



GRAŻYNA ŁAGODA¹⁾
MAREK ŁAGODA²⁾

PODSTAWY WYTRZYMAŁOŚCIOWE ANALIZY MOSTOWYCH KONSTRUKCJI MUROWANYCH

STRESZCZENIE. Konstrukcje mostów murowanych z uwagi na użyty materiał konstrukcyjny wymagają specyficznego, innego niż konstrukcje stalowe czy betonowe, podejścia przy określaniu ich nośności. W artykule przedstawiono kryteria wytrzymałościowe konstrukcji murowanych, uwzględniające ich charakterystyki mechaniczne. W oparciu o coulombowskie kryteria wytrzymałościowe w płaskim stanie naprężenia dokonano analizy z uwzględnieniem izotropii i anizotropii struktury murowanej. Omówiono również zastosowanie teorii obciążeń granicznych.

W artykule omówiono także praktyczne metody określania stateczności sklepień. Pokazano, wcześniej już znaną, ale zmodyfikowaną metodę linii środków ciśnień oraz analizę stateczności sklepień za pomocą mechanizmu niszczenia. Wykorzystanie mechanizmu niszczenia pokazano na przykładzie określenia stateczności sklepienia.

1. WSTĘP

Mosty murowane, w związku ze znaczną ich liczebnością oraz dzięki wysokim wartościom architektonicznym i estetycznym, a także z uwagi na ich szczególne powiązania z historią, stanowią bardzo ważną część dziedzictwa kultury [1]. Konstrukcje murowane należą do najstarszych, najdłużej eksploatowanych budowli inżynierskich w ogóle, a mosty stanowią wśród nich grupę o szczególnym znaczeniu.

Najstarsze, kamienne sklepienia to konstrukcje o geometrii w postaci łuków kołowych.

¹⁾ dr hab. inż. – Instytut Dróg i Mostów, Politechnika Warszawska

²⁾ dr inż. – Instytut Badawczy Dróg i Mostów w Warszawie

Z czasem stawały się coraz bardziej płaskie, a począwszy od Wielkiego Kamiennego Mostu nad rzeką Jiao, zbudowanego przez Li Chuna w 610 r. (rys. 1), zaczęto budować je w postaci łuków parabolicznych, osiągających coraz to większe rozpiętości. Mosty murowane budowane są też w czasach współczesnych, również nad autostradami [2]. Wiele obiektów murowanych o bardzo dużym znaczeniu komunikacyjnym lub kulturowym występuje także w Polsce. Na sieci szlaków komunikacyjnych jest ponad 3 tysiące obiektów mostowych murowanych, o łącznej długości ponad 25 km [3]. Również na ogólną liczbę 140 tysięcy przepustów, ponad 20 tysięcy to konstrukcje murowane [3].



Rys.1. Wielki Kamienny Most nad rzeką Jiao zbudowany przez Li Chuna w 610 r. [2]
Fig.1. Great Stone Bridge above river Jiao built by Li Chun in 610 [2]

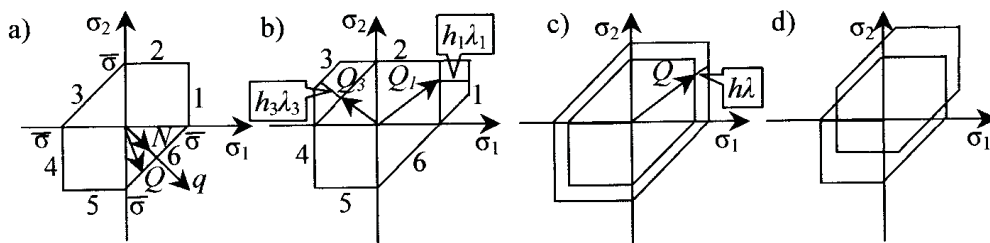
Mosty murowane w Polsce, zarówno te wielkie jak i te najmniejsze, wymagają właściwego utrzymania. Ich stan techniczny jest bardzo zróżnicowany [4]. Warunkiem właściwego utrzymania obiektów o konstrukcji murowanej jest również umiejętność określania ich nośności, poparta zrozumieniem i rozpoznaniem cech materiałowych oraz charakteru pracy konstrukcji. Jest to bardzo istotne, zwłaszcza w przypadku konieczności modernizacji, polegających na poszerzaniu mostu czy podnoszeniu jego nośności [5], wymuszonych nowymi warunkami eksploatacyjnymi.

2. CHARAKTERYSTYKI MECHANICZNE

Kamienie i cegły są materiałami wykazującymi niską wytrzymałość na rozciąganie w stosunku do wytrzymałości na ściskanie i zachowującymi się jak ciała sztywno – plastyczne.

W konstrukcjach murowanych występuje (najczęściej) płaski stan naprężenia, dla którego w płaszczyźnie $\sigma_1 - \sigma_2$ można wykreślić krzywą równania $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, przedstawiającą zbiór wypukły naprężeń mniejszych od naprężeń granicznych. Na

rys. 2 przedstawiono znany warunek plastyczności Treski. Dla ciała doskonale sztywno – plastycznego punkty wewnątrz wykresu przedstawiają stany naprężeń, przy których odkształcenia są zerowe, podczas gdy punkty na granicy przedstawiają stany naprężeń, powodujących odkształcenia plastyczne. Zgodnie z [6], na płaszczyźnie σ_{ij} można „nałożyć” płaszczyznę współrzędnych ε_{ij} odkształceń plastycznych, które można przedstawić za pomocą wektora \dot{q} .



Rys.2. Warunek Treski
Fig.2. Tresca condition

Jeżeli wektor \dot{q} jest normalny na granicy, to materiał spełnia warunki brzegowe Treski (rys. 2a) i wówczas można zapisać:

$$\left. \begin{aligned}
 &|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \bar{\sigma} \quad |\sigma_1| \leq \bar{\sigma} \quad |\sigma_2| \leq \bar{\sigma} , \\
 &F_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} - \bar{\sigma} \leq 0 , \\
 &----- \\
 &F_3 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2}} \leq 0 , \\
 &----- \\
 &\{F\} = [N^T] \{Q\} - \{R\} \leq 0 , \\
 &\{\dot{q}\} = \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\} = \lambda \{N\} .
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Jeżeli materiał ulega zgnieceniu, granica jest funkcją odkształceń plastycznych, które powstały przy zgnieciu. W zależności od rodzaju zgniotu, warunek Treski przyjmuje postać:

- zgniotu Koitera (rys. 2b)

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= \left\{ 1-0 \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} - (\bar{\sigma} + h\lambda_1) \leq 0, \\
 \text{-----} \\
 F_3 &= \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} - \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2}} + h\lambda_3 \right) \leq 0, \\
 \text{-----} \\
 \{F\} &= [N^T] \{Q\} - (\{R\} + h[I]\{\lambda\}) \leq \{0\}, \\
 \{\dot{F}\} &= [N^T] \{Q\} - h[I]\{\dot{\lambda}\} \leq 0, \\
 \{\dot{\lambda}^T\} \{\dot{F}\} &= 0 \quad \{\dot{\lambda}\} \geq \{0\} \quad \{\lambda\} \geq \{0\} \quad h(I) = [H],
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

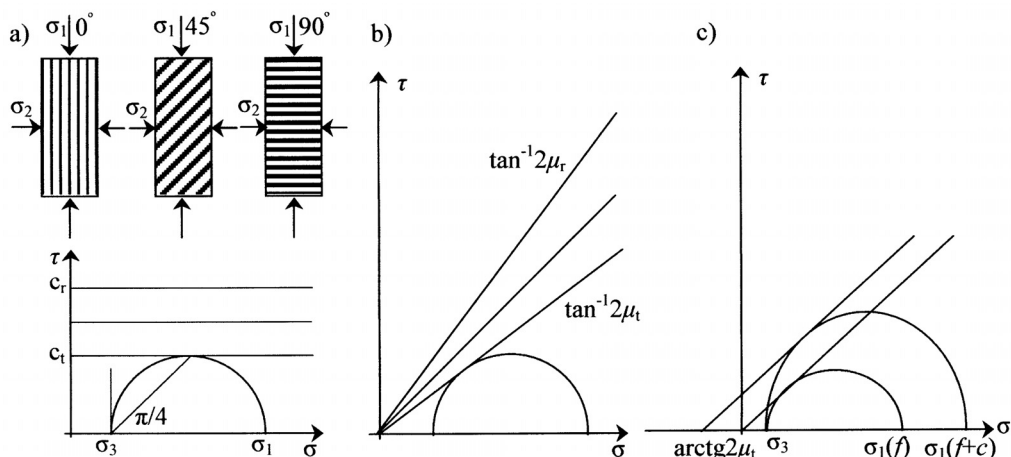
- zgniotu izotropowego (rys. 2c)

$$\left. \begin{aligned}
 \{F\} &= [N^T] \{Q\} - (\{R\} + [H]\{\lambda\}) \leq \{0\}, \\
 \{\dot{F}\} &= [N^T] \{Q\} - [H]\{\dot{\lambda}\} \leq \{0\}^{\{\lambda\} \geq \{0\}}, \\
 \{\dot{\lambda}^T\} \{\dot{F}\} &= 0 \quad \{\dot{\lambda}\} \geq \{0\} \quad [H] = h\{R_i\} \{R_j\}^T = h[R],
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

- zgniotu kinematycznego (rys. 2d)

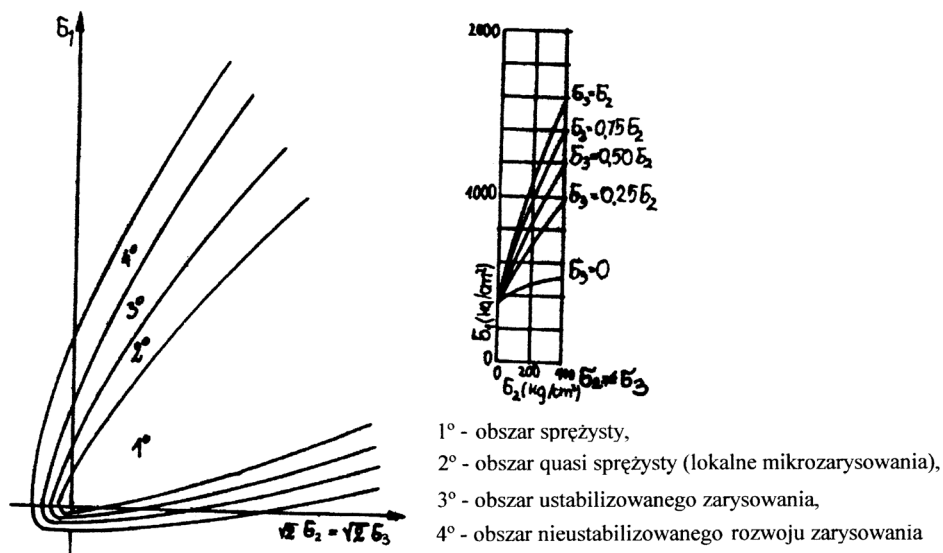
$$\left. \begin{aligned}
 \{F\} &= [N^T] \{Q\} - (\{R\} + [H]\{\lambda\}) \leq \{0\} \quad \{\lambda\} \geq 0, \\
 \{\dot{F}\} &= [N^T] \{Q\} - [H]\{\dot{\lambda}\} \leq \{0\} \quad \{\dot{F}\}^T \{\dot{\lambda}\} = 0 \quad \{\dot{\lambda}\} \geq \{0\}, \\
 [H] &= h[N][N^T] \quad H_{ij} = h\{n_i\}^T \{n_j\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Warunek Treski może być pojmowany jako szczególny przypadek warunku Coulomba. Można wykazać, że w konstrukcji murowanej występuje tarcie wewnętrzne, a zatem można zastosować coulombowską hipotezę wyężenia materiału. Konstrukcje murowane charakteryzują się różnymi właściwościami mechanicznymi w różnych kierunkach. W szczególności są to materiały o ortotropii biegunowej, a zatem określone dwiema osiami preferencyjnymi. Na rys. 3 przedstawiono warunek ze spójnością czystą (Treski), z tarcie czystym (Coulomba) dla materiału, który charakteryzuje się zerową (a praktycznie bardzo małą w stosunku do wytrzymałości na ściskanie) wytrzymałością na rozciąganie oraz ze spójnością i tarcie. Różne granice, wskazane na każdym wykresie, odpowiadają różnym orientacjom płaszczyzn preferencyjnych pęknięcia w stosunku do osi naprężeń głównych.



Rys.3. Ilustracja: a) warunku Treski, b) warunku Coulomba z tarcieniem oraz c) ze spójnością i tarcieniem
 Fig.3. Illustration of: a) Tresca condition, b) Coulomb condition with friction and c) with cohesion and friction

W konstrukcjach murowanych, podobnie jak w betonie, mamy często do czynienia ze zgniołem, uzależnionym od stanu mikropeknięcia, który występuje przed zniszczeniem. Belloti i Rossi [7] przeprowadzili badania (rys. 4), w wyniku których wnioskują, że z punktu widzenia oceny nośności konstrukcji z betonu strefy zarysowane można uważać za znajdujące się jakby w stanie odkształcenia plastycznego. Na podstawie zakresu zgniołu określili ewolucję od strefy sprężystej aż do granicy ustabilizowanego zarysowania.



Rys.4. Wyniki badań Bellotiego i Rossiego
 Fig.4. Test results of Belloti and Rossi

Konstrukcje murowane są rozszerzalne, tj. podczas pęknięcia zwiększają swoją objętość. Takie zjawisko sugeruje, że materiał charakteryzuje się wektorem odkształceń plastycznych o słabym odchyleniu od normalnej na krawędzi zakresu granicznego.

3. ZAKRESY GRANICZNE DLA KONSTRUKCJI MUROWANEJ

3.1. INTERAKCJA N - M

Konstrukcje murowane w postaci sklepienia (rys. 5a) wykonane są z bloków, które można uważać za ciała doskonale sztywno – plastyczne, między którymi znajdują się spoiny praktycznie nie przenoszące naprężeń rozciągających. Przy tych założeniach można przeprowadzić analizę współzależności zginania i ściskania [8 - 9].

