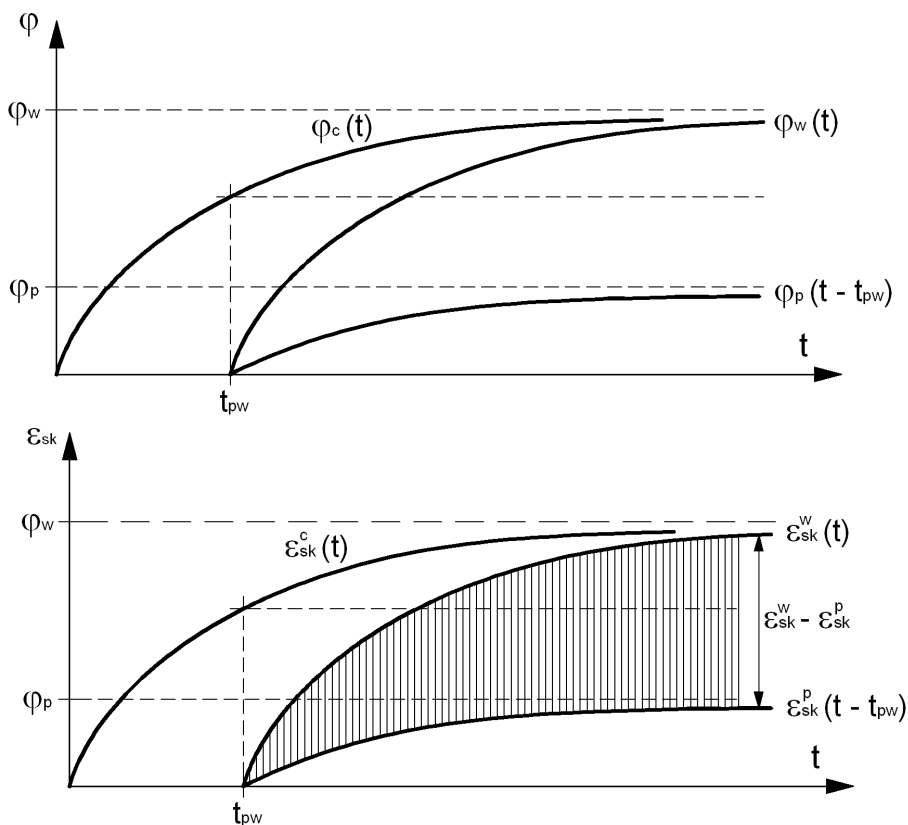
4. CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE PRZEKROJU ZESPOLONEGO

W przypadku obciążeń długotrwałych charakterystyki geometryczne przekroju zespolonego są zmienne w czasie (zależą od momentu obciążenia i chwili obserwacji). Zmiennymi parametrami są moduły sprężystości oraz współczynniki pełzania betonów. W najczęściej spotykanych przypadkach praktycznych występują następujące relacje pomiędzy tymi wartościami: $E_b > E_p > E_w$, gdyż belki betonowe oraz płyta pierwotna wykonane są w dogodniejszych warunkach technologicznych niż płyta wtórna. Podobna relacja występuje dla dźwigarów zespolonych stalowo-betonowych, jak na rys. 1b. Wartości współczynników pełzania betonu są w zależności [7, 10] $\varphi_b < \varphi_p < \varphi_w$, jak na rys. 5.

Położenie środków ciężkości elementów przekroju poprzecznego jest stałe, niezmiennie w czasie i niezależne od rodzaju działania sił zewnętrznych, i wynosi

$$a = v_g + y_d , \quad (18)$$

$$c = y_g + r_d . \quad (19)$$



Rys.5. Zmiany pełzania i skurczu w funkcji czasu
 Fig.5. Change of concrete creep and shrinkage versus time

Pola powierzchni przekrojów poprzecznych elementów dźwigara zespolonego, przy wykorzystaniu wartości współczynników n_{ij} , ulegają redukcji zgodnie z zależnościami

