

CZESŁAW MACHELSKI¹⁾
ROBERT TOCZKIEWICZ²⁾

PODATNOŚĆ POŁĄCZENIA STALOWEGO DŹWIGARA Z PŁYTĄ BETONOWĄ W MOSTACH ZESPOLONYCH

STRESZCZENIE. Praca dotyczy analizy sił wewnętrznych i przemieszczeń w dźwigarach głównych mostów wykonanych z belek stalowych, zespolonych w sposób podatny z betonową płytą pomostową. Omówiono w niej: sposoby konstruowania płyt pomostowych, stosowane rodzaje łączników zespalających, wyniki badań podatności zespolenia. Przedstawiono pięć modeli ujęcia zjawiska podatności zespolenia w dźwigarach zginanych. Skupiono się na rozwiązaniu problemu w postaci analitycznej - równań różniczkowych. Poddano analizie stosowane dwa ujęcia rozwiązania zagadnienia współdziałania elementów dźwigara zespolonego, dające w wyniku rozwiązania siły wewnętrzne lub przemieszczenia. Wykazano, że mieszane rozwiązanie jest efektywniejsze, daje bowiem dokładne wyniki, zarówno w zakresie sił wewnętrznych, jak i przemieszczeń. Analizę problemu z użyciem klasycznego parametru, charakteryzującego podatność zespolenia C_z , uzupełniono o własne wskaźniki μ oraz β . Wykazano, że wskaźniki μ i β dają informacje wyłącznie o rozkładzie naprężeń w przekroju poprzecznym dźwigara. Funkcje $C_z(x)$ i $M(x)$ mają istotny wpływ na rozkład sił wewnętrznych na całej długości dźwigara, a więc również na $\mu(x)$ i $\beta(x)$. Podane w pracy przykłady numeryczne dają obraz zależności pomiędzy $C_z(x)$ i $M(x)$ oraz $\mu(x)$ i $\beta(x)$.

1. WPROWADZENIE

Konstrukcja zespolona składa się z elementów wykonanych z różnych materiałów, o różnych cechach fizycznych, współpracujących ze sobą dzięki specjalnie zaprojektowanym łącznikom, zapewniającym ich trwałe współdziałanie. Elementy konstrukcji

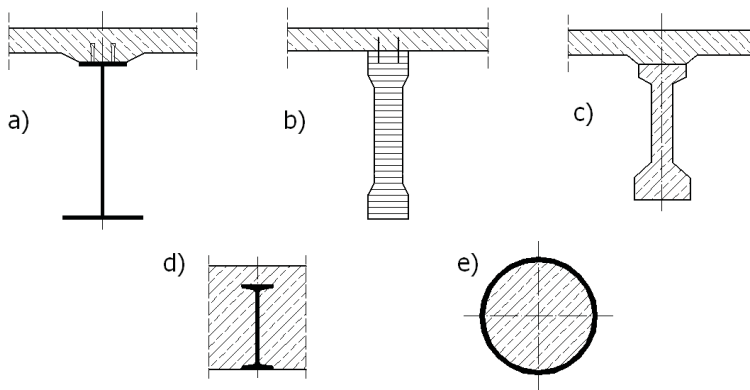
¹⁾ dr hab. inż. – Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej

²⁾ mgr inż. – Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej

zespolonej dobiera się zazwyczaj w taki sposób, aby wykorzystać ich właściwości wytrzymałościowe oraz cechy użytkowe, odpowiednio do ich położenia w konstrukcji mostu. Klasycznym układem zespolonym o efektywnie wykorzystanych własnościach materiałów jest dźwigar utworzony ze stalowej belki pełnościennej współpracującej z betonową (zbrojoną) płytą pomostową w moście jednoprzęsłowym. Zrealizowany w ten sposób dźwigar charakteryzuje się wieloma zaletami [1 - 2]: małą wysokością konstrukcyjną, oszczędnością stali, zapewnieniem zwiększonej sztywności na obciążenia pionowe i poziome. Bardzo ważne dla eksploatacji mostu drogowego jest uzyskanie z płyty betonowej dobrego podłoża pod nawierzchnię asfaltową.

Połączone elementy wykonane z tych samych materiałów, np. w całości zrealizowane jako betonowe czy drewniane, ale w różnych cyklach wytwórczych, także tworzą dźwigar zespolony. Istotne są bowiem w tym przypadku odmienne właściwości wytrzymałościowe i fizyczne połączonych elementów. Również w przypadku, gdy układ zrealizowany jest z identycznego tworzywa, lecz gdy elementy nie są połączone w sposób zapewniający zgodność odkształceń mamy do czynienia z układem zespolonym, a połączenie elementów traktujemy jako podatne. Na rysunku 1 podano przykłady układów stosowanych w inżynierii mostowej, wykonanych ze:

- a) stali i betonu zbrojonego,
- b) betonu sprężonego (lub betonu zbrojonego) i betonu zbrojonego,
- c) drewna (klejonego) i betonu zbrojonego,
- d) stalowych profili dwuteowych, obetonowanych,
- e) rur stalowych wypełnionych betonem (rurobetonowych - CFST).



Rys.1. Rodzaje przekrojów zespolonych
 Fig.1. Types of composite section

Najczęściej stosowane w budownictwie są dźwigary z belek stalowych, zespolonych z betonową płytą pomostową. Są one realizowane od połowy ubiegłego stulecia. Pierwotnie nie uwzględniano jakiegokolwiek współpracy obu części przekroju (belki i płyty

pomostowej) i nie stosowano elementów, które zapewniałyby zespolenie. Płyta betonowa pełniła więc jedynie funkcję pomostu przekazującego obciążenie na dźwigary, natomiast o nośności układu decydowała część stalowa. Jak pokazują badania [3], nawet przy braku specjalnych łączników zespalających obie części przekroju, współpracują one ze sobą w pewnym stopniu przy zginaniu dzięki siłom przyczepności. Po ich zniszczeniu, wzajemnemu współdziałaniu sprzyjają siły tarcia betonu o stal. Oba te efekty mogą być traktowane jako zapewniające dodatkowy zapas bezpieczeństwa dźwigara zespolonego, nie powinny być jednak brane przez projektantów pod uwagę ze względu na trudne do określenia wartości i losowy charakter występowania.

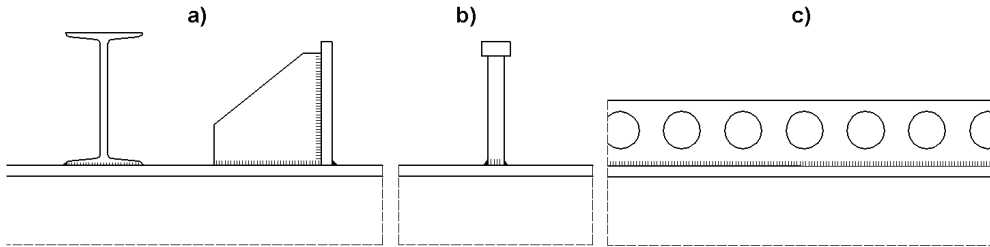
W dźwigarach ciągłych wieloprzęsłowych, w strefach momentów ujemnych, nad podporami pośrednimi, pożądane jest wykonywanie żelbetowych płyt dolnych, podlegających ścisłaniu oraz (lub) zastosowanie sprężenia w płycie górnej, rozciąganej. W niektórych krajach praktykowane jest także obetonowanie dźwigarów stalowych na odcinkach przypodporowych [4]. Z drugiej strony zastosowanie w przekroju zespolonym dwóch materiałów o zupełnie innych własnościach, jak również elementów łączących, komplikuje projektowanie takich konstrukcji. Obliczanie naprężeń w dźwigarze zespolonym jest utrudnione z uwagi na:

- wpływ czynników reologicznych powodujących zmianę, w funkcji czasu, odkształceń jednostkowych i naprężeń przy działaniu obciążeń stałych,
- wpływ zmian modułu sprężystości betonu płyty pomostowej w czasie,
- wpływ stanów montażowych, a w szczególności schematów statycznych konstrukcji w różnych fazach pracy dźwigarów, przed i po zespoleniu.