W przypadku naprężeń ściskających, mniejszych od naprężeń granicznych σ_L , odkształcenia będą zerowe (rys. 5b). Natomiast pęknięcie powoduje powstawanie szczeliny o rozwarości δ , wywołanej wzajemnym obrotem φ bloków (rys. 5c). Siły wewnętrzne N i M można przedstawić wyrażeniami:

$$N = \sigma_L b \zeta h \quad , \quad (5)$$

$$M = \sigma_L b \zeta h \left(\frac{h}{2} - \frac{\zeta h}{2} \right) \quad . \quad (6)$$

Stąd otrzymujemy:

$$M = \frac{N h}{2} \left(1 - \frac{N}{N_0} \right) \quad , \quad (7)$$

gdzie:

$$N_0 = \sigma_L b h \quad , \quad (8)$$

N_0 – graniczna siła normalna przy zerowym momencie zginającym,

b, h – szerokość i wysokość sklepienia,

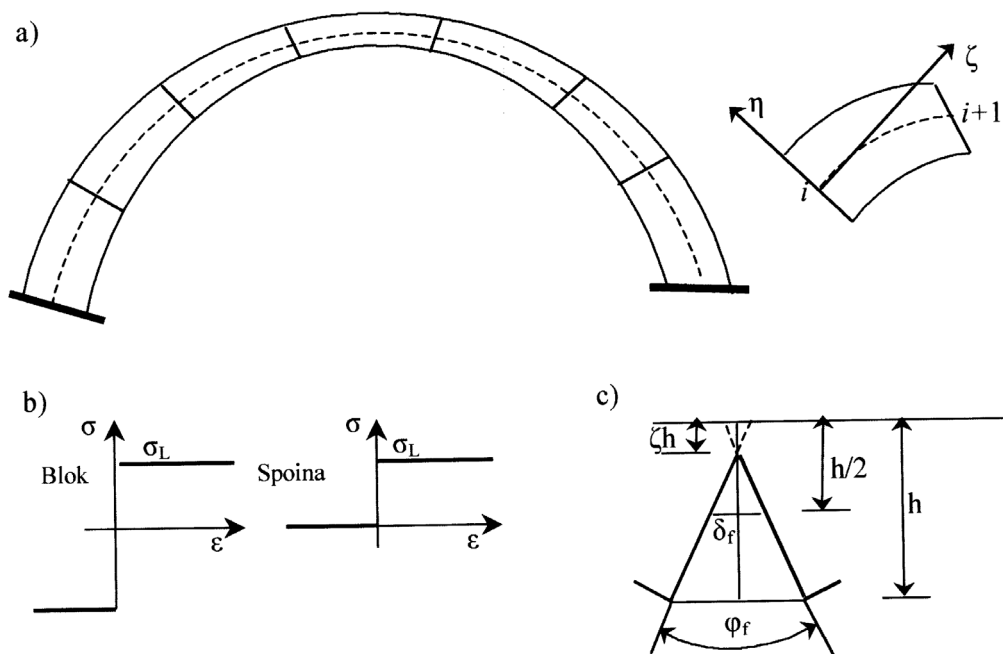
ζh – zasięg strefy ściskanej.

Zgodnie z rys. 5c zależność między kątem obrotu i rozwarciem szczeliny można zapisać w postaci:

$$\varphi \left(\frac{h}{2} - \zeta h \right) = \delta \quad (9)$$

lub po przekształceniu:

$$\frac{\varphi}{2} = -\frac{h}{2} (1 - 2 \zeta) \quad . \quad (10)$$



Rys.5. a) Schemat sklepienia, b) naprężenia i odkształcenia w bloku i spoinie, c) obrót bloków; indeks f określa przekrój
 Fig.5 a) Outline of vault, b) stress and strain in block and joint, c) blocks rotation

Po uwzględnieniu powyższych równań można zapisać:

$$\frac{dM}{dN} = -\left(\frac{\phi}{\delta}\right) \quad (11)$$

Interpretację geometryczną równania (11) przedstawiono na rys. 6a. Wartość maksymalna $M = M_{\max} = \frac{1}{8} N_0 \cdot h$ osiągnięta jest dla $N = \frac{N_0}{2}$.

Jeżeli określimy funkcje Φ_1 i Φ_2 w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= M - \frac{Nh}{2} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right), \\ \Phi_2 &= -M - \frac{Nh}{2} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

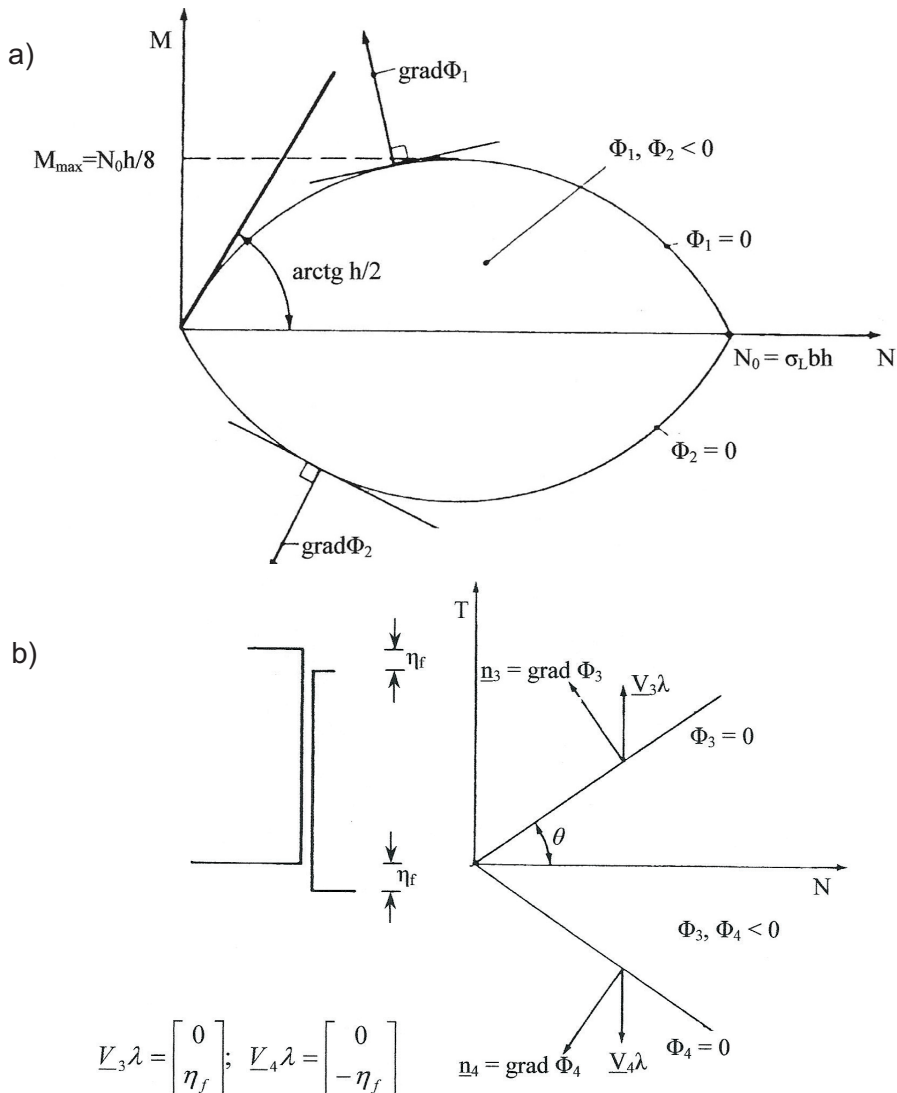
to punkty wewnątrz obszaru, którego granica jest określona równaniami:

$$\Phi_1 = M - \frac{Nh}{2} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) = 0 \quad \Phi_2 = -M - \frac{Nh}{2} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) = 0 \quad (13)$$

spełniają nierówności

$$M - \frac{Nh}{2} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) \leq 0 \quad -M - \frac{Nh}{2} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) \leq 0 \quad (14)$$

i charakteryzują wszystkie pary sił (N, M) dla naprężeń granicznych.



Rys.6. a) Interpretacja geometryczna równania (11), b) stan wywołany siłami T, N
Fig.6. a) Geometrical interpretation of equation (11), b) state due to forces T, N

Gradient funkcji Φ_i jest wektorem normalnym do linii $\Phi_i = const.$ Wektor wywodzący się z zakresu $\Phi_i \leq 0$ określają składowe:

$$grad\Phi_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\Phi_1}{\partial N} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial M} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{h}{2} \\ 1 \end{array} \quad 1 - \frac{2hN}{N_0} \right\}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial N} \cdot 1 / \frac{\partial\Phi_1}{\partial M} = -\frac{dM}{dN} = \frac{\varphi}{\delta}. \quad (16)$$

Można wywnioskować, że wektor $\{\varphi, \delta\}$ w przypadku mechanizmu pęknięcia dla N i M ma taki sam kierunek, co i gradient $\Phi(N, M)$, obliczany w tym samym punkcie N, M . Przy tym podejściu szczeliny odgrywają rolę odkształceń plastycznych przy rozciąganiu.

3.2. DZIAŁANIE SIŁ POPRZECZNYCH

Powyżej przeprowadzone rozumowanie nie uwzględniało działania siły poprzecznej. Model jest więc do przyjęcia tylko w tych przypadkach, gdzie siła poprzeczna nie może wywołać poślizgu wzajemnego bloków. Można również stwierdzić, że stan naprężenia wywołany siłami N, T (rys. 6b) nie wywołuje stanu granicznego, jeśli zawarty jest wewnątrz lub co najwyżej na konturze stożka, wyznaczonego prostymi o równaniach:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_3 = T - N \operatorname{tg}\theta = 0 \\ \Phi_4 = -T - N \operatorname{tg}\theta = 0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

spełniając nierówności:

$$\left. \begin{array}{l} T - N \operatorname{tg}\theta < 0 \\ -T - N \operatorname{tg}\theta < 0 \end{array} \right\} \quad (18)$$

spoiny pozostają nienaruszone i powyższe wywody są słuszne.

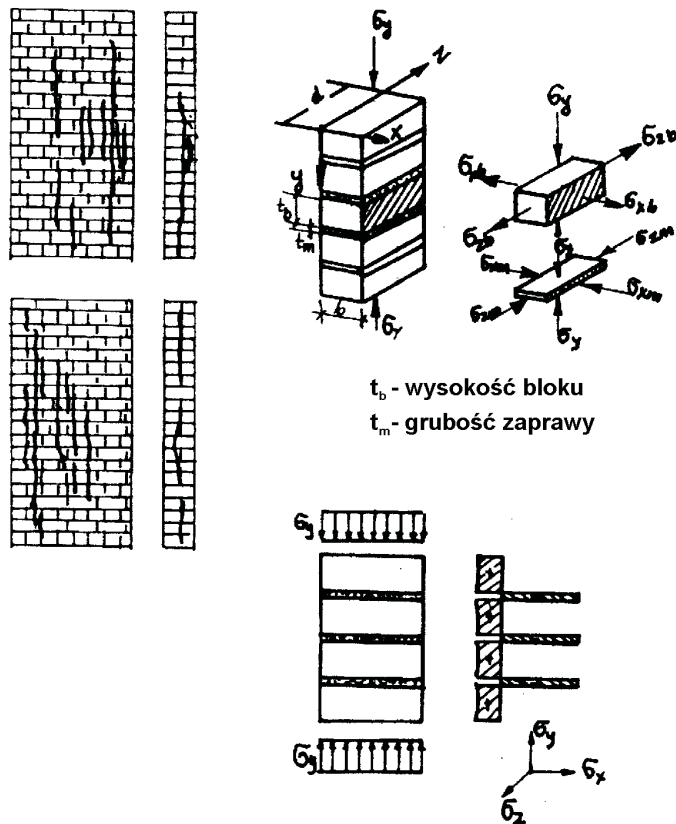
Jeżeli choć jedno z równań (17) jest spełnione, to następuje poślizg bloków w spoinie i mechanizm ten można opisać za pomocą wektora (rys. 6b):

$$\underline{V}\lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \eta_f \end{array} \right\}, \quad (19)$$

gdzie \underline{V} jest wektorem jednostkowym, zaś λ jego intensywnością, a η_f przesunięciem bloków. Dwie składowe są zerowe, tj. obrót i rozwarcie szczeliny. Wektor nie jest prostopadły do konturu granicznego.

3.3. KRYTERIUM WYTRZYMAŁOŚCIOWE KONSTRUKCJI MUROWANEJ ŚCISKANEJ OSIOWO

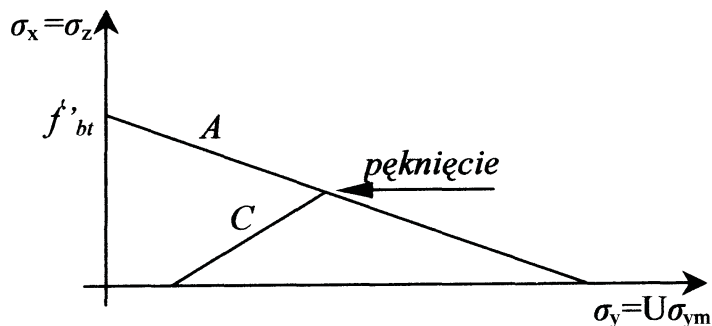
Hilsdorf [10] rozpatruje konstrukcję murowaną, poddaną obciążeniu skupionemu (rys. 7). Stwierdza on, że tarcie między blokami (cegłami lub kamieniami) i zaprawą (spoinami) powoduje, że pęknięcia muru przypominają pęknięcie materiału monolitycznego. Wzajemne oddziaływanie bloków i spoin stwarza stan ściskania osiowego i rozciągania dwuosiowego w blokach i stan ściskania trójosiowego w spoinach. Nośność konstrukcji murowanej jest zatem większa niż nośność materiałów składowych tj. bloków i zaprawy (spoin).



Rys.7. Konstrukcja murowana, poddana obciążeniu skupionemu oraz wykresy naprężeń
 Fig.7. Masonry structure subjected to a concentrated load and stress field

Hilsdorf podkreśla zatem naturę dwuskładnikową materiału, twierdząc, że pęknięcie występuje, gdy naprężenie maksymalne $\sigma_y = U \cdot \sigma_{ym}$ jest większe od wytrzymałości bloku na ściskanie. U jest współczynnikiem nierównomierności, czyli stosunkiem między naprężeniem normalnym maksymalnym σ_y i naprężeniem normalnym średnim σ_{ym} .

Na rys. 8 przedstawiono kryterium pęknięcia Hilsdorfa w przypadku konstrukcji murowanej, poddanej prostemu ścisnaniu. Prosta A , uwzględniając teorię Mohra, przedstawia wzajemne oddziaływanie naprężeń ściskających $\sigma_y = U \sigma_{ym}$ i rozciągających $\sigma_x = \sigma_z$, wywołujących pęknięcie bloku.



Rys.8. Kryterium pęknięcia Hilsdorfa
Fig.8. Hilsdorf crack criterion

Równanie prostej A ma postać:

$$\sigma_x = \sigma_z = f'_{bt} \left(1 - \frac{\sigma_y}{f'_b} \right), \quad (20)$$

gdzie:

f'_b – wytrzymałość bloku na ściskanie proste,

f'_{bt} – wytrzymałość dwuosiowa bloku w przypadku $\sigma_x = \sigma_z$.