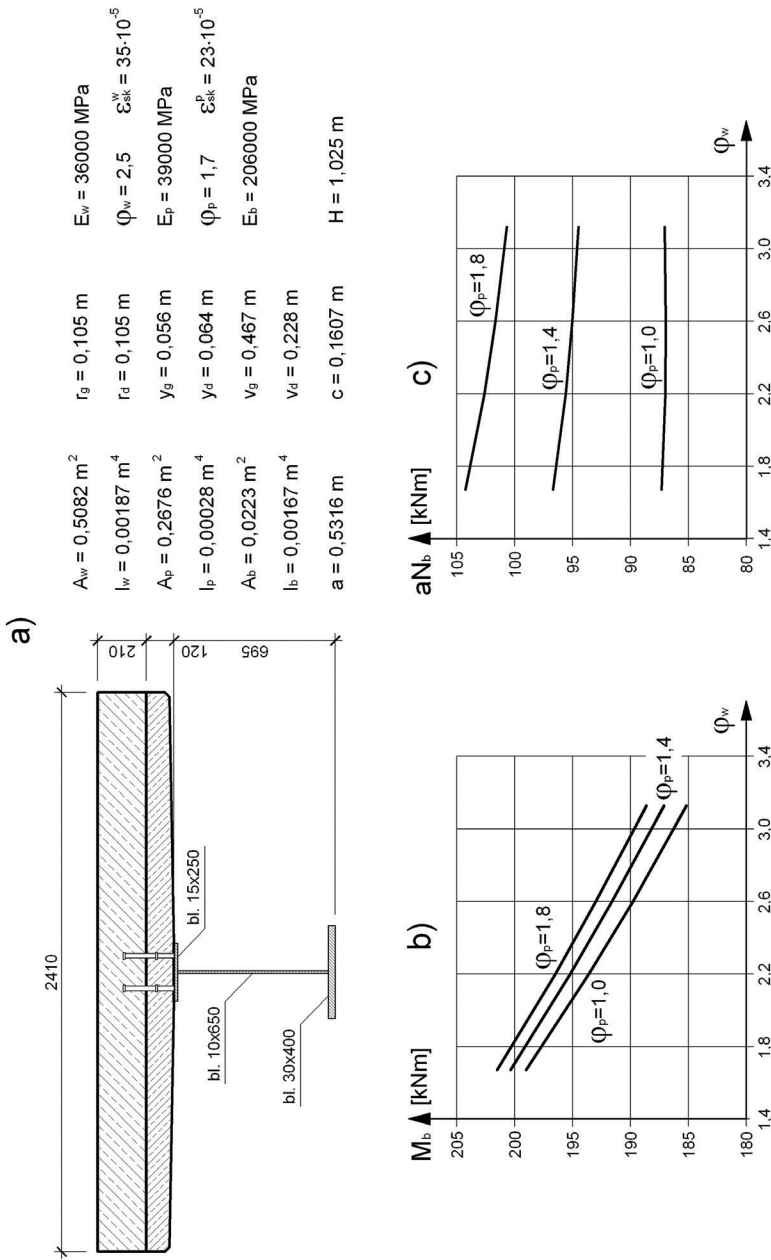
$$A_{pb} = \frac{A_p}{n_{bp}}, \quad (20)$$

$$A_{wb} = \frac{A_w}{n_{bw}}, \quad (21)$$

podobnie jak momenty bezwładności

$$I_{pb} = \frac{I_p}{n_{bp}}, \quad (22)$$

$$I_{wb} = \frac{I_w}{n_{bw}}. \quad (23)$$



Rys.6. Zależność sił wewnętrznych w belce od współczynników pełzania:

a) wymiary przekroju poprzecznego, b) wykres zależności $M_b(\varphi_w, \varphi_p)$, c) wykres zależności $aN_b(\varphi_w, \varphi_p)$

Fig.6. Variability of internal forces in a beam, in dependence of creep coefficients:

a) dimensions of the cross-section, b) diagram of the dependence $M_b(\varphi_w, \varphi_p)$, c) diagram of the dependence $aN_b(\varphi_w, \varphi_p)$

Na rys. 6 przedstawiono wyniki analizy wpływu zmian spowodowanych charakterystyk geometrycznych płyty pomostowej na siły wewnętrzne w belce. Przyjęto przekrój poprzeczny dźwigara jak na rys. 6a oraz obciążenia zewnętrzne wywołujące w analizowanym przekroju moment zginający $M = 1000$ kNm. Zmiennymi parametrami są współczynniki pełzania φ_w i φ_p , natomiast $\varphi_b = 0$ (belka stalowa). Z podanych na rys. 6 wykresów wynika, że wartość M_b w mniejszym stopniu zależy od φ_p , natomiast na N_b mniejszy jest wpływ φ_w . Ogólnie można uważać, że wpływ pełzania na siły wewnętrzne jest niewielki, oczywiście w porównaniu ze skutkami pozostałych obciążeń (stałych, przed zespoleniem i zmiennych) oraz oddziaływań (np. skurcz betonu).