Z podanych wyżej względów nie można sumować globalnych sił przekrojowych (M , N , T) w dźwigarze zespolonym, można jedynie dodawać skutki działania obciążeń, czyli naprężenia.

Pierwsze mosty zespolone, w których do połączenia obu części przekroju zastosowano specjalnie konstruowane elementy zespalające, a więc projektowane z uwzględnieniem zespolenia, zbudowano na początku lat trzydziestych XX wieku między innymi w USA oraz Australii. Obecnie interesujące rozwiązania można zaobserwować w sposobach kształtowania elementów mostów zespolonych [5 - 6]. W wielu krajach pojawiły się konstrukcje, często kompleksowe systemy, prefabrykowanych pomostów konkurencyjne do monolitycznych płyt żelbetowych. Zmiany zaszły również w elementach zespalających dźwigar stalowy z płytą pomostową (rys. 2). Początkowo stosowane były łączniki sztywne w postaci opórek wykonywanych z blach lub profili walcowanych i spawanych do górnych pasów belek stalowych. Pomimo dobrze rozpoznanych zasad wytrzymałości, konstruowania i obliczania takiego połączenia, wkrótce rozpoczęto poszukiwania łączników nowej generacji, czego głównym powodem była duża czasochłonność wykonania opórek. Nowy typ łączników zespalających w postaci wiotkich sworzni lub prętów, o średnicy wynoszącej najczęściej od 10 do 25 mm, całkowicie zdominował sposób konstruowania zespolenia. Proces spawania nawet bardzo dużej liczby sworzni odbywa się szybko dzięki użyciu automatów spawalniczych, co pozwala także na obniżenie kosztów wykonania niezbędnej liczby łączników. W chwili obecnej

jest to najczęściej stosowany sposób zapewnienia zespolenia w dźwigarach stalowo - betonowych. Nowym typem elementów łączących, który w bliskiej przyszłości może zostać szerzej zastosowany, są łączniki listwowe, wykonywane w postaci blach perforowanych [7]



Rys.2. Rodzaje łączników zespalających. a) opórki, b) sworznie, c) listwy

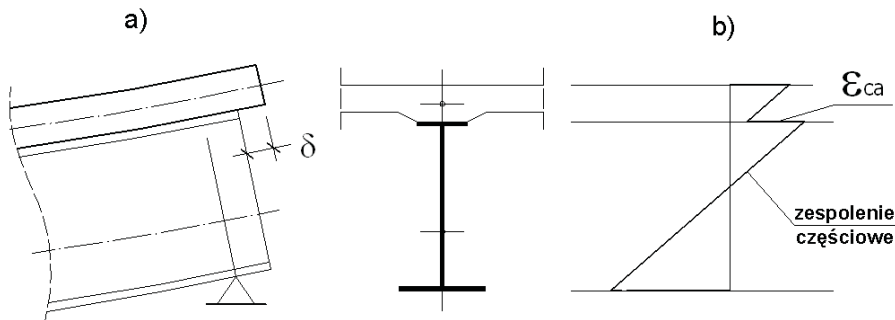
Fig.2. Types of shear connectors: a) channel connector, b) stud, c) perforated connector

2. PODATNOŚĆ PRZEKROJU ZESPOLONEGO

2.1. ŁĄCZNIKI

Elementem decydującym o skuteczności współdziałania części dźwigara zespolonego są łączniki przyspawane do półki górnej belki stalowej, przenoszące siły powstające w styku. Zastosowanie liczby łączników (o określonej geometrii i przy danych obciążeniach), powyżej której nośność całego przekroju nie zwiększa się, określa się jako połączenie pełne (ang. *full shear connection*) [8]. O nośności konstrukcji nie decyduje wówczas wyczerpanie elementów łączących.

We współczesnych mostowych konstrukcjach zespolonych najczęściej stosowane są sworznie. Zalicza się je do grupy tzw. łączników podatnych. Ich sztywność nie zapobiega możliwości powstania poślizgu rozumianego jako przemieszczenie płyty żelbetonowej względem powierzchni pasa górnego belki stalowej (rys. 3a). Samą sztywność połączenia definiuje się jako stosunek siły działającej w połączeniu (styku) do wartości powstałego przemieszczenia – im większy poślizg tym większa podatność połączenia. Zmienia się również rozkład odkształceń na wysokości dźwigara. Zasada płaskich przekrojów przestaje obowiązywać dla całego przekroju zespolonego i można ją jedynie przyjmować oddzielnie dla obu elementów składowych (rys. 3b). Konsekwencją tego jest redystrybucja sił wewnętrznych pomiędzy częścią stalową i betonową przekroju i redukcja jego sztywności giętej, a zatem wzrost ugięć dźwigara. Powyższe cechy charakteryzują połączenia podatne polegające na braku pełnego współdziałania tych części w przekroju zespolonym (ang. *partial shear interaction*).



Rys.3. Charakterystyczne deformacje belki podatnie zespolonej
a) przemieszczenia, b) odkształcenia

Fig.3. Characteristic deformations of a beam with flexible connection:
a) displacements, b) deformations

Częste jest również rozwiązanie polegające na stosowaniu ograniczonej liczby łączników, wystarczającej dla uzyskania połączenia częściowego (ang. *partial shear connection* [8]). Sytuacja taka może zaistnieć, gdy kłopotliwe lub niemożliwe jest przymocowanie do belki dużej liczby łączników, np. w przypadku stosowania prefabrykowanych płyt pomostowych lub płyty monolitycznej wykonanej na blasze trapezowej, pełniącej funkcję deskowania traconego. Tym większego znaczenia nabiera wówczas uwzględnienie zjawiska podatności połączenia w analizie pracy układu. Dźwigary zespolone (rys. 1), w których uwzględnia się poślizg w płaszczyźnie zespolenia wykonywane są jako przekroje złożone:

- ze stali i betonu połączonych sworzniami,
- z drewna (lub drewna klejonego) zespolonego z płytą betonową lub z płytą z drewna klejonego,
- inne konstrukcje: np. dźwigary SSP (ang. *stressed skin panels*) [9] z drewna zespolonego z płytą żelbetową, połączonych z pasem blachy stalowej.

W pracy ograniczono się do przypadku częściowego zespolenia belek stalowych z płytą betonową, które są najpowszechniej stosowane w konstrukcjach mostowych.