Naprężenia σ_x i σ_z oddziałują w tym samym czasie na warstwę zaprawy (spoinę). Prosta C przedstawia zachowanie się w stanie ściskania trójosiowego zaprawy w spoinie i odpowiada naprężeniu bocznemu bloku, wystarczającemu do zamknięcia zaprawy (spoiny). Punkt $\sigma_x = \sigma_z = 0$ przedstawia wytrzymałość zaprawy na ściskanie proste. W przypadku określania wytrzymałości w stanie trójosiowego ściskania (prosta C) przyjmowane jest równanie:

$$\sigma_y = f'_j + 4,1 \cdot \sigma_2, \quad (21)$$

gdzie:

$\sigma_2 = \sigma_x = \sigma_z$ – naprężenie ściskające boczne,

σ_y – naprężenie ściskające,

f'_j – wytrzymałość zaprawy na ściskanie proste (jednoosiowe).

Równowaga między wypadkową naprężeń bocznych rozciągających σ_{xb} , działających na blok o szerokości b i wypadkową naprężeń bocznych σ_{xj} , ściskających zaprawę w spoinach o grubości j , jest określona równaniem:

$$\sigma_{xb} b = \sigma_{xj} j . \quad (22)$$

Ponieważ $\sigma_{xj} = \sigma_2 = \frac{1}{4,1} (\sigma_y - f'_j)$, wstawiając $\alpha = \frac{j}{4,1 \cdot b}$, równanie prostej C przyjmuje postać:

$$\sigma_x = \sigma_{xb} = \frac{j}{4,1 \cdot b} (\sigma_y - f'_j) = \alpha (\sigma_y - f'_j) . \quad (23)$$

Naprężenie występujące w miejscu pęknięcia określa punkt przecięcia się prostych A i C :

$$\sigma_y = f'_b \frac{f'_{bt} + \alpha f'_j}{f'_{bt} + f'_b} . \quad (24)$$

Za pomocą współczynnika U można określić wartość średnią naprężenia wywołującego pęknięcie:

$$\sigma_{ym} = \frac{\sigma_y}{U} \quad (25)$$

i podstawiając: $\sigma_{ym} = f'_m$ (wytrzymałość na ściskanie konstrukcji murowanej), otrzymujemy ostatecznie:

$$f'_m = \frac{f'_b}{U} \frac{f'_{bt} + \alpha f'_j}{f'_{bt} + f'_b} . \quad (26)$$

Hilsdorf uzyskał dobre zgodności między wynikami badań i obliczeniami, zauważył przy tym, że znaczne trudności dotyczą oceny f'_{bt} i U . Dlatego podaje on, że zachodzą nierówności $1,1 \leq U \leq 2,5$ i U jest malejące wraz z odwrotnością wytrzymałości zaprawy. Sahlin [11] zaś proponuje: $U = 2 - \frac{f'_j}{5000}$ dla $f'_j < 4000 \text{ psi}$ i $f'_{bt} \cong 500 \text{ psi}$. Po przejściu na jednostki SI, otrzymujemy: $U = 2 - \frac{f'_j}{40}$ dla $f'_j < 30 \text{ MPa}$ i $f'_{bt} \cong 4,0 \text{ MPa}$.

3.4. UOGÓLNIENIA

Podjęcie teoretyczne Hilsdorfa pozwala uwzględnić w sposób stosunkowo prosty niejednorodność konstrukcji murowanej, która zachowuje się „z grubsza” sprężysto-plastycznie. Eksperymentalnie stwierdzono również, że warunek pęknięcia konstrukcji murowanej odpowiada warunkowi Coulomba z bardzo małą, a nawet zerową wytrzymałością na rozciąganie.

Odształcenie w stanie granicznym jest takie, że można klasyfikować konstrukcję murowaną do materiałów mało ściśliwych. Anizotropia jest znaczna i nie do pominięcia w opracowaniu kryterium wytrzymałościowego. Największa trudność polega na sformułowaniu go na tyle prosto, by mógł być użyteczny w praktyce inżynierskiej.

4. WYTRZYMAŁOŚCIOWE KRYTERIA COULOMBA W PŁASKIM STANIE NAPRĘŻENIA

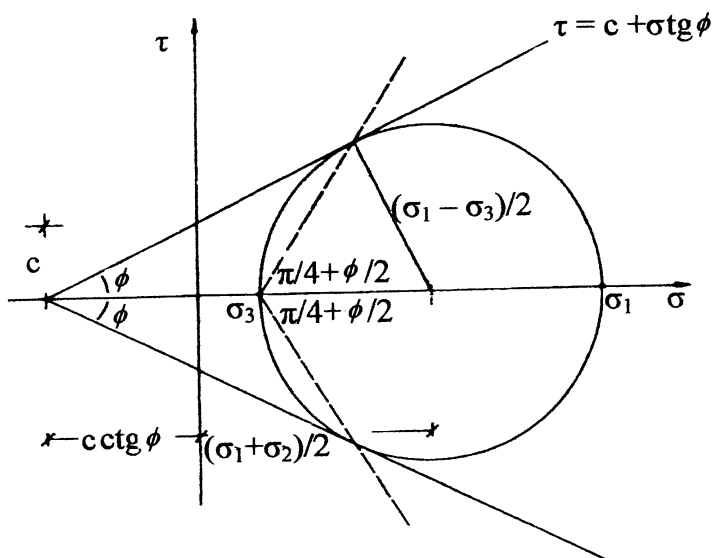
4.1. PRZYPADEK IZOTROPOWY

W oparciu o hipotezę Coulomba zmodyfikowaną przez Mohra można stwierdzić, że pęknięcie, lub ogólniej stan graniczny, występuje wówczas, kiedy naprężenie τ osiąga wartość graniczną. Wartość ta zależy wprost proporcjonalnie od naprężenia normalnego σ oraz od wartości stałej spójności C , przy naprężeniu normalnym σ , działającym w tym samym przekroju, ze współczynnikiem proporcjonalności $\operatorname{tg}\phi$, gdzie ϕ jest kątem tarcia wewnętrznego materiału.

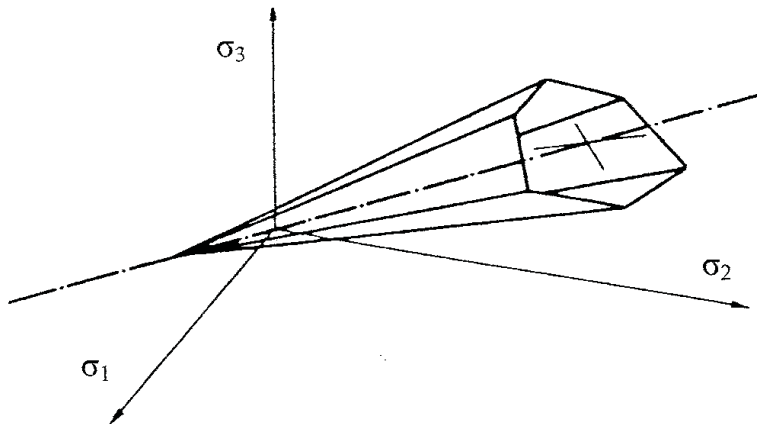
Pęknięcie wystąpi zatem, gdy spełnione jest równanie:

$$|\tau| = C + \sigma \cdot \operatorname{tg}\phi . \quad (27)$$

Na rys. 9a przedstawiono to kryterium na płaszczyźnie $\sigma - \tau$, zaś na rys. 9b w przestrzeni naprężeń głównych $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ w postaci powierzchni stanów granicznych Coulomba.



Rys.9a. Kryterium pęknięcia na płaszczyźnie $\sigma - \tau$
Fig.9a. Cracking criterion in $\sigma - \tau$ plane



Rys.9b. Kryterium pęknięcia w przestrzeni naprężeń głównych $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$
 Fig.9b. Cracking criterion in space of principal stresses $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$

Przy założeniu $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, w oparciu o warunek pokazany na rys. 9a można określić, że pęknięcie nastąpi gdy:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + C \operatorname{ctg} \phi \right) \sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (28)$$

i bezpośrednio:

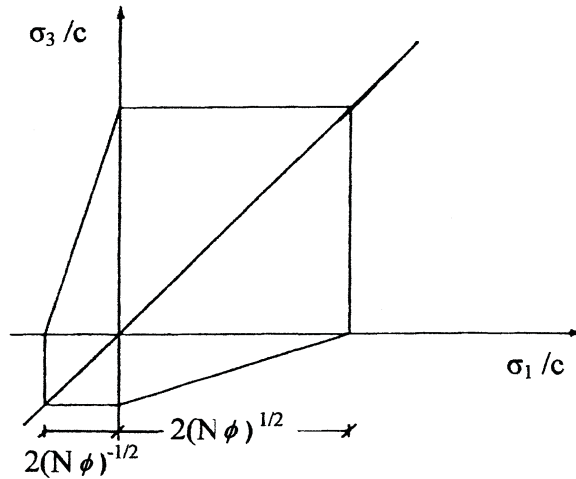
$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_3 + 2C \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \sigma_3 + 2C \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (29)$$

lub wprowadzając ekstremalne naprężenia główne:

$$\sigma_{\max} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \sigma_{\min} + 2C \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right). \quad (30)$$

Ponieważ każda ze składowych σ_1 , σ_2 , σ_3 może przybierać wartości ekstremalne, występuje sześć warunków pęknięcia. Jeżeli stan naprężenia można uznać za płaski, np. $\sigma_2 = 0$, warunek obrazuje przekrój przez płaszczyznę $\sigma_2 = 0$ (rys. 9c). Sześć warunków, po podstawieniu $N\phi \equiv \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$, ma postać:

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_3 & \sigma_1 = N\phi \sigma_3 + 2C \sqrt{N\phi} , \\ \sigma_3 \geq 0 \geq \sigma_1 & \sigma_3 = N\phi \sigma_1 + 2C \sqrt{N\phi} , \\ \sigma_1 \geq \sigma_3 \geq 0 & \sigma_1 = 2C \sqrt{N\phi} , \\ \sigma_3 \geq \sigma_1 \geq 0 & \sigma_3 = 2C \sqrt{N\phi} , \\ 0 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1 & \sigma_1 = -\frac{2C}{\sqrt{N\phi}} , \\ 0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 & \sigma_3 = -\frac{2C}{\sqrt{N\phi}} . \end{array} \right\} \quad (31)$$



Rys.9c. Przekrój przez płaszczyznę $\sigma_2 = 0$
Fig.9c. Section through plane $\sigma_2 = 0$

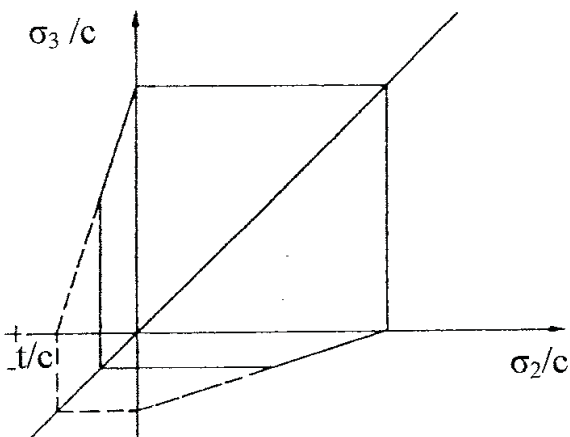
Granice zakresu można wyrazić ogólnie:

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = 0 \quad (32)$$

Oznacza to, że jeżeli stan naprężenia jest taki, że $F < 0$, to materiał znajduje się w strefie „sprężystej”, podczas gdy choć jedno z równań (31) jest spełnione, tj. $F = 0$, materiał podlega „fazie pęknięcia”. Dla murowanych sklepień ceglanych najczęściej podawanymi wartościami są:

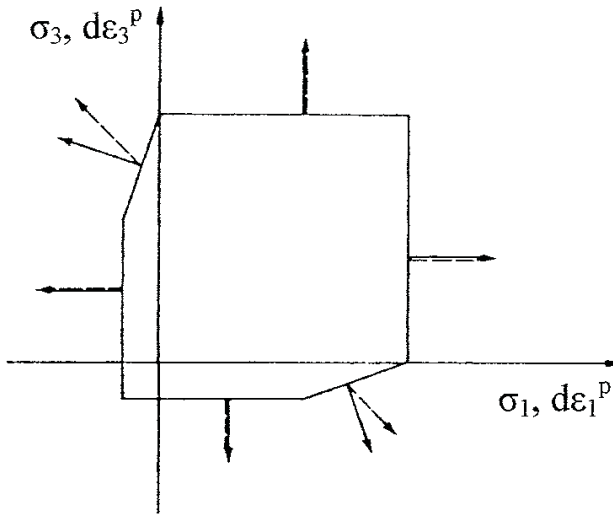
- spójność $C = 0,2$ MPa,
- kąt tarcia wewnętrznego $\phi = 30^\circ$.

Przedstawione kryterium jest dość optymistyczne w odniesieniu do wytrzymałości konstrukcji murowanej na rozciąganie i może być skorygowane, co pokazuje rys. 10a.



Rys.10a. Korekta kryterium
Fig.10a. Correction of criterion

Odształcenia plastyczne $d\varepsilon_1^P$ w stanie zniszczenia mogą przybierać postać jak na rys. 10b.



Rys. 10b. Odształcenia $d\varepsilon_1^P$ w stanie zniszczenia
Fig. 10b. Strains $d\varepsilon_1^P$ in the destruction state

4.2. PRZYPADEK ANIZOTROPOWY

Anizotropia materiału wywiera wpływ na sposób pęknięcia i wielkość naprężeń granicznych tak dalece, że nie wystarczy, jak to było w przypadku izotropowym, sformułować warunki pęknięcia w naprężeniach głównych.

Po przyjęciu warunku Mohra-Coulomba z pewnym ograniczeniem w zakresie naprężeń rozciągających, można rozpatrzyć pęknięcie spowodowane rozciąganiem. Zakłada się, że materiał osiąga stan graniczny, gdy w spoinie naprężenie σ_{mm} , normalne do przekroju m , przyjmuje wartość graniczną t_{mm} , która zależy od kierunku m .

Przy założeniu, że naprężenia ściskające są dodatnie, pęknięcie nastąpi, jeśli:

$$\sigma_{mm} \geq t_{mm} \quad . \quad (33)$$

Naprężenie σ_{mm} może być obliczone, gdy znane są składowe σ_{ik} , działające na trzy płaszczyzny wzajemnie prostopadłe, których normalne tworzą z prostą m znane kąty. Jeżeli m_i są kosinusami kierunkowymi osi m w stosunku do kartezjańskiego układu współrzędnych, naprężenia σ_{mm} mogą być wyrażone w funkcji σ_{ik} :

$$\sigma_{mm} = \sigma_{ik} m_i m_k \quad . \quad (34)$$

Podstawowym założeniem tej hipotezy jest to, że wytrzymałość t_{mm} zmienia się jako składowa normalna tensora drugiego rzędu:

$$t_{mm} = t_{ik} m_i m_k \quad , \quad (35)$$

$i, k = 1, 2, 3$ konwencja sumowania.