5. SIŁY WEWNĘTRZNE

Rozwiązanie ogólne można przedstawić w postaci układu równań

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{I_{pb}}{I_b} + \frac{I_{wb}}{I_b}\right) & 0 & 1 & \left(1 + \frac{c}{a}\right) \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -\frac{a^2 A_b}{I_b} & 1 & \frac{A_b}{A_{pb}} & 0 \\ \frac{ac A_{pb}}{I_b} & 0 & -1 & \frac{A_{pb}}{A_{wb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_b \\ aN_b \\ aN_p \\ aN_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ aN \\ aN_{sk}^{pb} \\ aN_{sk}^{wp} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

gdzie M i N są wypadkowymi siłami przekrojowymi, jak na rys. 4. Skurcz i pełzanie betonu uwzględnia się w wyrażeniach

$$N_{sk}^{pb} = (\varepsilon_{sk}^p - \varepsilon_{sk}^b) \frac{E_b A_b}{1 + \rho \varphi_b}, \quad (25)$$

$$N_{sk}^{wp} = (\varepsilon_{sk}^w - \varepsilon_{sk}^p) \frac{E_p A_p}{1 + \rho \varphi_p}. \quad (26)$$

W celu uzyskania bezwymiarowych wyrazów macierzy (24) przyjęto obliczane wielkości statyczne jako momentowe – w tym celu siły osiowe pomnożono przez stałą wartość a , będącą odległością pomiędzy środkami ciężkości belki i płyty pierwotnej.

Pominięte w równaniu (24) momenty zginające w płycie M_p i M_w , wyznacza się przy wykorzystaniu przekształconego wzoru (17)

$$\frac{M_b}{I_b} = \frac{M_p}{I_{pb}} = \frac{M_w}{I_{wb}}, \quad (27)$$

na podstawie obliczonego w (24) momentu M_b

$$M_p = \frac{I_{pb}}{I_b} M_b, \quad (28)$$

$$M_w = \frac{I_{wb}}{I_b} M_b. \quad (29)$$

Siły poprzeczne przypadające na elementy płyty i belkę, w podziale wypadkowej siły przekrojowej T , są obliczane proporcjonalnie do podziału M na składowe M_i . Wynika to z zależności różniczkowej

$$T_i = \frac{dM_i}{dx}. \quad (30)$$

6. SKURCZ I PEŁZANIE BETONU ZBROJONEGO

Zbrojenie konstrukcyjne i montażowe elementów betonowych ma znaczący wpływ na oddziaływanie skurczu. W obliczeniach pól przekroju A_b , A_p i A_w oraz momentów bezwładności I_b , I_p i I_w można uwzględnić zbrojenie podłużne płyty pomostowej i belki prefabrykowanej – według ogólnych zasad podanych w p. 4. W wyniku oddziaływania skurczu powstaje zrównoważony wewnętrznie układ sił w stali i betonie o wartości N_{sk} . Porównując odkształcenia jednostkowe powstałe w zbrojeniu, ujęte po lewej stronie (31) i w betonie, ujęte po prawej stronie (31), otrzymuje się równanie

$$\varepsilon_{sk} - \frac{N_{sk}}{E_a A_a} = \frac{N_{sk}}{E_c A_c} (1 + \rho \varphi_c), \quad (31)$$

a po jego przekształceniu wyznacza się siłę osiową

$$N_{sk} = \frac{E_a A_a}{1 + p n_{ac}} \varepsilon_{sk}, \quad (32)$$

gdym

$$n_{ac} = \frac{E_a}{E_c} (1 + \rho \varphi_c), \quad (33)$$

a p jest wskaźnikiem zbrojenia ujętym w proporcji pola powierzchni przekroju poprzecznego zbrojenia do pola powierzchni betonu (podawanej zwykle w procentach)

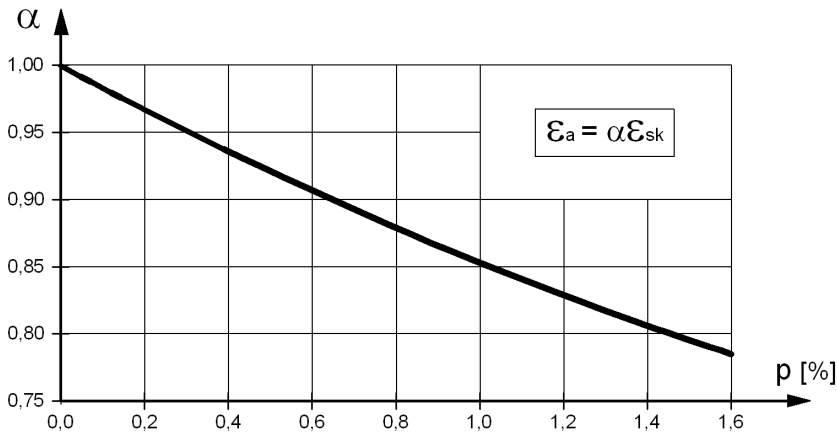
$$p = \frac{A_a}{A_c}. \quad (34)$$

Odkształcenia jednostkowe stali

$$\varepsilon_a = \frac{N_{sk}}{E_a A_a} = \frac{\varepsilon_{sk}}{1 + p n_{ac}} \quad (35)$$

są równocześnie efektywnymi odkształceniami wywołanymi przez skurcz w betonie zbrojonym.