2.2. BADANIA PODATNOŚCI ZESPOLENIA

Badania „push-out”

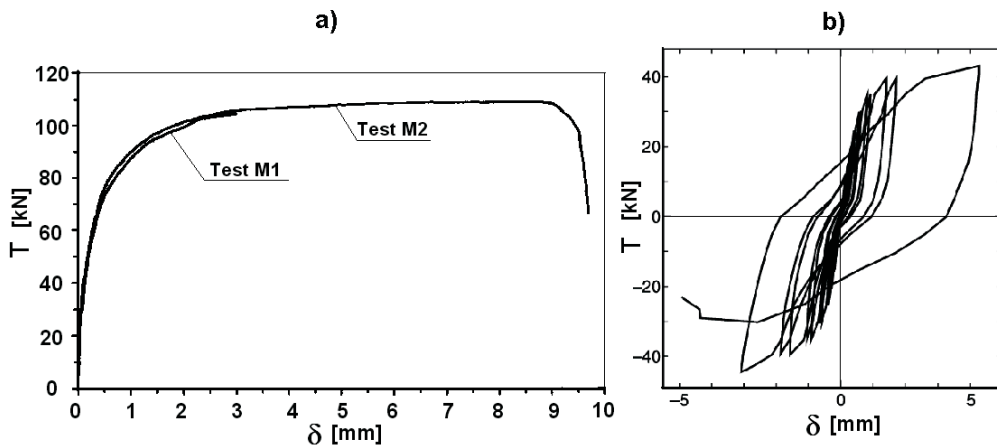
Badania mają na celu wyznaczenie nośności i sztywności łączników sworzniowych poprzez określenie przemieszczenia w połączeniu ścinanym, wynikającego z odkształcalności sworzni. Z uwagi na prostotę i najmniejszy koszt, najwięcej badań przeprowadzanych jest tą metodą. Testowana próbka składa się zwykle z fragmentu stalowej belki dwuteowej, do półek której przyspawane są najczęściej po cztery łączniki, zespolonej obustronnie ze zbrojoną płytą betonową. W celu wyeliminowania wpływu sił przyczepności na pracę połączenia, powierzchnia styku jest pokrywana warstwą antyścierpną, przez co cała siła przenoszona jest tylko przez łączniki.

Stosowane w wielu ośrodkach modyfikacje testu (różna geometria próbek, liczba łączników, sposób przyłożenia obciążenia) powodują niestety, że często trudno bezpośrednio porównywać otrzymywane rezultaty. Na przykład w pracy [10] opisano badania przeprowadzone przy zastosowaniu próbek o jednej płaszczyźnie ścinania (ang. *single push-out test*).

Wśród testów „push-out” można wyróżnić między innymi:

- badania pod obciążeniem zwiększającym się jednostajnie od zera aż do wartości niszczącej połączenie [10 - 13],
- badania zmęczeniowe pod obciążeniem typu cyklicznego [14 - 16] często z naprzemiennym zwrotem (ang. *reversed cyclic loading*) [15 - 17].

Wynikiem uzyskiwanym z badań są wykresy przedstawiające wartości poślizgu w styku w funkcji wielkości działającego obciążenia (rys. 4). Są one podstawą do określenia nośności oraz sztywności łączników (dla badań zmęczeniowych zależnych od liczby cykli obciążenia). W trakcie badań mierzone mogą być także odkształcenia powstające w łącznikach w wyniku ich deformacji pod wpływem przyłożonego obciążenia [18].



Rys.4. Rezultaty badań zależności $\delta(T)$

a) obciążenie statyczne [15], b) obciążenie cykliczne o zmiennym zwrocie siły [16]

Fig.4. Results of $\delta(T)$ dependence investigation

a) static loading [15], b) reversed cyclic loading [16]

Badania belek zespolonych

Bardziej złożone badania laboratoryjne przeprowadzane są na belkach zespolonych o rozpiętościach wynoszących zazwyczaj do kilku metrów. W stosunkowo wierny sposób odzwierciedlają one pracę rzeczywistych dźwigarów: sposób obciążenia – siły działają prostopadle do osi dźwigara i warunki podparcia. Połączenie realizowane jest przy znacznie większej liczbie sworzni niż ma to miejsce w próbkach ścinanych, dlatego znacznie mniejszy jest wpływ takich czynników jak sposób przyłożenia obciążenia czy ewentualne wady łączników. Możliwe jest różnicowanie ich zagęszczenia na

długości dźwigara w zespoleniu o zmiennej sztywności. Z drugiej strony, zazwyczaj badana jest niewielka partia dźwigarów, a ze względu na duże zróżnicowanie typów badanych belek (geometrii, wymiarów i materiałów) trudno jest porównywać ze sobą otrzymywane wyniki i wyciągać wiążące wnioski. Podobnie jak w badaniach „push-out” obciążenie belki narasta quasistatycznie aż do wartości niszczącej konstrukcję [19 - 20] lub jest cykliczne w próbie zmęczenia połączenia [20]. Podczas badań rejestrowane są ugięcia dźwigara, odkształcenia jego elementów, różnice odkształceń w styku oraz wartości poślizgów na długości elementu w funkcji obciążenia.

Badania obiektów

Realizowane są zwykle jako badania odbiorcze mostów zespolonych głównie w celu porównania ugięć przęsła od określonego obciążenia zestawem pojazdów z wartością obliczoną na podstawie modelu. Z uwagi na podatność zespolenia możliwe jest uzyskanie mniejszych sztywności dźwigarów, pomimo istotnego wpływu nawierzchni i innych elementów wyposażenia. Wyniki pomiarów w zakresie odkształceń jednostkowych na wysokości belki mogą powodować problemy z ich interpretacją [21].

2.3. ŹRÓDŁA PODATNOŚCI ZESPOLENIA

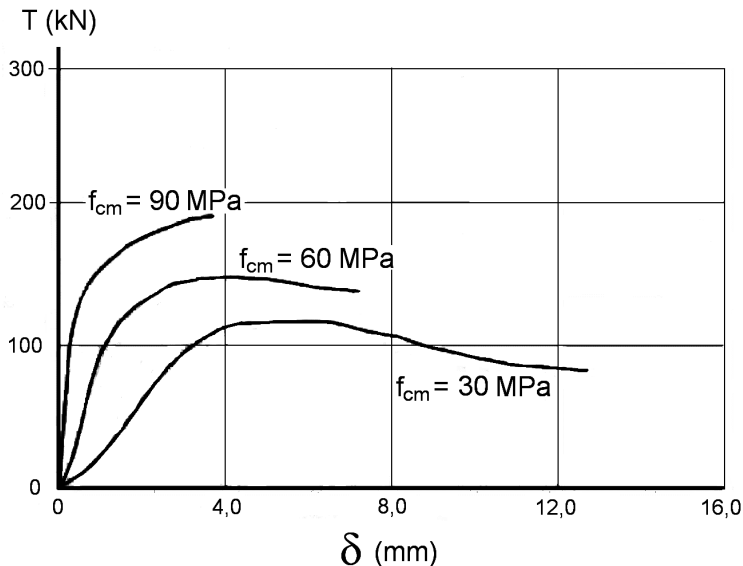
Nośność i sztywność połączenia zależy od wielu czynników, między innymi: kształtu łącznika, własności betonu płyty pomostowej, rodzaju obciążenia, wpływu sił przycepności i tarcia, dokładności wykonania połączenia.