Ponieważ t_{ik} jest tensorem drugiego rzędu, istnieją trzy kierunki prostopadłe, będące podstawowymi kierunkami ortotropii np.: $t_{ik} = 0$ dla $i \neq k$, można zatem uwzględnić (33), (34) i (35) zapisać:

$$\sigma_{ik} m_i m_k \geq t_{ik} m_i m_k \quad (36)$$

lub

$$(\sigma_{ik} - t_{ik}) m_i m_k \geq 0 \quad (37)$$

Nierówność (37) wykazuje, że pęknięcie nastąpi gdy:

$$(\sigma_{22} - t_{22})[(\sigma_{11} - t_{11})(\sigma_{33} - t_{33}) - t_{13}^2] = 0 \quad (38)$$

o w płaskim stanie naprężenia, np. dla $\sigma_{22} = 0$:

$$(\sigma_{11} - t_{11})(\sigma_{33} - t_{33}) - t_{13}^2 = 0 \quad (39)$$

to jest kiedy:

$$\sigma_1 = \frac{t_{13}^2}{\sigma_3 - t_{33}} + t_{11} \quad (40)$$

W przypadku, gdy materiał posiada znaczną spójność i tarcie ($\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 \geq 0$), można postępować w podobny sposób przyjmując, że pęknięcie powstaje, gdy naprężenie σ_{mm} w kierunku m osiąga wartość graniczną, która zależy od m . Można to zapisać:

$$\sigma_{mm} = C_{mm} + f_{mm} \quad (41)$$

gdzie C_{mm} jest składową spójności, określoną przez równanie:

$$C_{mm} = C_{ik} m_i m_k \quad (42)$$

natomiast f_{mm} jest to wartość zależna od tarcia i proporcjonalna do stanu naprężenia działającego w kierunku m :

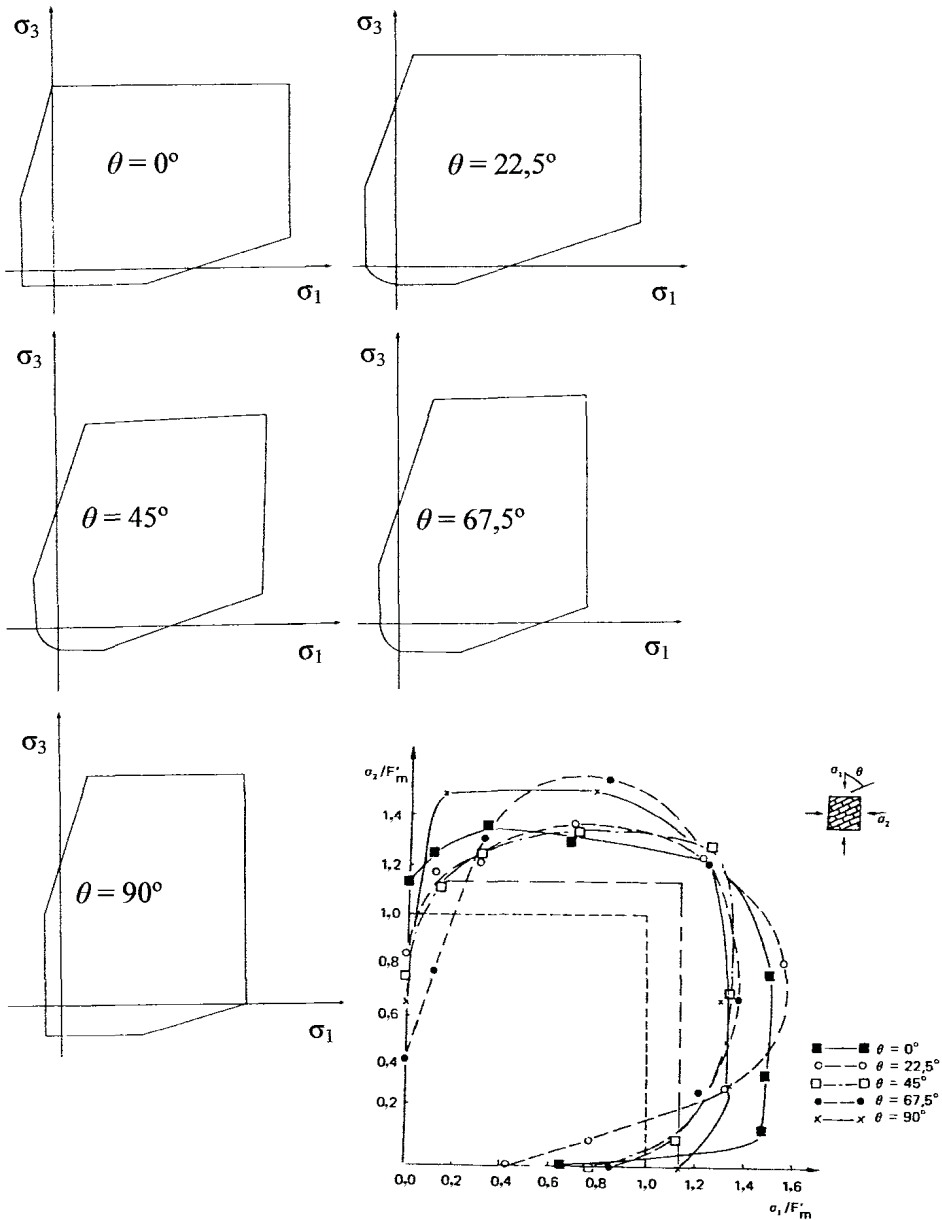
$$f_{mm} = \phi_{mmrs} \sigma_{rs} \quad (43)$$

przy czym ϕ_{mmrs} jest tensorem czwartego rzędu, zależnym od kąta tarcia wewnętrznego materiału.

Wykazano [12], że pęknięcie nastąpi, kiedy zostanie spełnione przynajmniej jedno z następujących równań:

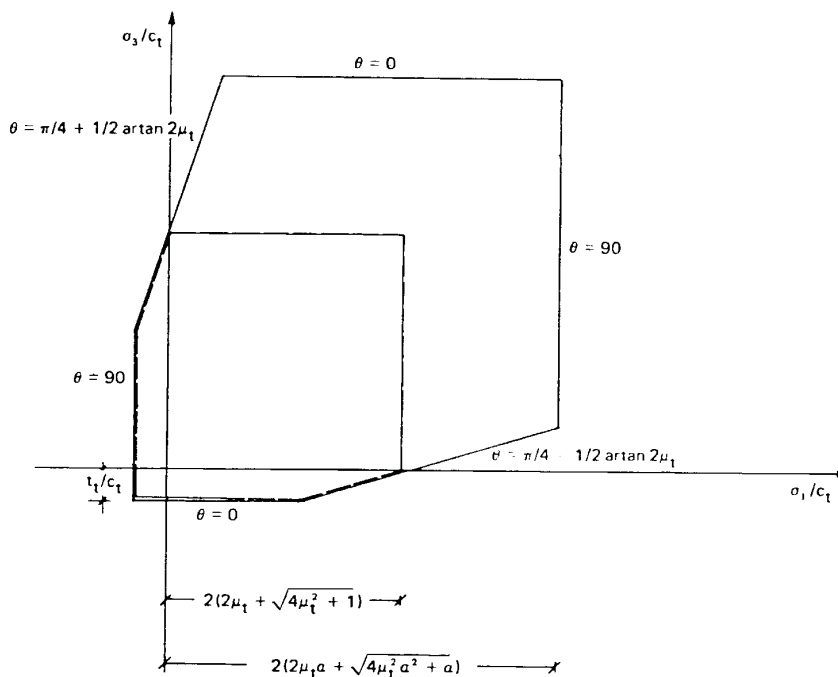
$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= \sqrt{(f_{11} + C_{11})(f_{33} + C_{33})} - |f_{13} + C_{13}| \quad , \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} &= \sqrt{(f_{11} + C_{11})(f_{22} + C_{22})} - |f_{12} + C_{12}| \quad , \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} &= \sqrt{(f_{22} + C_{22})(f_{33} + C_{33})} - |f_{23} + C_{23}| \quad . \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Dla materiału takiego, jakim jest struktura murowana, a więc o izotropii biegunowej, dla płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_2 = 0$) można określić zakresy pokazane na rys. 11. Rysunek ten przedstawia również wyniki badań Page'a [13], które dowodzą dobrej zgodności z teorią.



Rys.11. Obszary graniczne dla płaskiego stanu naprężenia oraz wyniki badań Page'a
Fig.11. Limit ranges for flat state of stresses and the results of Page research

Istnieją jednak poważne trudności praktycznego zastosowania całego zbioru konturów granicznych i dlatego zaproponowano obszar bezpieczeństwa (rys. 12) dla wszystkich kierunków spoin, uzyskany z zakresów przedstawionych na rys. 11. Obszar taki dotyczy materiału fikcyjnego, na który działają obciążenia spełniające kryteria całego zbioru konturów granicznych. Obszar ten jest jednocześnie mniej rygorystyczny dla naprężeń ściskających, aniżeli zakres uzyskany przy uwzględnieniu wytrzymałości minimalnych jako wartości graniczne (zakres oznaczony na rys. 11 linią przerywaną). Uproszczenie polega na tym, że wytrzymałość przyjęta jest jako tensor przy założeniu, że ortotropia jest w rzeczywistości zredukowana do izotropii biegunowej, co nie jest prawdziwe tylko w przypadku cienkiej tarczy, np. ściany czołowej w mostowej, łukowej konstrukcji sklepionej.



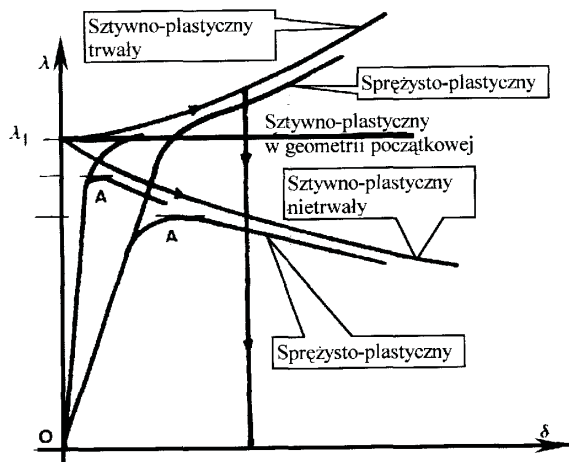
Rys.12. Obszar bezpieczeństwa dla wszystkich kierunków spoin
Fig.12 Area of safety for all directions of joints

5. ZASTOSOWANIE TEORII OBCIĄŻEŃ GRANICZNYCH

W przypadku analizy statycznej i przy wymiarowaniu konstrukcji, kiedy zainteresowanie jest skoncentrowane na ocenie obciążenia granicznego, model ciała doskonale sztywno–plastycznego jest modelem najprostszym. Zgodnie z tym modelem konstrukcja w stanie granicznym, inicjującym zniszczenie, odkształca się pod określonym obciążeniem czysto plastycznie. Ponieważ geometria początkowa (nie odkształcona) stosowana jest dla opisu stanu granicznego, jest on identyczny ze stanem ciała doskonale sztywno–plastycznego.

W praktyce obciążenie graniczne zostanie zrealizowane jedynie wtedy, gdy odkształcenia sprężysto–plastyczne, wywołane mniejszym obciążeniem, nie spowodują w stopniu odczuwalnym zmiany geometrii konstrukcji. Może to zostać sprawdzone za pomocą analizy sprężysto–plastycznej krok za krokiem lub, stosując rachunek odkształceń, tuż przed teoretycznym zniszczeniem. W przypadku mostowych konstrukcji murowanych należy dodatkowo założyć, że żadne zjawisko niestabilności (np. podpór) nie zakłóci powstawania mechanizmu plastycznego zniszczenia sklepienia.

Model doskonale sztywno–plastyczny pokazuje kierunek rzeczywistego obciążenia granicznego. Analiza postgraniczna pozwala określić stosunek między parametrem obciążenia λ i przemieszczeniem charakterystycznym δ . Na rys. 13 przedstawiono krzywą rosnącą, pokazującą, że mechanizm zniszczenia powoduje zmianę kształtu, która wzmacnia konstrukcję i którą czasami nazywamy zgniotem geometrycznym. Konstrukcja jest stabilna pod obciążeniem granicznym i większym, jednak odciążenie pociąga za sobą duże odkształcenia trwałe, które najczęściej uniemożliwiają użytkowanie konstrukcji. Krzywa malejąca wykazuje, że przeciwnie, niestabilność konstrukcji pod obciążeniem granicznym doprowadza najczęściej do zniszczenia katastroficznego. Ponadto teoretyczne obciążenia graniczne w takich przypadkach najczęściej nie zostają osiągnięte, ponieważ odkształcenia sprężysto–plastyczne powodują powstanie wcześniej niestateczności ogólnej (punkt A na rys. 13).

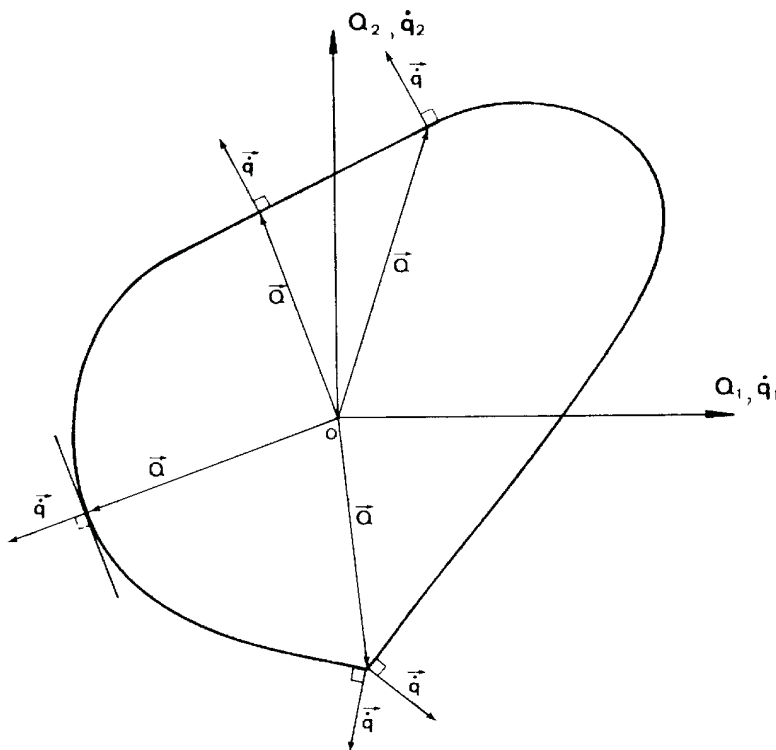


Rys.13. Zależność parametru obciążenia i przemieszczenia ($\lambda - \delta$)

Fig.13. Parametr load and characteristic ($\lambda - \delta$) relationship

Mechaniczne zachowanie się elementu konstrukcji doskonale sztywno–plastycznej można przedstawić geometrycznie (rys. 14). W przestrzeni naprężeń Euklidesa stan naprężenia jest określony przez współrzędne Q_1, Q_2, Q_n . Wektor naprężenia przedstawiony jest przez \bar{Q} . Tej przestrzeni odpowiada przestrzeń prędkości odkształcenia, gdzie wektory prędkości odkształcenia \dot{q} mają składowe $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ w odniesieniu do

tych samych osi. Funkcja rozproszenia $D(\bar{q})$ elementu konstrukcji doskonale sztywno–plastycznej daje wartość, przy której energia jest rozproszona przez proces płynięcia plastycznego, opisanego prędkością odkształcenia \bar{q} . Funkcja ta jest funkcją nieujemną.