Na rys. 7 zilustrowano wpływ zbrojenia na redukcję oddziaływania skurczu. Jest on znaczący również w przypadku minimalnego procentu zbrojenia. We wzorze (35) uwzględniono jedynie zbrojenie położone w jednym kierunku, pomijając zbrojenie poprzeczne.



Rys.7. Efektywne odkształcenie skurczu betonu w funkcji procentu zbrojenia
Fig.7. Efficient shrinkage strains in concrete in dependence of percentage of reinforcement

7. SIŁY WZBUDZONE OD SKURCZU BETONU W MOSTACH WIELOPRZĘSŁOWYCH

W przypadku występowania ograniczeń przemieszczeń, np. w belkach wieloprzęsłowych, powstają od skurczu betonu dodatkowe siły wzbudzone. Są to siły wewnętrzne (np. momenty zginające), jak również reakcje podporowe, nie występujące w schematach izostatycznych (statycznie wyznaczalnych). W belkach ciągłych, wieloprzęsłowych do określania sił wzbudzonych dogodnie jest stosowanie klasycznej metody sił z przyjęciem wielkości nadliczbowych w postaci momentów podporowych [5, 7, 10], jak na rys. 8. Dla belek o stałej sztywności (przęsła wykonanych z jednakowych belek i stałych wymiarów płyty pomostowej) wyrazy macierzy podatności oblicza się jako

$$\delta_{ii} = \int \frac{M_i M_i}{E_b I_\varphi} dx = \frac{L_i + L_{i+1}}{3 E_b I_\varphi}, \quad (36)$$

a gdy $j = i + 1$

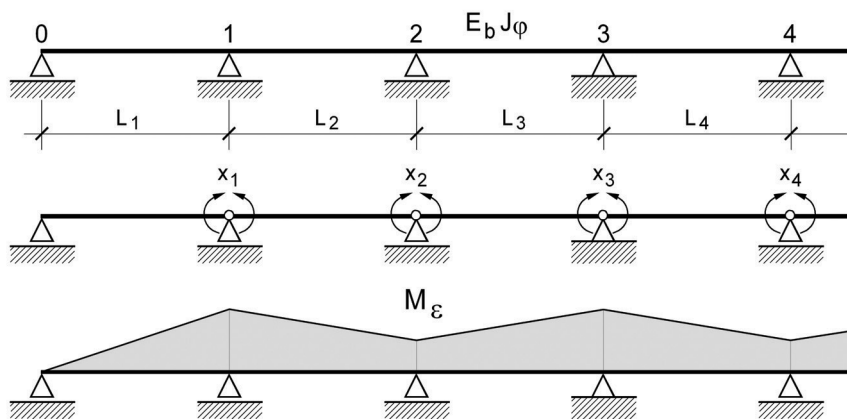
$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{E_b I_\varphi} dx = \frac{L_i}{6 E_b I_\varphi}. \quad (37)$$

Moment bezwładności dźwigara zespolonego I_φ występujący w (36) i (37) można obliczyć z (17), na podstawie obliczonej z (24) wartości M_b , gdy przyjmie się $M = 1$ i $N = 0$ oraz $\varepsilon_{sk} = 0$. Wówczas z (17) uzyska się wzór

$$I_\varphi = \frac{I_b}{(1 + \rho\varphi_b)} \cdot \frac{1}{M_b(M=1)}. \quad (38)$$

Macierz podatności w przypadku belki ciągłej ma budowę pasmową $\delta_{ij} = 0$, gdy $j > i + 1$. Z zasady Bettiego otrzymuje się $\delta_{ji} = \delta_{ij}$. Wyrazy wolne oblicza się, po wykorzystaniu (17) i (24), gdy $M = 0$ i $N = 0$ ze wzoru

$$\delta_{i\varepsilon} = \int \frac{M_i M(\varepsilon_{sk})}{E_b I_\varphi} dx = \frac{(1 + \rho\varphi_b)(L_i + L_{i+1})}{2E_b I_b} M_b(\varepsilon_{sk}). \quad (39)$$