Kształt łącznika

W przypadku łączników sworzniowych zwiększenie smukłości łącznika wpływa na wzrost, natomiast zmniejszenie na spadek jego podatności [22].

Klasa wytrzymałości i wiek betonu płyty

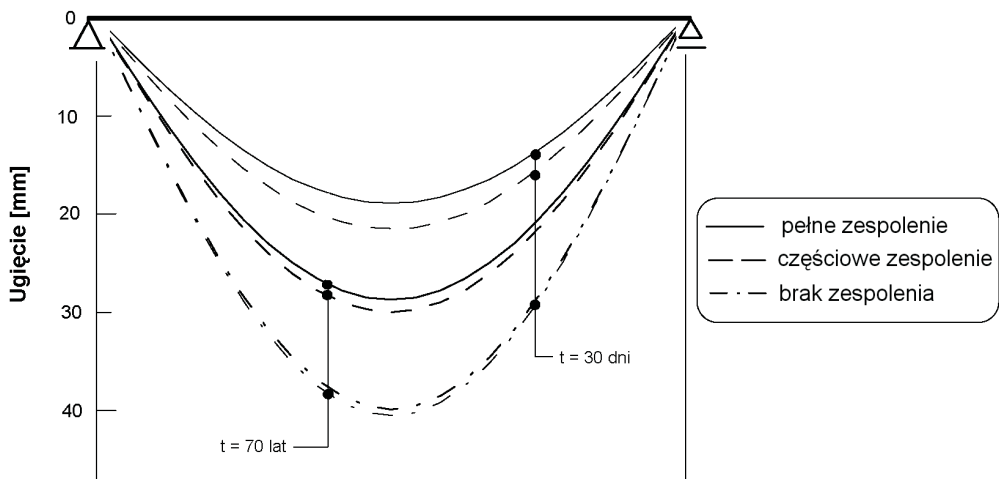
W przypadku stosowania betonów niskich klas, podatność zespolenia jest większa niż dla betonów wysokowartościowych [4, 23] (rys. 5). Inny jest także mechanizm zniszczenia połączenia [24]. W betonach o niskiej wytrzymałości dłuższa jest gałąź plastyczna wykresu, dzięki czemu możliwa jest redystrybucja obciążenia na pozostałe sworznie pracujące w połączeniu. W przypadku łącznika pracującego w betonie wysokiej klasy, po rozpoczęciu rozwoju strefy plastycznej w trzonie sworznia następuje jego nagłe zniszczenie. Jak pokazują badania i analizy modelowe [24] różna jest też postać deformacji łącznika i w innych jego częściach rozpoczyna się uplastycznienie materiału.



Rys.5. Wpływ klasy wytrzymałości betonu na podatność łącznika [23]

Fig.5. Influence of concrete strength on flexibility of connector [23]

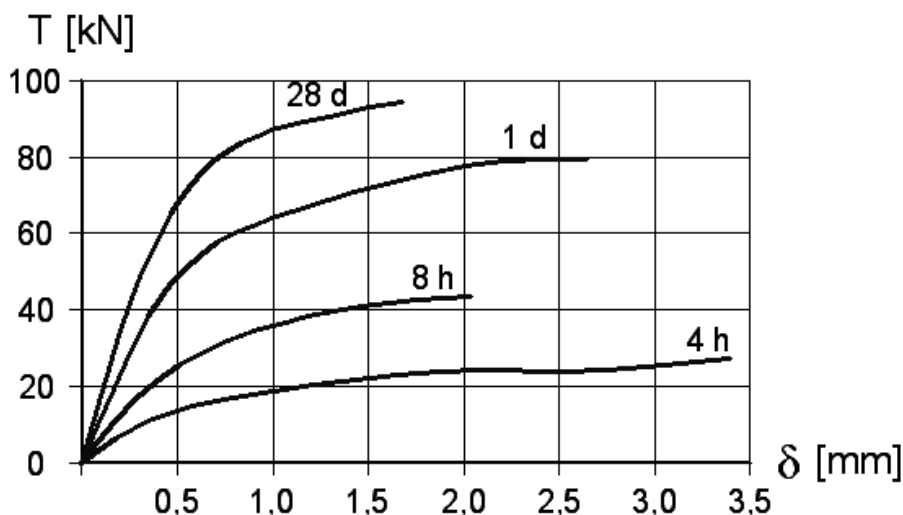
Procesy reologiczne zachodzące w betonie wpływają na stopień podatności zespolenia. Można stwierdzić [25, 26], że im bardziej podatne jest połączenie, tym mniejszy wpływ np. na ugięcie dźwigara ma pełzanie betonu płyty pomostowej (rys. 6). Jest to spowodowane faktem, że o całkowitej sztywności giętej belki zespolonej, wraz z redukcją sztywności połączenia, w coraz mniejszym stopniu decyduje część betonowa przekroju, a w coraz większym stalowa. Tym samym maleje wpływ pełzania betonu na zmianę ugięć, czy rozkład sił wewnętrznych.



Rys.6. Ugięcia dźwigara podatnie zespolonego w czasie [26]

Fig.6. Time dependent deflection of composite beam with flexible connection [26]

Dla sztywności zespolenia dźwigara znaczenie ma wiek betonu płyty podczas jego obciążenia. Łączniki pracujące w betonie bardzo młodym wykazują stosunkowo niewielką sztywność [11], która jednak szybko dąży do wartości końcowej i po pierwszym dniu dojrzewania ulega już tylko niewielkim zmianom (rys. 7). Wczesne obciążenie konstrukcji może zredukować końcową sztywność zespolenia [11] i zmienić kształt ścieżki określającej zależność pomiędzy siłą a przemieszczeniem w styku (mała sztywność początkowa). Istotna jest więc historia obciążenia dźwigara. Największe znaczenie spostrzeżenia te mogą mieć dla zespolonych konstrukcji mostowych wykonywanych etapami, gdzie kolejne segmenty betonowej płyty pomostowej szybko poddawane są oddziaływaniu obciążeń różnego typu np. technologicznych.



Rys.7. Wpływ wieku betonu na sztywność połączenia [11]
 Fig.7. Influence of concrete age on stiffness of the connection [11]

Intensywność i rodzaj obciążenia

Zachowanie połączenia jest zależne od rodzaju obciążenia działającego na konstrukcję. W obiektach mostowych dominującymi obciążeniami przenoszonymi przez łączniki są obciążenia zmienne. Dlatego oddziaływania te są szczególnie ważne w kontekście analizy sztywności i trwałości zmęczeniowej połączenia. Jedne z pierwszych testów zmęczeniowych łączników podatnych prowadzono w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku w USA [27], gdzie określano nośność łączników, bez określania związku pomiędzy liczbą cykli obciążenia i wartościami przyrostów poślizgu w połączeniu. Pierwsze zależności zmiany przemieszczenia w styku od liczby cykli obciążenia i zakresu działającej siły wyprowadzono w latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku [28] i od tego czasu nastąpił intensywny rozwój badań w tym kierunku [15 - 17]. Równolegle prowadzone były testy zmęczeniowe dźwigarów zespolonych wykonanych w skali naturalnej [20]. Najistotniejsze, z punktu widzenia

analizy zagadnienia połączenia dźwigarów zespolonych, wnioski płynące z przeprowadzonych badań są następujące:

- nośność połączenia poddanego obciążeniom cyklicznym jest mniejsza od nośności pod obciążeniem statycznym,
- sztywność zespolenia ulega redukcji wraz z kolejnymi cyklami obciążenia,
- na spadek sztywności wpływa zakres zmienności siły,
- wraz z kolejnymi cyklami obciążenia następują przyrosty wartości poślizgu w styku (ang. *incremental slip*),
- zmniejszenie sztywności połączenia następuje nawet przy stosunkowo niewielkich obciążeniach, nie przekraczających 40 % nośności łączników.