Rys.14. Mechaniczne zachowanie się elementu konstrukcji doskonale sztywno - plastycznej
Fig.14. Mechanical behaviour element of perfectly rigid - plastic structure

W plastyczności doskonałej nie zależy ona od odkształceń plastycznych wcześniejszych. Ponadto, brak lepkości implikuje, że funkcja ta jest jednorodna pierwszego rzędu w \bar{q} , to znaczy, że:

$$D(c\bar{q}) = cD(\bar{q}) \quad \text{dla } c > 0 . \quad (45)$$

Stan naprężenia \bar{Q} jest „plastycznie dopuszczalny”, jeżeli spełniona jest nierówność:

$$\bar{Q}\bar{q} \leq D(\bar{q}) \quad (46)$$

dla całej prędkości odkształcenia \bar{q} (zasada pracy maksymalnej Hilla). Nierówność (46) określa charakter elementu konstrukcji doskonale plastycznej. Stan naprężenia, który spełnia (46) dla całego \bar{q} , nie może spowodować płynięcia plastycznego. Natomiast, jeżeli płynięcie plastyczne \bar{q} może wystąpić w wyniku powstawania stanu naprężenia \bar{Q} ,

to wówczas zależność (46) jest spełniona jako równanie. Prawo płynięcia wynikające z (46) jest dokładnie opisane w wielu dostępnych podręcznikach.

Analiza graniczna konstrukcji doskonale sztywno-plastycznych stawia sobie następujący problem podstawowy: jeżeli jakaś konstrukcja doskonale sztywno-plastyczna pozostaje sztywna pod obciążeniem $P_\alpha(x)$, należy znaleźć współczynnik $\lambda_j > 1$ taki, żeby płynięcie plastyczne było możliwe pod obciążeniem $\lambda_j P_\alpha(x)$ i niemożliwe pod wszelkimi obciążeniami $\lambda P_\alpha(x)$, gdzie $\lambda < \lambda_j$. Współczynnik λ_j nazywany jest współczynnikiem obciążenia granicznego.

Założenia podstawowe, stosowane w obliczeniu obciążenia granicznego konstrukcji doskonale sztywno-plastycznych są następujące:

- pole naprężeń $Q_j(x)$ jest „statycznie dopuszczalne”, jeżeli spełnia warunki równowagi;
- pole naprężeń jest „plastycznie dopuszczalne”, jeżeli nie narusza ono warunków plastyczności w żadnym punkcie konstrukcji;
- pole naprężeń nazwane jest „dopuszczalnym”, jeżeli jest jednocześnie statycznie i plastycznie dopuszczalne. W tym przypadku obciążeniu przyporządkowany jest tzw. parametr statyczny lub multiplikator statyczny zapisywany jako λ_- ;
- pole prędkości odkształcenia $\dot{q}_j(x)$ jest „kinematycznie dopuszczalne”, jeżeli pochodzi z pola prędkości przemieszczenia $p_\alpha(x)$, które spełnia warunki kinematyczne;
- pole prędkości jest „plastycznie dopuszczalne”, jeżeli:
 - pole prędkości jest takie, że energia sił zastosowanych jest dodatnia,
 - należy ono do zakresu, w którym została określona funkcja rozproszenia,
- pole prędkości odkształcenia będzie „dopuszczalne”, jeżeli jest jednocześnie kinematycznie i plastycznie „dopuszczalne”. W tym przypadku z równania rozproszonej energii równej pracy sił zastosowanych przy zniszczeniu określamy parametr (multiplikator) kinematyczny, zapisywany jako λ_+ .

Podstawową nierównością analizy granicznej [14, 15] jest:

$$\lambda_- \leq \lambda_j \leq \lambda_+ \quad (47)$$

a z niej wynika, że parametr n obciążenia musi się zawierać w przedziałach: $0 < n < \infty$ i można przedstawić dwa twierdzenia: „twierdzenie statyczne” i „twierdzenie kinematyczne”.

Twierdzenie statyczne „o obciążeniach bezpiecznych”

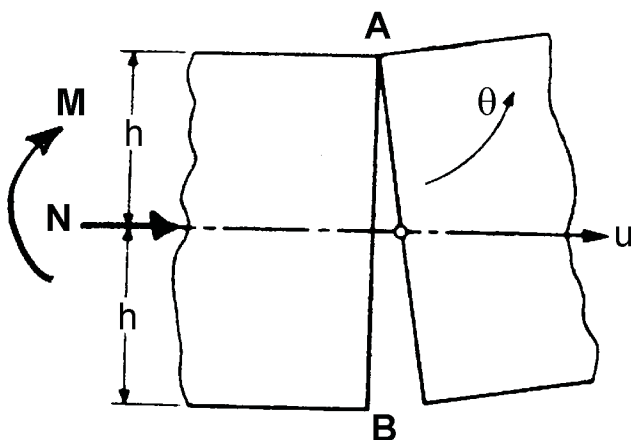
Jeżeli na każdym etapie obciążenia możliwe jest znalezienie pola obciążeń „dopuszczalnych” pod tymi obciążeniami, konstrukcja wytrzyma to obciążenie.

Twierdzenie kinematyczne „o obciążeniach niebezpiecznych”

Jeżeli na jakimkolwiek etapie obciążenia możliwe jest znalezienie pola prędkości odkształceń „dopuszczalnych”, którego energia obciążeń przewyższa energię rozproszenia, konstrukcja nie wytrzyma obciążenia.

Przy obliczaniu mostowych konstrukcji murowanych można wprowadzić uproszczenia:

- materiał charakteryzuje się ograniczoną wytrzymałością na ściskanie i zerową na rozciąganie,
- jedyny ruch względny bloków, w geometrii pierwotnej, jest obrotem jednej z dwóch krawędzi i wyklucza wszelki poślizg względny (rys. 15).



Rys. 15. Ruch względny bloków
Fig. 15. Relative movement of blocks

Ruch względny dwóch bloków można opisać w formie:

$$u > 0 \quad |\theta| = \frac{u}{h}, \quad (48)$$

gdzie:

- $2h$ – wysokość bloków,
- θ – prędkość względna obrotu wokół krawędzi A,
- u – prędkość względna środków ciężkości G płaszczyzn przyległych.

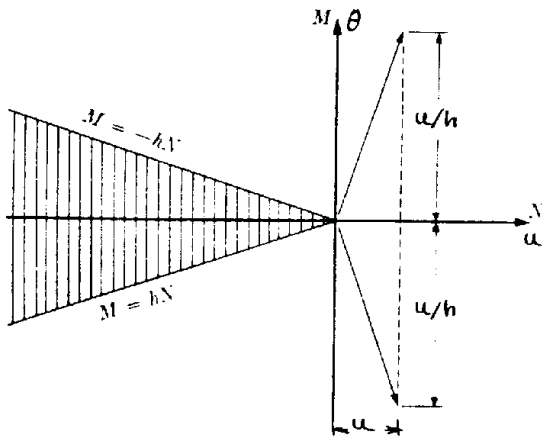
Siła normalna N jest przekazywana w punkcie A i wywołuje moment zginający:

$$M = \pm Nh. \quad (49)$$

Naprężenia wywołane przez M i N , przekazywane są przez spoinę, są więc położone na lub wewnątrz dwóch promieni (rys. 16) określonych dla $N \leq 0$ (ściskanie) przez

wzór (49). Należy sprawdzić, czy dla każdej pary M, N położonej na jednym z tych promieni, składowe u i θ ruchu, podane w (48), mogą być uważane jako składowe wektora \vec{q} prędkości odkształcenia, powiązane z wektorem naprężenia \vec{Q} składowych M i N . Praca wirtualna przedstawia się jako:

$$w_i = M\theta + Nu \quad (50)$$



Rys.16. Naprężenia wywołane przez M i N w spoinie
Fig.16. Stresses in the joint due to M and N

Osobliwość polega na tym, że energia rozproszona w dowolnym mechanizmie jest stale zerowa, ponieważ:

$$D = |M||\theta| - u|N| = 0 \quad (51)$$

bowiem albo $M = \pm Nh$ i (49) jest spełnione, albo $|M| < h|N|$, $N \leq 0$ i $\theta = u = 0$.

6. PRAKTYCZNE METODY OKREŚLANIA STATECZNOŚCI SKLEPIEŃ

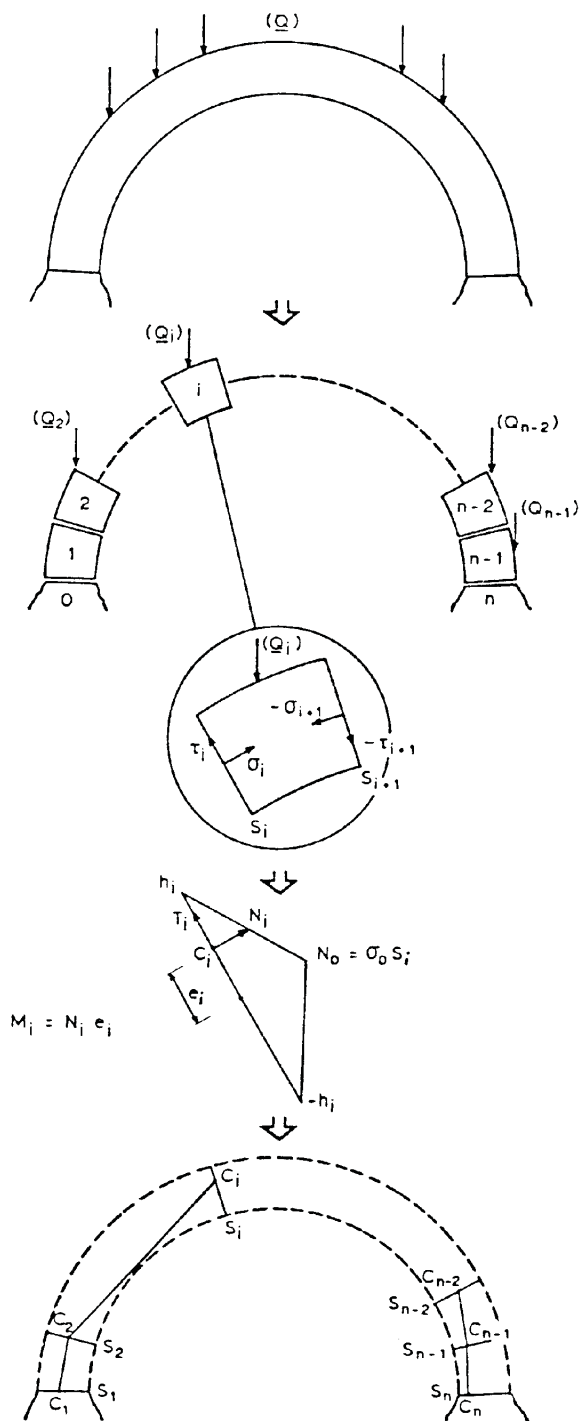
6.1. INFORMACJE WSTĘPNE

Przedstawione w poprzednich rozdziałach teoretyczne rozważania wymagają pewnych uproszczeń w celu ich wykorzystania do celów praktycznych.

Można powiedzieć, że aby sklepienie było stateczne pod obciążeniem Q , konieczne jest, by stan naprężeń spełniał:

- 1° warunki równowagi w każdym punkcie,
- 2° kryteria wytrzymałościowe dla materiałów w każdym punkcie,
- 3° warunki graniczne, które mogą występować jedynie na konturach sklepienia.

Propozycja algorytmu obliczania sklepień wg [16] przedstawiona jest na rys. 17.

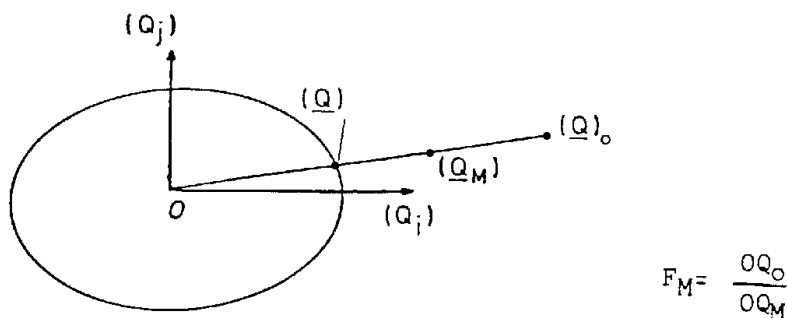


Rys.17. Algorytm obliczania sklepień wg [16]
 Fig.17. Algorithm of vault calculation [16]

Warunek stanu stateczności jest osłabiony dwukrotnie:

- najpierw opisując jedynie równowagę globalną każdego z bloków,
- następnie opisując równowagę spoin.

Jest oczywiste, że jeżeli nie istnieje linia środków ciśnień, spełniająca na każdej spoinie kryterium globalne w (N, M, T) , sklepienie jest z pewnością niestateczne. Można w sposób ogólny zdefiniować współczynnik pęknięcia (który nie jest tożsamy ze współczynnikiem bezpieczeństwa). Jest on stosunkiem obciążenia granicznego, pod którym sklepienie znajduje się w stanie granicznym stateczności i obciążenia rzeczywistego (rys. 18).



Rys.18. Współczynnik pęknięcia [16]

Fig.18. Coefficient of cracking [16]

W obliczeniach poszukujemy obciążeń, przy których sklepienie jest niestateczne. Stosując zasadę prac wirtualnych, możliwe jest przejście od naprężeń (sił N, M, T) do prędkości. Zakłada się, że mechanizm zniszczenia sklepienia jest mechanizmem pęknięcia i bloki obracają się wzajemnie względem siebie. W tym mechanizmie praca sił wewnętrznych ogranicza się do pracy sił w „spoinach pęknięcia” (fr. *joints de rupture*), która zależnie od pola prędkości może ulec zwiększeniu do wartości energii rozproszenia. Jeżeli praca sił zewnętrznych przekracza energię rozproszenia, to sklepienie jest z pewnością niestateczne. Podejście to jest bardzo proste i prowadzi do minimalizacji energii rozproszenia w określonych warunkach. Rozwiązanie prowadzi do mechanizmu składającego się z 4, 5, 6 lub 7 bloków, co potwierdzają wszystkie doświadczenia i obserwacje zagrożonych obiektów rzeczywistych.