Rys.8. Schemat metody sił dla belki ciągłej

Fig.8. Scheme of the force method for a continuous beam

Układ równań dla przyjętego schematu wyjściowego metody sił ma budowę regularną, pasmową. Przykładowo, dla belki pięcioprzęsłowej, jest on następujący

$$\begin{bmatrix} 2(L_1 + L_2) & L_2 & 0 & 0 \\ L_2 & 2(L_2 + L_3) & L_3 & 0 \\ 0 & L_3 & 2(L_3 + L_4) & L_4 \\ 0 & 0 & L_4 & 2(L_4 + L_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_1 + L_2 \\ L_2 + L_3 \\ L_3 + L_4 \\ L_4 + L_5 \end{bmatrix} \frac{3M_b(\varepsilon_{sk})}{M_b(M=1)}. \quad (40)$$

W przypadku przęsł o jednakowej rozpiętości L , układ równań (40) można uprościć dzieląc obustronnie przez L . Wówczas elementy macierzy przyjmują wartości liczbowe

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{6M_b(\varepsilon_{sk})}{M_b(M=1)}. \quad (41)$$

Dla takiej sytuacji momenty podporowe X_i oblicza się ze wzoru

$$X_i = -\mu_i \frac{M_b(\varepsilon_{sk})}{M_b(M=1)}, \quad (42)$$

przyjmując wartości współczynników μ_i podane w tablicy 1 [5].

Tablica 1. Wartości współczynników momentów podporowych μ_i
Table 1. Values of hogging moment coefficients μ_i

Liczba przęsł	Numer podpory		
	$i=1$	$i=2$	$i=3$
2	1,500		
3	1,200	1,200	
4	1,286	0,857	1,286
5	1,263	0,947	0,947
6	1,269	0,923	1,038

Gdy przykładowo przyjmie się przekrój poprzeczny dźwigara o charakterystykach geometrycznych i parametrach materiałowych podanych na rys. 6a, układ równań (24) będzie postaci

$$\begin{bmatrix} 1,0786 & 0 & 1 & 1,3023 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3,7736 & 1 & 1,0388 & 0 \\ -1,0981 & 0 & -1 & 0,7251 \end{bmatrix} \cdot$$

Gdy $M = 1$ MNm i $N = 0$ oraz $\varepsilon_{sk} = 0$, otrzymuje się z (24) rozwiązanie $M_b(M=1) = 203,73$ kNm, natomiast od oddziaływania skurczu betonów oraz gdy $M = 0$ i $N = 0$ otrzymuje się $M_b(\varepsilon_{sk}) = 206,06$ kNm. Momenty podporowe dla układu cztero-przęsłowego, obliczone na podstawie (42)

$$\frac{M_b(\varepsilon_{sk})}{M_b(M=1)} = 1,01144 \quad (42a)$$

i tablicy wynoszą $X_1 = 1300,7$ kNm oraz $X_2 = 866,8$ kNm. Porównanie $M_b(M=1)$ oraz $M_b(\varepsilon_{sk})$ wskazuje na istotne znaczenie wzbudzonych sił wewnętrznych, wynikających z oddziaływania skurczu betonu, w projektowaniu ciągłych mostów wieloprzęsłowych.

8. UGIĘCIA DŹWIGARÓW SPOWODOWANE SKURCZEM I PEŁZANIEM BETONU

Ze zmianą odkształceń w płycie betonowej i belce związana jest zmiana krzywizny dźwigara zespolonego. Związek pomiędzy odkształceniem górnych i dolnych włókien dźwigara oraz jego krzywizną można zapisać jako

$$\rho(t) = \frac{\varepsilon_{wg}(t) + \varepsilon_{bd}(t)}{H}, \quad (43)$$

a wykorzystując zasadę płaskich przekrojów, możemy przyjąć, że

$$\rho(t) = \rho_b(t) = \rho_p(t) = \rho_w(t). \quad (44)$$

Krzywizna ugięcia w każdym przekroju na długości dźwigara jest proporcjonalna do globalnego momentu zginającego $M(\varepsilon_{sk})$, powstałego od skurczu betonu

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M(\varepsilon_{sk})}{EI_\phi}, \quad (45)$$

a jego części składowe jak we wzorze (17). Dźwigar zespolony, pryzmatyczny (o stałych wymiarach przekroju poprzecznego na jego długości), poddany skurczowi betonu ulega wygięciu, a jego linia przemieszczenia ma kształt paraboli drugiego stopnia.