Odrębnym zagadnieniem, które nie będzie szerzej komentowane, jest oddziaływanie obciążeń typu sejsmicznego, generujących w styku siły o naprzemiennym zwrocie [16]. Jest to bardziej niekorzystne niż przypadek obciążenia jednokierunkowego i w większym stopniu redukuje wartość sztywności zespolenia. Powoduje powstawanie w połączeniu „luzów”, czyli stref poślizgu, kiedy łącznik nie przejmuje obciążenia [29].

Siły przyczepności

W styku stali i betonu dźwigarów zespolonych powstają siły przyczepności zwiększające sztywność połączenia. W badaniach efekt ten bywa najczęściej eliminowany poprzez pokrycie powierzchni dźwigara warstwą poślizgową, czego nie stosuje się w rzeczywistych konstrukcjach. Znaczenie udziału tych sił potwierdzają przeprowadzone badania [18], dowodzące, że aż do chwili zniszczenia przyczepności łącznik praktycznie nie jest obciążony, odkształcenia pomierzone w jego trzonie są zbliżone do wartości zerowej. Ponieważ jednak wiązania przyczepności mogą zostać zerwane na skutek użytkowania obiektu, niebezpieczne byłoby uwzględnianie ich udziału w przenoszeniu obciążeń działających w styku. Podobnie jest w przypadku sił tarcia o trudnej do określenia wartości pojawiających się pomiędzy powierzchnią stali i betonu po zniszczeniu przyczepności.

2.4. SPOSOBY UJĘCIA PODATNOŚCI ZESPOLENIA

Wśród stosowanych opisów zagadnienia zespolenia podatnego można wyróżnić modele liniowe oraz nieliniowe. Niezależnie od przyjętego podejścia, autorzy prac przyjmują w większości następujące założenia:

- spełnienie zasady płaskich przekrojów oddzielnie w każdym z elementów przekroju,
- brak możliwości odrywania płyty od belki - jednakowa krzywizna obu części przekroju zespolonego,
- pominięcie wpływu sił przyczepności i tarcia - połączenie mechaniczne.

Modele liniowe

Podstawy stosowanego do chwili obecnej opisu pracy dźwigara zespolonego, przy uwzględnieniu niepełnej współpracy obu jego części, stworzył Newmark [30]. Przy założeniu liniowej zależności pomiędzy siłą działającą w połączeniu i wartością przemieszczenia w styku oraz dla liniowo-sprężystego modelu zachowania materiałów sformułował równanie różniczkowe drugiego rzędu dla dźwigara obciążonego momentem zginającym. Newmark pominął sztywność giętą płyty, czego efektem był brak uwzględnienia momentu zginającego powstającego w części betonowej przekroju. Przytoczona teoria stała się podstawą dla wielu modeli opisujących zagadnienie zespolenia podatnego dźwigara, poddanego zarówno obciążeniom krótkotrwałym, jak i długotrwałym [25 - 26]. W wielu przypadkach możliwe jest otrzymanie rozwiązań dokładnych. Konieczność doboru odpowiednich warunków brzegowych (co dla belek ciągłych może być bardzo trudne) sprawia, że dogodnie jest tworzenie dyskretnych modeli numerycznych ujmujących zagadnienie. Stosowanie procedur iteracyjnych [26] pozwala na uwzględnienie, przy wykorzystaniu ujęcia liniowego, zmian charakterystyk materiałowych (procesy reologiczne) lub sztywności zespolenia w funkcji obciążenia. Tworzone są również elementy skończone modelujące połączenie podatne o stałej sztywności [31 - 32]. Ten sposób opisu zagadnienia, pomimo swych ograniczeń, w dalszym ciągu [31, 33 - 35] jest powszechnie wykorzystywany. Pozwala na różnorodną i wszechstronną analizę problemu i umożliwia jego rozwiązywanie np. przy uwzględnieniu zmiennego rozkładu sztywności zespolenia, czy przyjęciu losowych parametrów zadania.

Modele nieliniowe

Sztywność połączenia wykonanego przy zastosowaniu podatnych łączników sworziowych ma w ogólnym przypadku naturę nieliniową. W zakresie obciążeń użytkowych można przyjmować model liniowy sztywności połączenia, niezależny od obciążenia, chociaż sztywność ta maleje wraz z kolejnymi cyklami działania siły. Przy obciążeniu zbliżającym się do powodującego zniszczenie łącznika, następuje nagły przyrost poślizgu, a tym samym sztywność szybko maleje w sposób nieliniowy. W analizach mogą być także uwzględniane nieliniowości fizyczne i geometryczne.

W tym podejściu najczęściej wykorzystywana jest metoda elementów skończonych. Tworzone elementy skończone dźwigara zespolonego muszą uwzględniać możliwość pojawienia się poślizgu w płaszczyźnie zespolenia; przekrój rozdziela się na część stalową i betonową połączone sprężystością. W węzłach elementu przyjmowane są odpowiednie stopnie swobody: translacje wzdłuż osi osobne dla belki i płyty, przemieszczenia pionowe oraz rotacja [36 - 37], ewentualnie także pochodne przemieszczeń poziomych [38]. W analizach wykorzystywane są najczęściej jednowymiarowe elementy skończone [36, 39 - 40]. Stosowane jest podejście polegające na wyznaczeniu przemieszczeń węzłowych (ang. *displacement-based approach*) [39], sił węzłowych (ang. *force-based approach*) [36, 41] lub podejście mieszane.

Tworzone są również dokładniejsze modele konstrukcji całego dźwigara [42] lub szczegółowo odwzorowujące pracę łącznika [24]. Dominują modele złożone z dwu- i trójwymiarowych elementów skończonych, do których budowy wykorzystywane są profesjonalne programy obliczeniowe MES. Ich biblioteki oferują elementy o charakterystykach nieliniowych, w tym także sprężyste, modelujące połączenie [43]. Alternatywą dla korzystania z metody elementów skończonych jest podejście polegające na aproksymacji sił wewnętrznych dźwigara podatnie zespolonego funkcjami spełniającymi równania równowagi i związki konstytutywne [44].

3. MODELE POŁĄCZEŃ ELEMENTÓW

3.1. PARAMETRY OPISUJĄCE STOPIEŃ ZESPOLENIA

Podstawowym parametrem określającym podatność połączenia jest sztywność pojedynczego łącznika c_z , definiowana jako stosunek siły T w styku przypadającej na łącznik, do powstałego pod wpływem działania tej siły przemieszczenia δ płyty pomostu względem półki belki stalowej

$$c_z = \frac{T}{\delta} \left[\frac{\text{kN}}{\text{mm}} \right]. \quad (1)$$

Sztywność łącznika c_z zmienia się wraz z poziomem obciążenia T . Przy sile wynoszącej do około 60 - 80 % obciążenia niszczonego łącznik, c_z można traktować jako stałe – przy jednakowych przyrostach siły następują stałe przyrosty poślizgu. Przy większym obciążeniu rozpoczyna się uplastycznienie sworznia i gwałtownie narasta wartość przemieszczenia δ . Tym samym chwilowa, styczna sztywność połączenia c_z , definiowana jako tangens kąta nachylenia stycznej do krzywej $\delta(t)$, szybko maleje. Zmniejsza się także całkowita, sieczna wartość c_z , określona jako stosunek siły przenoszonej przez połączenie do całkowitego przemieszczenia płyty względem belki zmierzonego w danej chwili.