6.2. METODA LINII ŚRODKÓW CIŚNIEŃ

Konstrukcja sklepienia zostaje podzielona na bloki, zawarte między przekrojami poprzecznymi S_i , które tworzą zbiór przekrojów $\mathcal{F} = (S_i)$ przy czym $i \in J$. Liczba przekrojów w analizie sklepienia może być skończona lub nieskończona. Przykładowo może być tak, że:

- S_i i J są skończone, tworzą zbiór liczb całkowitych od 1 do N ;
- S_i i J są nieskończone, przekroje (S_i, S_p) są skrajnymi przekrojami na lewo lub prawo od klucza sklepienia.

W analizie obliczeniowej rozpatrywane są na ogół przekroje normalne do osi sklepienia, które to przekroje można nazwać spoinami przez analogię do kierunku i kształtu spoin konstrukcji murowanej. Żeby sklepienie było stateczne pod obciążeniem Q , potrzeba, aby istniał stan naprężeń, spełniający warunki 1°, 2°, 3°. Koniecznym jest, aby w każdym punkcie przekroju S_i zbioru \mathcal{F} istniał taki stan naprężeń normalnych σ i stycznych τ , żeby każdy blok, ograniczony przez dwa kolejne przekroje S_i i S_{i+1} , znajdował się w równowadze pod wpływem sił oddziaływujących na ten blok i aby były spełnione kryteria wytrzymałościowe.

Jest to osłabienie warunków 1°, 2°, 3°. Obciążenie Q , dla którego spełnione są warunki w zbiorze przekrojów S_i , niekoniecznie musi być możliwe do przeniesienia przez sklepienie (obciążenie potencjalnie przenoszone). Natomiast jeżeli warunki te nie są spełnione, to nie jest ono przenoszone. Można zatem twierdzić, że jeżeli znajdziemy obciążenie Q , dla którego warunek nie jest spełniony, wtedy Q znajduje się na zewnątrz wypukłego zbioru obciążeń granicznych. Żeby otrzymać takie obciążenie Q , trzeba poszukiwać wartości maksymalnej obciążenia, przy której ten warunek jest spełniony. Aby uzyskać najlepsze wyniki, należy poszukiwać zbioru \mathcal{F} przekrojów S_i najmniej korzystnych, tj. takiego zbioru, który daje najmniejszą majorantę. Związki między siłami i naprężeniami są następujące:

$$N = \iint_S \sigma \, dS, \quad T = \iint_S \tau \, dS, \quad M = \iint_S \sigma y \, dS, \quad (52)$$

gdzie:

y – jest odległością od środka ciężkości przekroju,

τ – jest składową naprężenia statycznego w płaszczyźnie normalnej do osi sklepienia,

S – pole przekroju.

Naprężenia normalne σ i styczne τ , występujące w przekroju S_i , muszą spełniać kryteria wytrzymałościowe: a) ściskania – rozciągania oraz b) tarcia.

a) Kryterium wytrzymałościowe ściskania – rozciągania:

$$|M| \leq Nh \left(1 - \frac{N}{\sigma_0 S} \right), \quad (53)$$

gdzie:

h – połowa wysokości przekroju,

σ_0 – wytrzymałość na ściskanie bloku.

W nierówności (53) nie uwzględniono efektu siły tnącej. Jednakże praktyka obliczeniowa wykazała, że wpływ siły tnącej jest rzędu 2 ÷ 3 %, więc w obliczeniach inżynierskich można go pominąć.

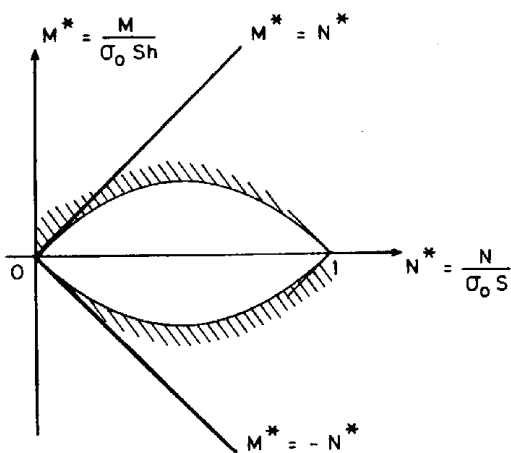
b) Kryterium tarcia:

$$|T| \leq N \operatorname{tg} \varphi \quad (54)$$

Interpretację nierówności (53) i (54) przedstawiono na rys. 19 i 20. Nierówność (53) pociąga nierówność (55)

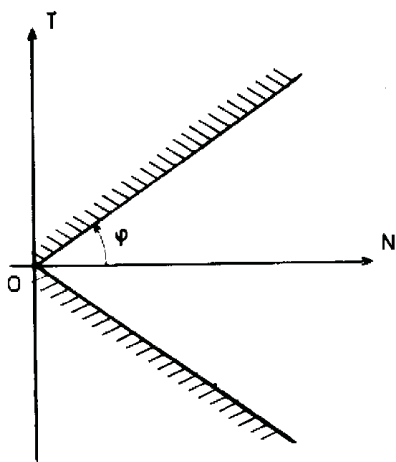
$$|M| \leq Nh \quad (55)$$

ekwiwalentną dla (53) przy wytrzymałości kamienia na ściskanie osiowe σ_0 , które ma bardzo dużą wartość.



Rys.19. Geometryczna interpretacja nierówności (53)

Fig.19. Geometrical interpretation of inequality (53)



Rys.20. Geometryczna interpretacja nierówności (54)

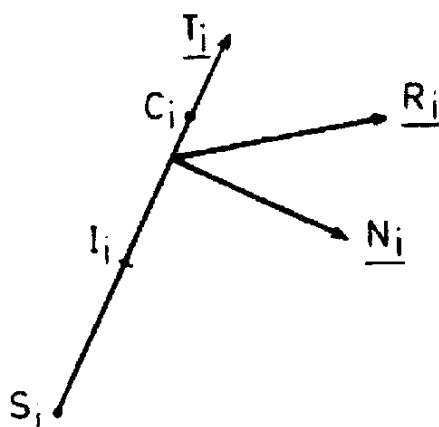
Fig.20. Geometrical interpretation of inequality (54)

Można więc stwierdzić, że sklepienie będzie stateczne pod obciążeniem Q , gdy na każdy przekrój S_i zbioru \mathcal{F} działają siły wewnętrzne N_i, T_i, M_i , spełniające równania równowagi oraz nierówności (53) i/lub (54) w zależności od rozpatrywanego przekroju. Warunek ten jest nowym osłabieniem warunku poprzedniego z racji braku równoważności kryteriów dla sił i dla naprężeń. Obciążenie maksymalne Q_M , spełniające ten warunek, dostarcza majorantę F_M dla F (współczynnika pęknięcia):

$$F_M = \frac{Q_M}{Q} . \quad (56)$$

Jeżeli $F_M < 1$, równowaga sklepienia w konfiguracji początkowej jest niemożliwa.

Siły N_i i T_i dają wypadkową siłę R_i , przyłożoną w spoinie S_i w punkcie C_i , nazywanym środkiem ciśnienia na spoinę (rys. 21). Linia środków ciśnienia kojarzona ze zbiorem \mathcal{F} jest linią, która łączy zbiór punktów C_i gdzie $i \in J$. Linia ta nie może być utożsamiana z linią ciśnień, która jest obwiednią wypadkowych R_i .



Rys.21. Środek ciśnienia na spoinę
Fig.21. Centre of pressure onto joint

Jeżeli J jest zbiorem skończonym, to linia środków ciśnień jest wieloboczna, zaś gdy J jest zbiorem nieskończonym (S_l, S_p), jest krzywą parametryczną, która może mieć punkty nieciągłości będące skutkiem występowania sił skupionych. Położenie środka ciśnienia C_i , na spoinie S_i , o środku I_i oraz wysokości $2h_i$, określone jest przez

$$I_i C_i = \frac{M_i}{N_i} .$$

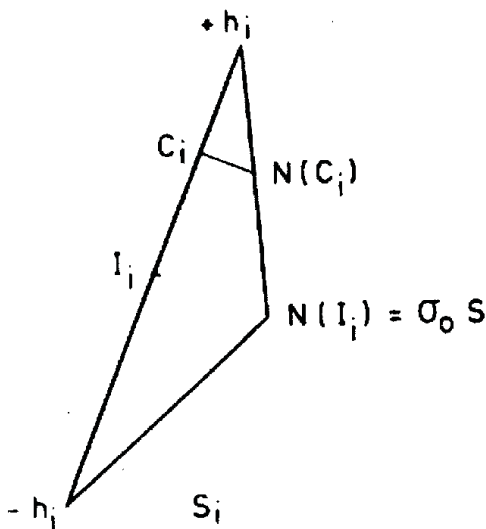
Warunek (53) można zapisać:

$$\left. \begin{array}{l} I_i C_i = \frac{|M_i|}{N_i} \leq h_i \left(1 - \frac{N_i}{\sigma_0 S_i} \right) \quad \text{jeśli } N_i > 0 , \\ I_i C_i \leq h_i \quad \text{jeśli } N_i = 0 . \end{array} \right\} \quad (57)$$

Oznacza to, że środek ciśnienia C_i nie może być zbyt odległy od środka spoiny. Odległość $I_i C_i$ jest tym mniejsza, im większa jest siła N_i . Ponadto siła N_i powinna być dodatnia. Warunek (57) można też zapisać:

$$\left. \begin{aligned} N_i \leq N_i(C_i) &= \sigma_0 S_i \left(1 - \frac{I_i C_i}{h_i} \right) && \text{jeśli } N_i > 0, \\ I_i C_i &\leq h_i && \text{jeśli } N_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Interpretację geometryczną tego warunku przedstawiono na rys. 22.



Rys.22. Interpretacja geometryczna warunku (58)

Fig.22. Geometrical interpretation of condition (58)

W szczególności, jeżeli σ_0 jest bardzo duże (relatywnie „nieskończone”), wtedy $\frac{M_i}{N_i} \leq h_i$ i $N_i \geq 0$, co oznacza, że środek ciśnienia powinien znajdować się wewnątrz

sklepienia i że siła normalna w spoinie S_i powinna być dodatnia. Z warunku (54) wynika:

$$|T| \leq N_i \operatorname{tg} \varphi, \quad (59)$$

a to oznacza, że wypadkowa R_i nie powinna być nachylona więcej niż pod kątem φ do normalnej n_i przy spoinie S_i .

Drugi, osłabiony warunek stateczności sklepienia można wyrazić następująco: aby sklepienie było stateczne pod obciążeniem Q , konieczne jest, dla jakiegokolwiek zbioru \mathcal{F} spoin istnienie co najmniej jednej linii środków ciśnienia, spełniającej warunki (58) i (59).

Najczęściej spotykane sklepienie obustronnie utwierdzone, będące konstrukcją trzykrotnie statycznie niewyznaczalną, posiada krzywoliniową linię środków ciśnienia. Jest ona określona przez trzy parametry, którymi mogą być:

- siła normalna H przy kluczu, nazywana naciskiem poziomym przy kluczu,
- siła styczna V przy kluczu, nazywana naciskiem pionowym przy kluczu,
- moment zginający M w przekroju klucza.

Zamiast M można również przyjąć współrzędną z punktu K przejścia linii w przekroju. Spośród linii środków ciśnień ściskających, zawartych wewnątrz sklepienia, istnieje jedna odnosząca się do nacisku poziomego minimalnego i jedna linia nacisku poziomego maksymalnego. Oznaczając punkt podniebienia A lub grzbietu B sklepienia, należący do spoiny o współrzędnej krzywoliniowej S_a (odpowiednio S_b), istnieje wewnątrz sklepienia co najmniej jedna linia środków ciśnienia wszędzie ściskającego, jeżeli istnieje punkt K współrzędnej z , dla którego:

$$H_1(z) \leq H_2(z) , \quad (60)$$

gdzie:

$H_1(z) = \text{Max}\{ H(z, S_a, S_b) \}$; A i B są to punkty krańcowe dla położenia linii nacisku minimalnego, przechodzące przez K , $S_a, S_b \in (S_p, S_l)$,

$H_2(z) = \text{Min}\{ H(z, S_a, S_b) \}$; A i B są to punkty krańcowe dla położenia linii nacisku maksymalnego, przechodzące przez K , $S_a, S_b \in (S_p, S_l)$.

Otrzymujemy więc:

$$H_{\min}(z) = H_1(z) \quad \text{i} \quad H_{\max}(z) = H_2(z) . \quad (61)$$

Powyższe postępowanie może być również zastosowane do skończonego podzbioru \mathcal{F}_n ze zbioru \mathcal{F}_s , zawierającego n spoin. To znaczy, że $H_{\min} \mathcal{F}_n(z)$ i $H_{\max} \mathcal{F}_n(z)$ są naciskami skrajnymi dla zbioru spoin \mathcal{F}_n .

Możemy zapisać:

$$\left. \begin{aligned} H_{\min}(z) &\geq H_{\min} \mathcal{F}_n(z) , \\ H_{\max}(z) &\leq H_{\max} \mathcal{F}_n(z) , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\min} \mathcal{F}_n(z) &= H_{\min}(z) , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\max} \mathcal{F}_n(z) &= H_{\max}(z) . \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Dysponujemy zatem prostym środkiem określania linii skrajnych nacisków. Można też stwierdzić, że jeżeli brak jest linii wewnętrznej przy podzbiorze \mathcal{F}_n , nie ma również linii wewnątrz sklepienia.

Zespół linii środków ciśnienia wewnątrz sklepienia (zbioru \mathcal{F}_s) i wszędzie ściskających jest określony przez zbiór w przestrzeni (z, H, V) , oznaczony $\zeta(z, H, V)$ i nazywany zbiorem „potencjalnej stateczności”. Analiza obliczeniowa wykazuje, że przy spełnieniu drugiego osłabionego warunku stateczności, istnieje tylko jedna linia środków ciśnień wewnątrz sklepienia. Linia ta spełnia zatem warunek $H_{\min} = H_{\max}$. Jest to więc linia nacisku poziomego minimalnego i maksymalnego. Istotną jej właściwością jest to, że posiada co najmniej cztery punkty styczności z podniebieniem i grzbietem. Przekrój, gdzie istnieje styczność, znajduje się w rotacji względnej w stosunku do przekroju sąsiedniego, ponieważ środek rotacji znajduje się na grzbiecie lub na podniebieniu. Wynika z tego, że „mechanizm zniszczenia” sklepienia jest mechanizmem pięciu bloków obracających się wokół czterech krawędzi.