Belka swobodnie podparta

Ugięcie belki jest wprost proporcjonalne do jej krzywizny $\rho(t)$. W środku belki swobodnie podpartej o rozpiętości L , przy stałej wartości momentu zginającego na długości, wartość ugięcia wynosi

$$w = \frac{ML^2}{8E_b I_\phi}. \quad (46)$$

Po uwzględnieniu warunku zgodności krzywizn elementów dźwigara, podanego w (11) otrzymuje się

$$w = \frac{L^2}{8} \cdot \frac{M_b}{E_b I_b} (1 + \rho\phi_b). \quad (47)$$

Zmiany ugięć wywołane tylko pełzaniem betonu płyty pomostowej w mostach stalowych, zespolonych są niewielkie ($\varphi_b = 0$). Wskazują na to wyniki analizy przedstawione na rys. 6. Otrzymamy bowiem ugięcia od stałego obciążenia równomiernie rozłożonego

$$w = \frac{5L^2}{48} \cdot \frac{M_b}{E_b I_b} (1 + \rho \varphi_b) \quad (48)$$

w skrajnych przypadkach, rozpatrywanych na rys. 6 ($\varphi_b = 0$):

- wartość minimalną, gdy $\varphi_p = 1,0$ i $\varphi_w = 3,0$

$$w_{\min} = 18,627 \frac{5L^2}{48E_b I_b} ,$$

- wartość maksymalną, gdy $\varphi_p = 1,8$ i $\varphi_w = 1,8$

$$w_{\min} = 20,027 \frac{5L^2}{48E_b I_b} ,$$

a więc wartości różniące się zaledwie o 7 %. Na podstawie wzoru (17) widoczne jest również, że pełzanie ma niewielki wpływ (ok. 7 %) na sztywność dźwigara zespolonego, bowiem

$$E_b I_\varphi = \frac{M}{M_b} E_b I_b . \quad (49)$$

Istotne znaczenie na ugięcie przęsła ma skurcz betonu płyty. Przykładowo, dla rozpiętości przęsła $L = 18$ m i danych z (42a), wskaźnik w/L obliczony ze wzoru (47) wynosi

$$\frac{w}{L} = \frac{L \cdot M_b (\varepsilon_{sk})}{8E_b I_b} = \frac{18 \cdot 0,20606}{8 \cdot 206000 \cdot 0,00167} = \frac{1}{742} ,$$

a więc jest porównywalny ze skutkami obciążeń zmiennych.

Układy wielopręsłowe

Ugięcie konstrukcji w dowolnie wybranym punkcie j przęsła, wywołane skurczem i pełzaniem betonu, a ściśle momentem zginającym $M_\varepsilon(x)$, oblicza się zgodnie z zasadami mechaniki budowli jako

$$w_j(\varepsilon) = \int_0^L \frac{M_\varepsilon(x) \cdot \bar{M}_j(x)}{EI(x)} dx , \quad (50)$$

gdzie: $\bar{M}_j(x)$ jest momentem zginającym, powstałym od siły jednostkowej przyłożonej do schematu konstrukcji w punkcie j . Całkowanie w zakresie $x(0, L)$ można rozłożyć na części, a następnie wyniki sumować. Jedną z tych części, dotyczącą odcinka ik , przy założeniu, że na tym odcinku występuje stała sztywność giętna dźwigara EI_φ (jak dla obciążeń długotrwałych), jest obliczona jako

$$w_j^{ik}(\varepsilon) = \int_{x_i}^{x_k} \frac{M_\varepsilon(x) \cdot \bar{M}_j(x)}{EI_\varphi} dx \quad (51)$$

Wykorzystując równanie zgodności krzywizn (17) przekształca się równanie (51) do postaci

$$w_j^{ik}(\varepsilon) = M_b(\varepsilon_{sk}) \frac{1 + \rho\varphi_b}{E_b I_b} \int_{x_i}^{x_k} \bar{M}_j(x) dx \quad (52)$$

Ugięcie pryzmatycznego pręta wywołane przez skurcz i pęczanie betonu można traktować jako efekt zmiany temperatury [5], w postaci nierównomiernego, na wysokości dźwigara, ogrzania pręta $\delta_t = -(\Delta t_g - \Delta t_d)$, ale stałego na odcinku ik . Składnik ugięcia dla analizowanego odcinka ik oblicza się wówczas z równania

$$w_j^{ik}(\delta_t) = \frac{\alpha \cdot \delta_t}{H} \int_{x_i}^{x_k} \bar{M}_j(x) dx \quad (53)$$

gdzie wysokość dźwigara jest równa

$$H = r_g + c + a + v_d \quad (54)$$

Wartość dodatnia δ_t (53) oznacza oziębienie płyty pomostowej i ogrzanie dolnej warstwy belki, co powoduje wygięcie dźwigara w kierunku do dołu. Porównując (52) z (53) otrzymuje się

$$\frac{M_b(\varepsilon_{sk})}{E_b I_b} (1 + \rho \cdot \varphi_b) = \frac{\alpha \cdot \delta_t}{H} \quad (55)$$