Ponieważ całkowitą sztywność zespolenia dźwigara na długości b zapewnia n elementów zespalających o sztywności c_z , można posługiwać się zależnością

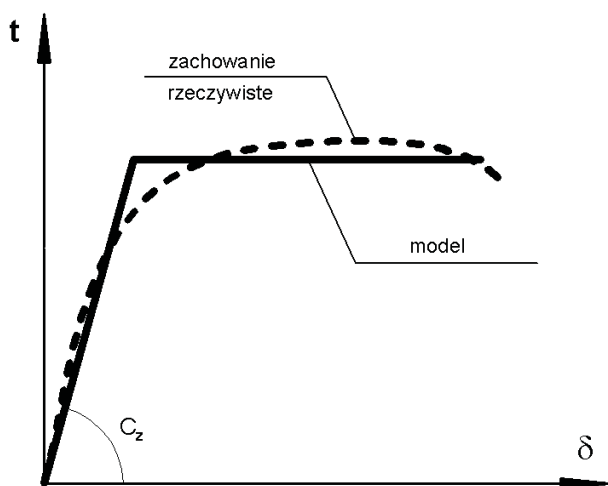
$$C_z = \frac{n \cdot c_z}{b} = \frac{t}{\delta} \left[\frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right], \quad (2)$$

gdzie siła w styku jest rozłożona na długości połączenia

$$t = \frac{dT}{dx}. \quad (3)$$

Wartość C_z jest trudna do jednoznacznego określenia i jak wspomniano wcześniej ma na nią wpływ wiele czynników o charakterze losowym.

W analizach przyjmuje się często uproszczony model bilinearny opisujący funkcję $\delta(t)$ (rys. 8). Zakłada się w nim, że aż do pełnego uplastycznienia łączniki pracują w zakresie liniowo-sprężystym, a wartość parametru C_z jest stała, przy czym sztywność styczna równa jest siecznej. W zakresie plastycznym chwilowa sztywność wynosi zero, następuje przyrost poślizgu przy stałej wartości obciążenia, zmienia się natomiast C_z jako sieczne. Niniejsza praca obejmuje analizę zagadnienia w obszarze liniowo-sprężystym, a więc przy założeniu stałej wartości sztywności zespolenia (proporcjonalność przyrostów sił do przyrostów przemieszczeń w styku).



Rys.8. Zależność $\delta(t)$ dla połączenia podatnego
Fig.8. $\delta(t)$ dependence for flexible connection

W przypadku podatnego zespolenia zasada płaskich przekrojów przestaje obowiązywać dla całego przekroju zespolonego i można ją stosować jedynie oddzielnie dla części betonowej oraz stalowej. W miejscu połączenia istnieje różnica odkształceń ϵ_{ca} , powstała jako efekt wzajemnego poślizgu obu części dźwigara. Wskaźnik opisujący podatność połączenia stali i betonu w styku, który może być dogodny w analizie rozpatrywanego zjawiska

$$\beta = \frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_g} \tag{4}$$

jest określony na podstawie różnicy odkształceń w styku części stalowej i betonowej ϵ_{ca} , odniesionych do odkształceń ϵ_g powstałych na górnej krawędzi dźwigara stalowego [45].

Sztywność zespolenia wpływa istotnie na rozkład sił wewnętrznych zarówno w belce, jak i płycie betonowej. Wskaźnik określający stosunek siły osiowej N_a oraz momentu zginającego M_a w przekroju dźwigara stalowego można zdefiniować jako

$$\mu = \frac{a \cdot N_a}{M_a} \tag{5}$$

W celu otrzymania wielkości bezwymiarowej tego parametru, siła N_a została przemnożona przez stałą wartość a , będącą odległością pomiędzy środkami ciężkości obu części składowych przekroju zespolonego.

3.2. MODELE MES DŹWIGARÓW PODATNIE ZESPOLONYCH

Oprócz rozwiązania analitycznego zagadnienia, które omówione zostanie w p. 4, zaproponowano modele MES mogące służyć do analizy pracy dźwigara podatnie zespolonego. W modelach belki idealnie zespolonej, elementy o charakterystykach fizycznych stali i betonu połączone są w styku w węzłach w sposób wymuszający ich wspólne przemieszczenia. Dla dźwigara podatnie zespolonego konieczne jest zdefiniowanie dodatkowych elementów sprężystych, o sztywności dobranej w taki sposób, by zapewniały połączenie niepełne o zadanej podatności. Do analizy porównawczej, którą wykonano w dalszej części pracy, przyjęto cztery różne modele MES geometrii dźwigara o wzrastającym stopniu złożoności typu i liczby elementów skończonych.

Model klasy [e^1 , p^1]

Jest to model płaski złożony z elementów belkowych, w którym belkę stalową oraz płytę pomostową zbudowano z elementów jednowymiarowych, o trzech stopniach swobody w każdym z węzłów, usytuowanych w osiach ciężkości odpowiednio części stalowej i betonowej przekroju. Wraz z poprzecznymi elementami o nieskończonej sztywności osiowej i giętnej je łączącymi, tworzą one schemat statyczny belki Viarendella (rys. 9). Sztywność EJ_i elementów o długości e modelujących połączenie dobierana jest w sposób zapewniający osiągnięcie żądanej sztywności zespolenia

$$C_z = 12 \frac{EJ_i}{e^3} . \quad (6)$$

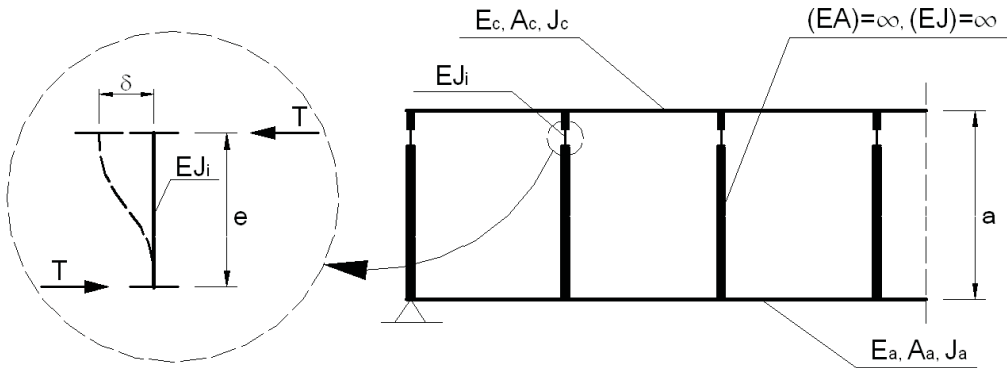
Modele klasy [e^1+e^2 , p^3]

Jest to zmodernizowany model płaski, w którym elementy belkowe modelujące płytę pomostową (rys. 10) i dźwigar blachownicowy zastąpiono czworokątnymi elementami dwuwymiarowymi, czterowęzłowymi. Zasada modelowania połączenia za pomocą elementów jednowymiarowych pozostała taka sama jak w pierwszym modelu.