„Mechanizm zniszczenia” napisano w cudzysłowie, ponieważ teoretycznie określony mechanizm niekoniecznie odpowiada rzeczywistości, niemniej jest podobny do tych, potwierdzonych doświadczeniami [9]. Mechanizm zniszczenia jest nieco inny, gdy mamy do czynienia z problemem symetrycznym, w którym istnieje co najmniej pięć punktów styczności i jeden z nich znajduje się w kluczu, lub sześć punktów styczności, z których żaden nie występuje w kluczu.

Powyższe spostrzeżenia pozwalają w przypadku sklepienia opisanego przez geometrię, obciążenie Q i zbiór $\zeta(z, H, V)$, określić linie wewnętrznych środków ciśnień ściskających dla zbioru spoin. Linie środków ciśnień (M_i, N_i) , gdzie $i \in J$, skojarzoną ze zbiorem \mathcal{F}_n spoin, można opisać funkcją:

$$i \rightarrow \frac{\sigma_i}{\sigma_0} = \frac{N_i h_i}{S_i \sigma_0} \left/ \left(h_i - \frac{M_i}{N_i} \right) \right. . \quad (63)$$

Funkcja ta ma maksimum $\lambda_{\mathcal{F}_n}$ przynajmniej dla jednej spoiny ze zbioru $\lambda_{\mathcal{F}_n}$ i jest funkcją (z, H, V) . Jeżeli minimum $\lambda_{\mathcal{F}_n}(z, H, V)$ w zbiorze ζ linii ciśnień wewnętrznych i ściskających jest mniejsze od 1, wówczas możliwe jest znalezienie linii spełniającej warunek (57), a wartość minimalna jest odwrotnością współczynnika pęknięcia, zależnego od warunku (57).

Łatwo zauważyć, że jeżeli linia środków ciśnienia (z, H, V) jest określona dla obciążenia Q , linia (z, kH, kV) odpowiada obciążeniu kQ . Linie te są podobne i wartości funkcji $\lambda_{\mathcal{F}_n}$, dotyczące tych linii, znajdują się w stosunku k . Jeżeli więc minimum jest mniejsze od 1, łatwo jest obliczyć linie nacisków poziomych, minimalnego i maksymalnego, spełniające warunek (57). Są to linie, których $\lambda_{\mathcal{F}_n} = 1$.

6.3. ANALIZA STATECZNOŚCI SKLEPIEŃ ZA POMOCĄ MECHANIZMU NISZCZENIA

Warunkiem koniecznym stateczności pod obciążeniem Q jest istnienie w każdym przekroju zbioru S_i stanu naprężeń normalnych σ i stycznych τ , utrzymującego równowagę bloku ograniczonego przekrojami S_i i S_{i+1} . Naprężenia wywołane są takim obciążeniem, które spełnia określone wcześniej warunki wytrzymałościowe:

$$\underline{R}_i Q_i, (\sigma, \tau)_{S_i}, (\sigma, \tau)_{S_{i+1}} = 0, \quad (64)$$

$$M_i Q_i, (\sigma, \tau)_{S_i}, (\sigma, \tau)_{S_{i+1}} = 0, \quad (65)$$

$$f((\sigma, \tau)_{S_i}) \leq 0 \quad \text{oraz} \quad f((\sigma, \tau)_{S_{i+1}}) \leq 0, \quad (66)$$

gdzie Q_i jest obciążeniem działającym na blok i , \underline{R}_i wypadkową, a M_i momentem w odniesieniu do jakiegokolwiek punktu 0 sił zaznaczonych w nawiasach.

Równania (64) i (65) wyrażają równowagę bloku i . Zgodnie z zasadą prac wirtualnych, praca sił działających na blok i jest zerowa. Blok i obraca się względem bloku $i-1$ zgodnie z ruchem określonym przez środek ruchu obrotowego Ω_i i prędkość kątową ω_i . Mamy zatem równoważność (64) i (65) \Leftrightarrow (67) z:

$$\left. \begin{array}{l} \wedge i \in (1, n) \\ P_i(Q_i, (\sigma, \tau)_{S_i}, (\sigma, \tau)_{S_{i+1}}, (\Omega_k, \omega_k)_{k=1 \div i}) = 0 \\ \wedge \Omega_k, \omega_k \quad k = 1 \div i \end{array} \right\} \quad (67)$$

$P_i(Q_i, (\Omega_k, \omega_k)_{k=1 \div i})$ jest pracą sił działających na blok i , $\wedge i \in (1, n)$,

$$P_i(Q_i, (\Omega_k, \omega_k)_{k=1 \div i}) = - \int_{S_i} \sigma_i v_{n_i} dS + \int_{S_{i+1}} \sigma_{i+1} v_{n_{i+1}} dS - \int_{S_i} \tau_i v_{t_i} dS + \int_{S_{i+1}} \tau_{i+1} v_{t_{i+1}} dS, \quad (68)$$

gdzie:

v_{n_i} – absolutna prędkość normalna w punkcie i ,

v_{t_i} – absolutna prędkość styczna w punkcie i ,

v_{n_i} oraz v_{t_i} są funkcjami Ω_k i ω_k , $k = 1 \div i$.

Sumując dla n bloków otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^n P_i(Q_i, (\Omega_k, \omega_k)_{k=1 \div i}) = - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{S_i} (\sigma_i [v_{n_i}] + \tau_i [v_{t_i}]) dS, \quad (69)$$

gdzie:

$$[v_{n_i}] = v_{n_i} - v_{n_{i-1}},$$

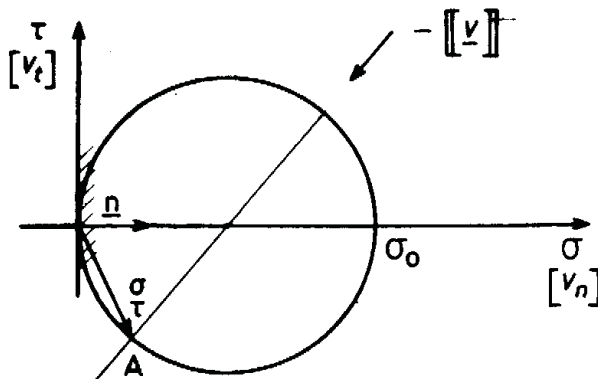
$$[v_{t_i}] = v_{t_i} - v_{t_{i-1}},$$

$$v_{n_0} = v_{t_0} = v_{n_{n+1}} = v_{t_{n+1}} = 0 \quad (\text{przyczółki pozostają nieruchome}).$$

Pierwszy wyraz (69) jest pracą obciążeń oddziaływujących na sklepienie w rozważanym polu prędkości. Warunkiem koniecznym stateczności jest, aby na każdej spoinie S_i zachodził rozdział (σ, τ) , spełniający (69) pod (66) $\wedge (\Omega_k, \omega_k)$, $k = 1 \div n$.

Wprowadzając funkcję $\pi([\underline{v}])$ określoną przez $\pi([\underline{v}]) = \sigma_0 \frac{-[v_n] + \sqrt{[v_n]^2 + [v_t]^2}}{2}$, całka $P([v_n]) = \int_{S_i} \pi([v_i]) dS$ z zachowaniem warunku (66) przedstawia największy przyrost wyrazu $-\int_{S_i} (\sigma_i [v_{n_i}] + \tau_i [v_{t_i}]) dS$ (rys. 23). Z powyższego wynika warunek konieczny stateczności sklepienia:

$$P(Q, (\Omega_k, \omega_k)_{k=1 \div n}) \leq \sum_{i=1}^n P([v_i]) \wedge (\Omega_k, \omega_k), k=1 \div n \quad (70)$$



Rys.23. Zależność $\tau - \sigma$
Fig.23. Relationship between $\tau - \sigma$

Żeby sklepienie było stabilne, potrzeba, by w każdym ruchu obrotowym bloków sztywnych (Ω_k, ω_k) , $k=1 \div n$, praca sił zewnętrznych była mniejsza od $\sum_{i=1}^n P([v_i])$, sumy całek $\pi([\underline{v}])$ w przekrojach S_i , którą zgodnie z [16] można nazwać energią rozpraszaną w mechanizmie. Wyrównując te dwie wielkości, uzyskujemy majorantę Q_M skrajnego Q . Wprowadzony zostaje współczynnik F_+ , określony jako $F_+ = Q_+ / Q$, który jest majorantą współczynnika pęknięcia F_M . W sposób klasyczny, zaproponowany przez Salençon [14], przy określaniu stanu granicznego otrzymujemy:

$$F_+ = \text{Inf}_{(\Omega_k, \omega_k)} \left(\sum_{i=1}^n P([v_i]) \right) / P(Q, (\Omega_k, \omega_k)_{k=1 \div n}), \quad (71)$$

gdzie zachodzi:

$$P(Q, (\Omega_k, \omega_k)_{k=1 \div n}) > 0 \quad \text{i} \quad v_{n_0} = v_{t_0} = v_{n_{n+1}} = v_{t_{n+1}} = 0. \quad (72)$$

Ponieważ $\sum_{i=1}^n P([\underline{v}_i])$ jest funkcją dodatnią, jednorodną, stopnia pierwszego, otrzymujemy:

$$F_+ = \text{Inf}_{(\Omega_k, \omega_k)} \left(\sum_{i=1}^n P([\underline{v}_i]) \right) \quad (73)$$

w przypadku:

$$P(Q, (\Omega_k, \omega_k)_{k=1 \div n}) = 1 \quad \text{i} \quad v_{n_0} = v_{t_0} = v_{n_{n+1}} = v_{t_{n+1}} = 0 \quad (74)$$

Rozwiązanie problemu polega na minimalizacji energii rozpraszanej pod pewnymi warunkami. Dokładniej należy wyznaczyć:

$$\text{Inf} \sum_{i=1}^n P([\underline{v}_i]), \quad i=1 \div n, \quad \text{oraz} \quad w_i, \lambda_i, \mu_i, \quad (75)$$

gdzie λ_i, μ_i są nieciągłościami prędkości normalnej i stycznej środka spoiny pod warunkiem:

$$P(Q, (\omega_i, \lambda_i, \mu_i)_{i=1 \div n}) \quad \text{oraz} \quad v_0 = v_{n+1} = 0. \quad (76)$$

Warunki te można także zapisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (X_i \omega_i + \alpha_i \lambda_i - \beta_i \mu_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (Y_i \omega_i + \beta_i \lambda_i + \alpha_i \mu_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (M_i \omega_i + N_i \lambda_i + T_i \mu_i) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

gdzie:

X_i, Y_i – współrzędne środka J_i spoiny S_i ,

α_i, β_i – kosinusy kierunkowe normalnych do spoiny S_i ,

oraz:

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \beta_i \left(\sum_{j=1}^n H_j \right) - \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n V_j \right), \\ T_i &= \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n H_j \right) - \beta_i \left(\sum_{j=1}^n V_j \right), \\ M_i &= \sum_{j=1}^n \mu_j - X_i \left(\sum_{j=1}^n V_j \right) + Y_i \left(\sum_{j=1}^n H_j \right), \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

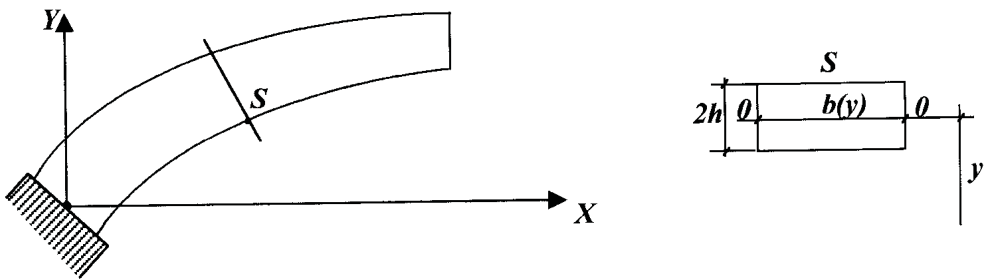
$z(H_j, V_j)$ i μ_j tj. elementami redukcyjnymi sił zewnętrznych, działających na blok j w O – środku skręcania.

6.4. PRZYKŁAD OKREŚLANIA STATECZNOŚCI

Dla przykładu dokonano analizy belki wspornikowej o przekroju S , pokazanej na rys. 24, której materiał spełnia następujące kryterium wytrzymałościowe:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{Sup}_{i=1+3} \{ \sigma_i (\sigma_i - \sigma_0) \} , \quad \text{gdzie: } \underline{\underline{\sigma}}(x) \in G(x)$$

przy założeniu, że naprężenia ściskające są dodatnie (normalna na rozpatrywanym przekroju jest skierowana do wnętrza). Wysokość przekroju wynosi $2h$, szerokość $b(y)$. Przekrój posiada poziomą oś symetrii, która jest jednocześnie jego osią bezwładności.



Rys.24. Analizowana belka
Fig.24. The analysed beam

Określenie funkcji podparcia (utwierdzenia) Π

Jeżeli pole prędkości jest ciągłe i różniczkowalne, to Π jest określone przez:

$$\Pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}(\underline{x})) = \text{Sup}_{\underline{\underline{\sigma}}} \{ \text{tr}(-\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{d}}) \} , \quad \text{gdzie } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) ,$$

przy czym $\underline{\underline{d}}(\underline{x})$ jest tensorem prędkości deformacji w punkcie \underline{x} . Wynika z tego, że:

$$\Pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}(\underline{x})) = \sigma_0 (\text{Sup}(-d_1, 0) + \text{Sup}(-d_2, 0) + \text{Sup}(-d_3, 0)) ,$$

gdzie d_i są wartościami podstawowymi $\underline{\underline{d}}(\underline{x})$.

Jeżeli pole prędkości przedstawia nieciągłość prędkości $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}_2(\underline{x}) - \underline{v}_1(\underline{x})$ wzdłuż powierzchni normalnej \underline{n} , wówczas wiadomo, że:

$$\Pi(\underline{x}, \underline{v}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x})) = \Pi(\underline{x}, \underline{\underline{D}}(\underline{x}))$$

gdzie:

$$\underline{\hat{D}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} u_n & u_{t_1}/2 & u_{t_2}/2 \\ u_{t_1}/2 & 0 & 0 \\ u_{t_2}/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a u_n jest nieciągłością normalną, zaś u_{t_1} i u_{t_2} są nieciągłościami stycznymi. Wartości ogólne \underline{D} są:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{u_n - |u|}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{u_n + |u|}{2}.$$

Tylko λ_2 jest ujemna, więc:

$$\Pi(\underline{x}, \underline{v}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x})) = \sigma_0 \frac{|u| - u_n}{2}.$$

Warunek konieczny stateczności belki

Jeżeli istnieje pole prędkości dopuszczalne kinematycznie takie, że moc (praca) sił zewnętrznych w tym polu przewyższa moc rozpraszania (dysypacji), wystąpi niezgodność między równowagą konstrukcji i kryterium wytrzymałościowym.