A więc oddziaływanie skurczu i pęczania betonu na odcinku ik jest równoważne nierównomiernej (na wysokości przekroju) zmianie temperatury na tym odcinku o wartość δ_t . Stąd, dla założonego współczynnika rozszerzalności liniowej α , otrzymuje się

$$\delta_t = \frac{HM_b(\varepsilon_{sk})}{\alpha E_b I_b} (1 + \rho \cdot \varphi_b) \quad (56)$$

Dla danych jak w przykładzie podanym na rys. 6, gdy $\alpha E_b = 2,06$, otrzymuje się z (56)

$$\delta_t = \frac{1,025 \cdot 0,20606}{2,06 \cdot 0,00167} = 61,4 \text{ } ^\circ\text{C} \quad .$$

Zastępcza różnica temperatury odpowiadająca oddziaływaniu skurczu i pęczania betonu w zespolonym dźwigarze stalowym jest więc większa niż normowe wahania temperatur.

9. WNIOSKI

Dla rozpatrywanego układu zespolonego uzyskano rozwiązanie, w którym globalne, wypadkowe siły przekrojowe rozkłada się na składowe, przyłożone do elementów tworzących dźwigar: belki, płyty pierwotnej i płyty wtórnej. W przykładach liczbowych wskazano na skuteczność ujęcia wpływu skurczu i pełzania betonów na siły wewnętrzne i ugięcia w dźwigarze zespolonym, również w mostach wieloprzęsłowych.

Przedstawione rozwiązanie umożliwia analizę parametryczną efektów wynikających z zespolenia betonowej, dwuwarstwowej płyty pomostowej z belką stalową lub prefabrykatem betonowym w dźwigarze mostowym. Wyniki analizy wskazały niewielki wpływ pełzania betonu na naprężenia i ugięcia w stalowych mostach zespolonych. Stwierdzono istotny wpływ skurczu betonu na wartości sił wewnętrznych, w szczególności w mostach wieloprzęsłowych. Wskazano na znaczny wpływ zbrojenia elementów z betonu na redukcję efektów oddziaływania skurczu.

WYKAZ PODSTAWOWYCH OZNACZEŃ

- A_b, I_b – pole powierzchni, moment bezwładności przekroju poprzecznego belki
- A_p, I_p – pole powierzchni, moment bezwładności przekroju poprzecznego płyty pierwotnej
- A_w, I_w – pole powierzchni, moment bezwładności przekroju poprzecznego płyty wtórnej
- A_{pb}, I_{pb} – sprowadzone pole powierzchni, sprowadzony moment bezwładności przekroju poprzecznego płyty pierwotnej
- A_{wb}, I_{wb} – sprowadzone pole powierzchni, sprowadzony moment bezwładności przekroju poprzecznego płyty wtórnej
- E_b – moduł sprężystości belki
- E_p – moduł sprężystości płyty pierwotnej
- E_w – moduł sprężystości płyty wtórnej
- H – wysokość dźwigara zespolonego
- I_φ – sprowadzony moment bezwładności przekroju poprzecznego dźwigara zespolonego
- M, N – wypadkowy moment zginający i siła osiowa, odniesione do przekroju poprzecznego dźwigara zespolonego
- M_b, N_b – składowa momentu zginającego i siły osiowej, odniesione do przekroju poprzecznego belki
- M_p, N_p – składowa momentu zginającego i siły osiowej, odniesione do przekroju poprzecznego płyty pierwotnej