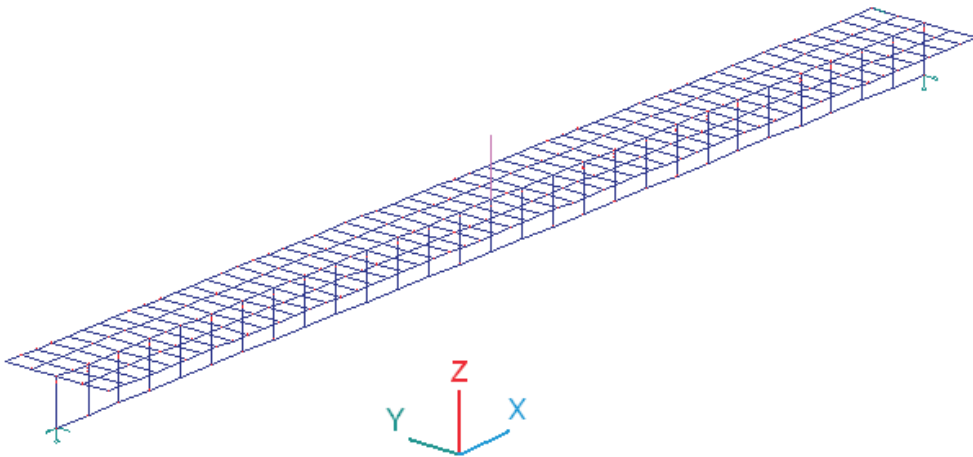
Model klasy [$e^1+e^2+e^3$, p^3]

W modelu tym płyta betonowa została utworzona z trójwymiarowych elementów bryłowych typu SOLID o ośmiu węzłach (trzy translacyjne stopnie swobody w węzle). Dźwigar stalowy zbudowano z dwuwymiarowych, czworokątnych elementów skończonych powłokowych SHELL4 o czterech węzłach. Do modelowania połączenia belki z płytą użyto dostępnych w programie COSMOS/M elementów sprężystych

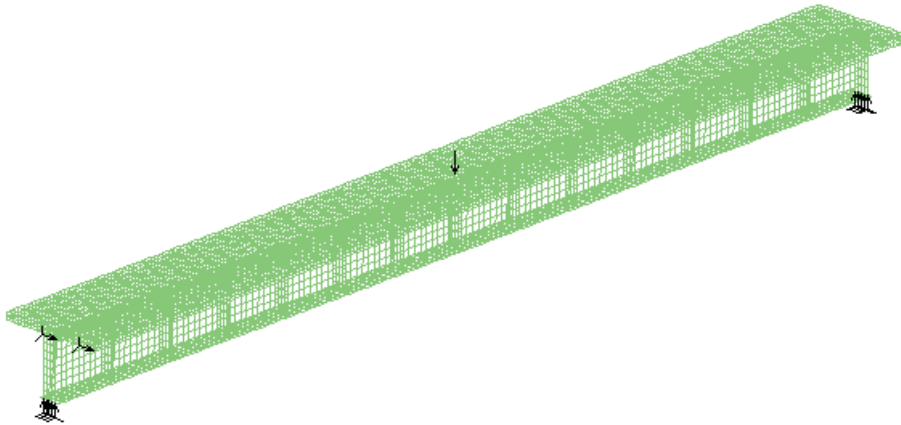
dwuwęzłowych. Ich zastosowanie umożliwi wzajemny przesuw obu części składowych konstrukcji pod działającym obciążeniem. Model dźwigara przedstawiono na rys. 11.



Rys.9. Model klasy $[e^1, p^1]$
 Fig.9. The $[e^1, p^1]$ FEM model



Rys.10. Model klasy $[e^1+e^2, p^3]$
 Fig.10. The $[e^1+e^2, p^3]$ FEM model



Rys.11. Model klasy $[e^1+e^2+e^3, p^3]$

Fig.11. The $[e^1+e^2+e^3, p^3]$ FEM model

4. ROZWIĄZANIA ANALITYCZNE

4.1. ZAŁOŻENIA

Do obliczeń sił wewnętrznych w dźwigarze przyjęto następujące założenia ogólne:

- zachowana jest zasada płaskich przekrojów Bernoulliego dla belki i płyty,
- występuje częściowe zespolenie w postaci poślizgu w styku stali i betonu (belki i płyty),
- płyta pomostowa jest niezarysowana.

Odształcenia, naprężenia oraz siły wewnętrzne (momenty zginające i siły podłużne) są rozróżniane według czasu oddziaływania obciążenia stałego na konstrukcję jako:

- doraźne, w chwili wystąpienia obciążenia ($\tau = 0$);
- długotrwałe (ostateczne, końcowe), gdy procesy reologiczne uległy ustabilizowaniu.

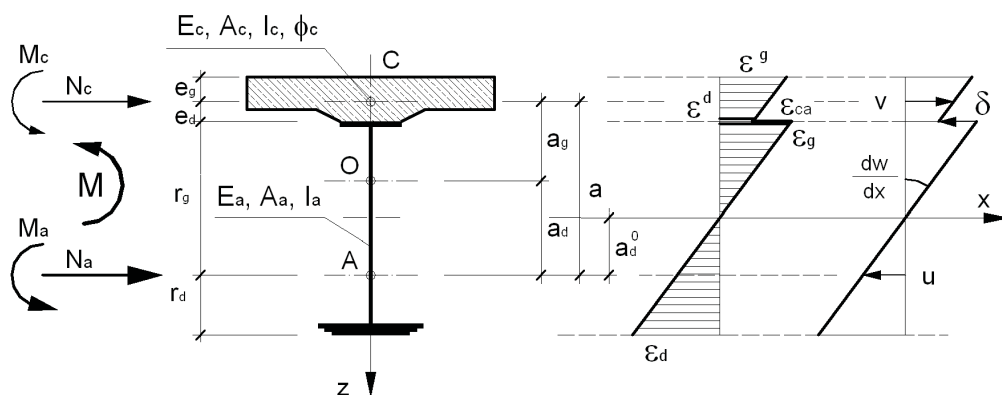
Naprężenia i odształcenia od tych grup obciążeń i oddziaływań są wzajemnie niezależne, a ich efekty podlegają sumowaniu.

Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego

Geometrię przekroju poprzecznego dźwigara, jak na rys. 12, określa położenie środków ciężkości: belki stalowej A i płyty pomostowej C , opisane wymiarami pionowymi belki r_g i r_d oraz płyty e_g i e_d . Wzajemna odległość środków ciężkości

$$a = r_g + e_d \quad (7)$$

jest wartością stałą, niezmienną w czasie i niezależną od podatności zespolenia i działania sił zewnętrznych. Obydwa elementy przekroju zespolonego dźwigara traktuje się jako niezależne: pola powierzchni przekroju (A_c i A_a), momenty bezwładności (I_c i I_a). W wartościach pola przekroju A_c i momentu bezwładności I_c można uwzględnić zbrojenie podłużne płyty pomostowej.