Opis rozważanego pola prędkości:

$\underline{v} = 0$ – wszędzie przed spoiną S ,

$\underline{v} = \omega \underline{k} \wedge \underline{0M}$ – prędkość jest $\omega \underline{k}$ w koniunkcji z $\underline{0M}$ dla wszystkich punktów M leżących za S lub na S , 0 jest jakimkolwiek punktem.

Zgodnie z rys. 25, J jest środkiem ciężkości przekroju S , natomiast $(Jxyz)$ jest punktem odniesienia takim, że Jx jest normalne przy S i skierowane na zewnątrz. Nieciągłość prędkości można zapisać w punkcie $M(0, y)$ przekroju S :

$$\underline{v}(x, y) = \omega((y_0 - y)\underline{i} + (-x_0)\underline{j})$$

albo:

$$\underline{v}(x, y) = (\lambda - \omega y)\underline{i} + \mu \underline{j},$$

gdzie:

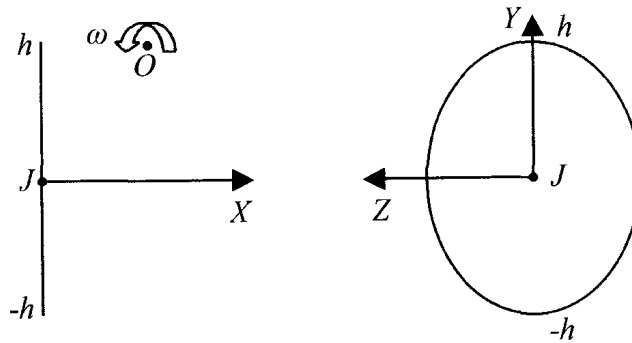
$$\lambda = \omega y_0, \quad \mu = -\omega x_0,$$

λ i μ są składowymi ruchu (nieciągłości prędkości) w punkcie J . Uwzględniając powyższe i wcześniejsze rozważania, energię dysypacji możemy zapisać w postaci:

$$\Pi(x, \omega, \lambda, \mu) = \frac{\sigma_0}{2} \left(\sqrt{(\lambda - \omega y)^2 + \mu^2} - (\lambda - \omega y) \right),$$

oraz:

$$P(\underline{v}) = \int_{-h}^h \Pi(y, \omega, \lambda, \mu) b(y) dy.$$



Rys.25. Przekrój i mechanizm obrotu bloków
Fig.25. Section and rotation mechanism of block

W przypadku, kiedy b jest stałe (np. przekrój prostokątny), otrzymujemy:

- 1) dla $\mu \neq 0$ i $\omega \neq 0$

$$P(\underline{v}) = P(\omega, \lambda, \mu) = -\frac{\sigma_0 b \mu^2}{4 \omega} \left[\varepsilon u \sqrt{1+u^2} + \varepsilon \operatorname{arcsch} u - u^2 \right]_{u_1}^{u_2},$$

gdzie $\varepsilon = 1$ gdy $\mu > 0$ i $\varepsilon = -1$ gdy $\mu < 0$ oraz $u_1 = \frac{\lambda + \omega h}{\mu}$, $u_2 = \frac{\lambda - \omega h}{\mu}$,

- 2) dla $\mu \neq 0$ i $\omega = 0$

$$P(0, \lambda, \mu) = \sigma_0 b h \left(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} - \lambda \right),$$

- 3) gdy $\mu = 0$

- jeśli $\lambda \leq -|\omega| h$ $P(\omega, \lambda, 0) = -2h\sigma_0 \lambda$,
- jeśli $-|\omega| h \leq \lambda \leq |\omega| h$ $P(\omega, \lambda, 0) = \frac{\sigma_0 |\omega|}{2} \left(h - \frac{\lambda}{|\omega|} \right)^2$,
- jeśli $|\omega| h \leq \lambda$ $P(\omega, \lambda, 0) = 0$.

Można wykazać, że funkcja ta jest wszędzie określona i ciągła poza punktem $(0,0,0)$, gdzie pochodna λ nie jest określona.

Praca sił zewnętrznych jest równa:

$$P_e = \int_{-h}^h -(\underline{\underline{\sigma}}(y) : \underline{n}) \cdot \underline{v}(y) b(y) dy,$$

zakładając $P_e = \int_{-h}^h -(\sigma_{xx}(\lambda - \omega y) + \sigma_{xy}\mu) b(y) dy$, będzie $P_e = M\omega - N\lambda - T\mu$,

$$z: \quad N = \int_{-h}^h \sigma_{xx} b(y) dy, \quad T = \int_{-h}^h \sigma_{xy} b(y) dy \quad i \quad M = \int_{-h}^h y \sigma_{xx} b(y) dy.$$

Z tego wynika, że konstrukcja z pewnością nie będzie stała, jeśli: $P_e > P(\omega, \lambda, \mu)$, czyli że: $M\omega - N\lambda - T\mu > P(\omega, \lambda, \mu)$. Oznacza to, że rozkład naprężeń σ i τ w przekroju S nie odpowiada N, T, M i nie spełnia kryterium wytrzymałościowego.

Rozpatrując przypadek, gdy $\omega > 0$, to ponieważ $P(\omega, \lambda, \mu)$ jest funkcją jednorodną pierwszego stopnia, uzyskujemy:

$$M - Ny_0 + Tx_0 > -\frac{\sigma_0 b}{4} x_0^2 (f(u_2) - f(u_1)),$$

gdzie:

$$f(u) = \varepsilon u \sqrt{1+u^2} + \varepsilon \operatorname{arcsinh} u - u^2.$$

Ta nierówność wyraża, że konstrukcja jest z pewnością niestateczna, jeżeli punkt w którym występują (M, N, T) znajduje się w półprzestrzeni nie zawierającej punktu $(0, 0, 0)$, ograniczonej płaszczyzną o równaniu:

$$M - Ny_0 + Tx_0 = -\frac{\sigma_0 b}{4} x_0^2 (f(u_2) - f(u_1)).$$

Uzyskujemy w ten sposób zbiór przestrzeni o 2 parametrach, która zawiera powierzchnię – obwiednię. Równanie parametryczne tej powierzchni ma postać:

$$N^* = -\frac{x_0^*}{4} (v_2 - v_1) = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sqrt{1+u_2^2} - \sqrt{1+u_1^2}}{u_2 - u_1},$$

$$T^* = -\frac{x_0^*}{2} \varepsilon \log \frac{v_1}{v_2},$$

$$M^* = -\frac{x_0^{*2}}{8} \left(u_2 v_1 - u_1 v_2 - \varepsilon \log \frac{v_1}{v_2} \right),$$

przy:

$$N^* = \frac{N}{2\sigma_0 b h} = \frac{N}{N_0}, \quad T^* = \frac{T}{\sigma_0 b h} = \frac{T}{T_0}, \quad M^* = \frac{M}{N_0 h}, \quad x_0^* = \frac{x_0}{h}, \quad y_0^* = \frac{y_0}{h} \quad \text{oraz}$$

$$u_1 = -\frac{y_0^* + 1}{x_0^*}, \quad u_2 = -\frac{y_0^* - 1}{x_0^*}, \quad v_1 = -u_1 + \varepsilon \sqrt{1+u_1^2} \quad i \quad v_2 = -u_2 + \varepsilon \sqrt{1+u_2^2}.$$

Zakres obciążeń (M, N, T) , dla których warunek konieczny stateczności konstrukcji jest spełniony w przekroju S , znajduje się wewnątrz bryły ograniczonej przez tę powierzchnię, która posiada 3 płaszczyzny symetrii, a mianowicie:

$$N^* = 0,5 ; \quad M^* = 0 ; \quad T^* = 0 .$$

Wiemy, że nie istnieją proste równania algebraiczne, opisujące M, N, T , zbliżone do tej powierzchni. Analizując mechanizmy, dla których ω lub μ jest równe zero, uzyskujemy przekroje tej powierzchni przez płaszczyzny $M^* = T^* = 0$, i tak otrzymujemy:

$$\text{dla } \omega = 0 \text{ elipsę o równaniu } (N^* - 0,5)^2 + 0,25T^{*2} = 0,25 .$$

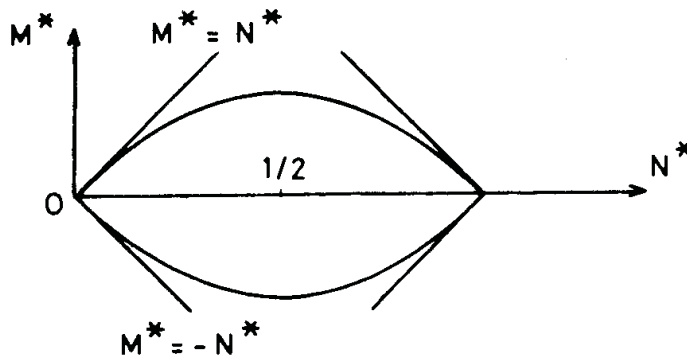
dla $\mu = 0$ dwa łuki paraboli o równaniach $N^*(N^* - 1) + |M^*| = 0$ rozpatrywane między punktami $N^* = 0$ i $N^* = 1$.

Na rys. 26 przedstawiono zakresy stateczności potencjalnej dla przekroju w płaszczyźnie (N^*, M^*) . Kiedy wytrzymałość na ściskanie σ_0 o zmierza do nieskończoności, warunek konieczny stateczności sprowadza się do:

$$|M^*| \leq N^* .$$

Proste $M^* = \pm N^*$ są styczne w 0 z dwoma łukami paraboli. W końcu można powiedzieć, że dla wszelkiego obciążenia (M, N, T) spełniającego warunek konieczny stateczności mamy:

$$N^*(N^* - 1) + |M^*| \leq 0 .$$



Rys.26 Zakresy potencjalnej stateczności dla przekroju w płaszczyźnie (M^*, N^*)
Fig.26. Ranges of potential stability for the section in plane (M^*, N^*)

Przedstawiona powyżej na przykładzie typowego sklepienia procedura na wzorach ogólnych pokazuje jak można wykorzystać wcześniej opisane hipotezy do praktycznego obliczania konstrukcji mostowych.

7. PODSUMOWANIE

Przedstawione rozważania opierają się na analizach wielu teoretyków oraz mają swoje potwierdzenie w wynikach badań doświadczalnych. Obliczanie zniszczenia (pęknięcia) umożliwia stwierdzenie nietrwałości obiektu, kiedy obciążenie jest na zewnątrz zbioru obciążeń potencjalnie przenoszonych lub kiedy współczynnik pęknięcia jest mniejszy od jedności.

Trwałość obiektu nie ogranicza się do trwałości sklepienia. Należałoby sprawdzić trwałość (stateczność) globalną obiektu, włączając do tego podpory i fundamenty, lecz w praktyce jest to rzecz bardzo trudna. Można jedynie analizować konstrukcję przez obliczanie części za częścią.

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Biliszczuk J., Onysyk J., Węgrzyniak M., Budyh L.*: Mosty murowane na Śląsku. Dziedzictwo kultury, które musi być zachowane. Inżynieria i Budownictwo, nr 6/2000
- [2] *Łagoda G.*: Kryteria oceny stanu technicznego murowanych mostów zabytkowych. Praca doktorska. Wydział Inżynierii Łądowej, Politechnika Warszawska, 1987
- [3] *Rybak M.*: Ogólna ocena obiektów mostowych i warunki poprawy. Konferencja naukowo-techniczna „Metody badań i ocena stanu technicznego mostów stalowych”, Gdańsk 1984
- [4] *Łagoda G., Łagoda M.*: Stan mostów murowanych w Polsce. Drogownictwo, nr 5/1993
- [5] *Łagoda G.*: Masonry bridge maintenance. International Bridge Conference, Materials and techniques for repair and rehabilitation of bridges, 2, Warszawa 1994
- [6] *Sacchi L. G.*: Il comportamento plastico dei materiali. ISMES, Bergamo 1981
- [7] *Belloti R., Rossi P.*: New aspects for evaluating the degree of safety in concrete structures subjected to multi axial stresses. IABSE Seminar, Bergamo 1974
- [8] *Franchi A., Gioda G., Genna F.*: Analisi delle strutture murarie piane e ad arco. Comportamento statico e sismico delle strutture murarie. Milan 1982
- [9] *Sacchi L. G.*: Les caractéristiques mécaniques des matériaux. Presses Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris 1983
- [10] *Hilsdorf H.K.*: Investigation into the failure mechanism of brick masonry loaded in axial compression. Johnson F. Ed., Gulf Publishing Co. 1969
- [11] *Sahlin S.*: Structural masonry. Prentice – Hall 1971
- [12] *Nova R., Sacchi L. G.*: A model of the stress - strain relationship of masonry structures. Journal Mechanic Theoretical and Applied, 1, 1983
- [13] *Page A. W.*: The biaxial compressive strength of brick masonry. Proceeding Institution of Civil Engineers, 2, 71, 1981

- [14] *Salençon J.*: Cours de calcul des structures anélastiques. Calcul a la rupture et analyse limite. Presses Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris 1981
- [15] *Save M., Massonnet C.*: Plastic analysis and design of plates, shells and disks. North Holland Publishing Co., Amsterdam 1972
- [16] *Coussy O., Salençon J.*: Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul a la rupture. Annales des Ponts et Chaussées, Paris 1979

STRENGTH ANALYSIS OF MASONRY ARCH BRIDGES

Abstract

Masonry arch bridges form an integral part of the Polish road and railway infrastructure. They are the oldest structure types in the bridge population with thousands still in service despite their age and the significant changes in loading conditions since their construction. The design of these structures was based on empirical rules and contemporary railway and road loads, which has resulted in structures with an inherent ability to withstand greater loads and extreme weathering conditions. Today many masonry arches carry a load that is radically different from that which existed when they were constructed.

In order that European roads and railways may accommodate increased axle loads, speeds and a greater volume of freight traffic, it is necessary to assess the load carrying capacity of existing masonry arch bridges. Assessment of masonry arch bridges is difficult as there is little knowledge or experience of the design of these structures to modern standards.

In addition, many masonry arches belong to the civil engineering heritage, and their substitution or refurbishment requires careful consideration with maintenance strategies adopted to promote solutions that preserve and restore these structures instead of their replacement. To provide confidence in the assessment result, reliable input parameters for the calculations are required. This paper gives suitable possibilities of the calculations methods for the assessment of the load carrying capacity of existing masonry arch bridges. The masonry criterion, which take its mechanical properties under consideration, are presented. The analysis was performed on the basis of Coulomb strength criterion including isotropy and anisotropy of masonry structure. The application of the limit load theory was discussed as well.

The practical issue of vaults stability determination methods are herein introduced. The well-known, but modified, pressure center line method and stability analysis based on destruction mechanism are presented. The use of destruction mechanism was exposed during vault stability finding.