M_w, N_w	– składowa momentu zginającego i siły osiowej, odniesione do przekroju poprzecznego płyty wtórnej
a	– odległość pomiędzy środkami ciężkości belki i płyty pierwotnej
c	– odległość pomiędzy środkami ciężkości płyty pierwotnej i wtórnej
r_g, r_d	– odległość krawędzi górnej i dolnej od środka ciężkości przekroju poprzecznego płyty wtórnej
v_g, v_d	– odległość krawędzi górnej i dolnej od środka ciężkości przekroju poprzecznego belki
y_g, y_d	– odległość krawędzi górnej i dolnej od środka ciężkości przekroju poprzecznego płyty pierwotnej
w	– ugięcie dźwigara
ε_{sk}^b	– odkształcenia jednostkowe, wywołane skurczem betonu belki
ε_{sk}^p	– odkształcenia jednostkowe, wywołane skurczem betonu płyty pierwotnej
ε_{sk}^w	– odkształcenia jednostkowe, wywołane skurczem betonu płyty wtórnej
φ_b	– współczynnik pełzania betonu belki
φ_p	– współczynnik pełzania betonu płyty pierwotnej
φ_w	– współczynnik pełzania betonu płyty wtórnej
ρ	– promień krzywizny belki zginanej

BIBLIOGRAFIA

- [1] Kołakowski T., Kosecki W., Marecki A.: VFT – prefabrykowane dźwigary zespolone z betonowym deskowaniem aktywnym. *Inżynieria i Budownictwo*, nr 3/2003, 144-148
- [2] Kołakowski T., Marecki A., Lorenc W., Kubica E.: VFT – prefabrykowane dźwigary zespolone z aktywnym deskowaniem betonowym. V Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna „Problemy projektowania, budowy oraz utrzymania mostów małych i średnich rozpiętości”, Wrocław 2-3.12.2004, 257-264
- [3] Toczkiwicz R.: Przykłady prefabrykowanych płyt pomostowych w mostach zespolonych. *Magazyn Autostrady*, jesień 2006, 9-12
- [4] Toczkiwicz R.: Możliwości przebudowy mostów zespolonych przy zastosowaniu prefabrykowanych płyt pomostowych. XV Seminarium „Współczesne metody wzmacniania i przebudowy mostów”, Poznań - Rosnówko 7-8.06.2005, 228-236
- [5] Machelski Cz.: Obliczenia mostów z betonowych belek prefabrykowanych. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2006

- [6] *Nakamura S., Momiyama Y., Hosaka T., Homma K.*: New technologies of steel/concrete composite bridges. *Journal of Constructional Steel Research*, 58, 2002, 99-130
- [7] *Furtak K.*: Mosty zespolone. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa - Kraków 1999
- [8] *Madaj A.*: Doraźna nośność i sztywność na zginanie zespolonych belek stalowo-betonowych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2005
- [9] *Machelski Cz., Toczkiwicz R.*: Podatność zespolenia mostów stalowych z betonową płytą pomostową. *Drogi i Mosty*, nr 3/2005, 37-76
- [10] *Karlikowski J., Sturzbecher K.*: Mosty stalowe. Mosty belkowe i zespolone. Przewodnik do ćwiczeń projektowych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2003
- [11] *Machelski Cz., Toczkiwicz R.*: Effects of connection flexibility in steel-concrete composite beams due to live loads, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. VI, No. 1/2006, 65-86
- [12] *Machelski Cz., Toczkiwicz R.*: Ocena podatności zespolenia na podstawie wyników badania mostu pod obciążeniem samochodami. *Drogi i Mosty*, nr 4/2006, 5-33
- [13] *Oehlers D. J., Nguyen N. T., Ahmed M., Bradford M. A.*: Partial interaction in composite steel and concrete beams with full shear connection. *Journal of Constructional Steel Research*. 41, 1997, 235-248
- [14] *Seracino R., Oehlers D.J., Yeo M.F.*: Partial-interaction flexural stresses in composite steel and concrete bridge beams, *Engineering Structures*, 23, 2001, 1186-1193
- [15] *Trost H.*: Zur Berechnung von Stahlverbundträgern in Gebrauchszustand auf Grund neuerer Erkenntnisse des viskoselastischen Verhaltens des Betons. *Der Stahlbau*, 11, 1968

RHEOLOGICAL EFFECTS IN COMPOSITE BEAMS WITH SANDWICH DECK SLAB

Abstract

The paper concerns bridge spans made of steel beams combined with a concrete slab, boarding for the bridge deck slab. It also relates to bridges made of precast beams, rehabilitated with use of additional layer of a concrete slab. Effects of connection of a bridge beam with a sandwich concrete deck slab are analyzed in the work. For such composite structure there is proposed a solution in which global, resultant internal forces are separated into components imposed to the elements forming the girder i.e.: the beam and both layers of the sandwich slab. Influence of concrete creep and shrinkage on the internal forces and deflections of the composite girder is shown. Rheological processes are described with use of a model of the substitute modulus of elasticity. Numerical examples given in the paper show the effects of concrete creep and shrinkage in steel-concrete composite bridges, particularly in continuous beams.