Rys.12. Oznaczenia sił wewnętrznych, parametrów geometrycznych i fizycznych przekroju zespolonego
 Fig.12. Description of internal forces, geometrical and physical parameters of composite section

Charakterystyki geometryczne przekroju zespolonego zwyczajowo odnosi się do parametrów belki (w mostach stalowych jest to regułą) przez zastosowanie współczynnika

$$n = \frac{E_a}{E_c} \quad (8)$$

W przypadku obciążeń doraźnych (krótkotrwałych) wartość n jest stałą.

Zmiany charakterystyk geometrycznych w funkcji czasu

W przypadku obciążeń długotrwałych charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego zależą od czasu obciążenia i momentu obserwacji. Zmiennym parametrem układu zespolonego, w funkcji czasu jest miara pełzania betonu płyty ϕ_c . Dla obciążeń długotrwałych, w ujęciu zmodyfikowanej teorii starzenia betonu według H. Trosta [46], wartości modułów sprężystości podlegają redukcji wg zasady podanej we wzorze

$$E_{c\varphi} = \frac{E_c}{1 + \rho \cdot \varphi_c} . \quad (9)$$

Współczynnik n_φ służący do sprowadzenia cech fizycznych obydwu materiałów układu do jednolitego (belki stalowej) przyjmuje postać

$$n_\varphi = \frac{E_a}{E_c} (1 + \rho \varphi_c) , \quad (10)$$

gdzie ρ jest współczynnikiem Trosta [46].

Położenie środka ciężkości sprowadzonego przekroju zespolonego (rys. 12) wynika z przebiegu procesu pełzania i oblicza się ze wzorów

$$a_d = \frac{A_{c\varphi}}{A_a + A_{c\varphi}} a , \quad a_g = \frac{A_a}{A_{c\varphi}} a_d = \frac{A_a}{A_a + A_{c\varphi}} a , \quad (11)$$

gdzie:

$$A_{c\varphi} = \frac{A_c}{n_\varphi} . \quad (12)$$

Wpływ pełzania na położenie środka ciężkości przekroju dźwigara zespolonego jest istotny [47].

4.2. ZWIĄZKI SIŁ WEWNĘTRZNYCH I ODKSZTAŁCEŃ

W analizowanym przypadku dogodne jest rozdzielenie wypadkowych sił przekrojowych na płytę i belkę. Podział ten uzasadniony jest niezmiennym w czasie położeniem ich środków ciężkości. Siły wewnętrzne (rys. 12) są statycznie równoważne momentowi M . Spełniają one warunki równowagi statycznej:

$$N_a + N_c = 0 , \quad (13)$$

$$M_c - N_c \cdot a_g + M_a + N_a \cdot a_d = M . \quad (14)$$

Odkształcenia w styku tych elementów dla obciążeń doraźnych lub w chwili początkowej na krawędzi górnej belki wynoszą

$$\varepsilon_g = \frac{N_a}{E_a A_a} - \frac{M_a r_g}{E_a I_a} , \quad (15)$$

a na krawędzi dolnej płyty pomostowej

$$\varepsilon^d = \frac{N_c}{E_c A_c} + \frac{M_c e_d}{E_c I_c} . \quad (16)$$

Przyjęcie warunku odkształceń w styku płyty i belki, oznaczonych jak na rys.12,

$$\varepsilon_{ca} = \varepsilon_g - \varepsilon^d = \frac{1}{C_z} \frac{dt}{dx} \quad (17)$$

pozwała na sformułowanie równania (dla przypadku długotrwałego działania obciążeń)

$$\frac{N_a}{E_a A_a} - \frac{M_a r_g}{E_a I_a} - \frac{N_c}{E_c A_c} (1 + \rho \varphi_c) - \frac{M_c e_d}{E_c I_c} (1 + \rho \varphi_c) = \frac{1}{C_z} \frac{dt}{dx} . \quad (18)$$

Równanie (18) można sprowadzić do prostszej postaci, gdy wprowadzi się n_φ i pomnoży się je przez czynnik E_a . Stąd otrzymuje się

$$N_a \frac{1}{A_a} - M_a \frac{r_g}{I_a} - N_c \frac{1}{A_{c\varphi}} - M_c \frac{e_d}{I_{c\varphi}} = \frac{E_a}{C_z} \frac{dt}{dx} . \quad (19)$$

Warunek zgodności krzywizn elementów dźwigara zginanego, dla obciążenia długotrwałego ujmując wzór

$$\frac{M}{E_a I_x} = \frac{M_a}{E_a I_a} = \frac{M_c}{E_c I_c} (1 + \rho \varphi_c) . \quad (20)$$

Po korekcie modułu sprężystości płyty według (10) ma on postać

$$\frac{M}{I_x} = \frac{M_a}{I_a} = \frac{M_c}{I_{c\varphi}} , \quad (21)$$

gdzie:

$$I_{c\varphi} = \frac{I_c}{n_\varphi} . \quad (22)$$

Równanie momentów (14) po uwzględnieniu (13) oraz (21) można zapisać jako

$$\frac{I_{c\varphi}}{I_x} M + N_a a_g + \frac{I_a}{I_x} M + N_a a_d = M . \quad (23)$$

Biorąc pod uwagę, że $a = a_g + a_d$ wg (7) uzyskuje się z (23) związek momentu zginającego w przekroju dźwigara M z siłą osiową w belce N_a

$$aN_a + \frac{I_a + I_{c\varphi}}{I_a} M = M . \quad (24)$$

Korzystając z równości krzywizn elementów składowych układu i całego przekroju (21) wzór (24) można również przedstawić jako

$$a \cdot N_a + \frac{I_a + I_{c\varphi}}{I_a} M_a = M, \quad (25)$$

a stąd określić związek momentu zginającego przekrój poprzeczny dźwigara z siłami wewnętrznymi w belce stalowej

$$\frac{M_a}{I_a} = \frac{M - aN_a}{I_a + I_{c\varphi}}. \quad (26)$$

Podstawiając zależności (13) i (21) do wyrażenia (19) otrzymuje się związek pomiędzy siłami w belce, a siłą poprzeczną w obszarze styku pomiędzy stalą a betonem

$$\frac{N_a}{A_a} - M_a \frac{r_g}{I_a} - \frac{N_a}{A_{c\varphi}} - M_a \frac{e_d}{I_a} = \frac{E_a}{C_z} \frac{dt}{dx}. \quad (27)$$

Wykorzystując zależność geometryczną (7) do przekształcenia (27) uzyskuje się

$$\left(\frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_{c\varphi}} \right) N_a - \frac{(M - aN_a)a}{I_a + I_{c\varphi}} = \frac{E_a}{C_z} \frac{dt}{dx}. \quad (28)$$

Z równania (26) otrzymuje się związek łączący siły wewnętrzne w belce z momentem zginającym dźwigar zespolony

$$\frac{I_a + I_{c\varphi}}{I_a} M_a - aN_a = M. \quad (29)$$

Na podstawie (4) oraz (17) i (15) oblicza się nieciągłość odkształceń w styku belki i płyty (rys. 12)

$$\varepsilon_{ca} = \beta \cdot \varepsilon_g = \beta \cdot \left(\frac{N_a}{E_a A_a} - \frac{M_a r_g}{E_a I_a} \right) = \frac{1}{C_z} \frac{dt}{dx}, \quad (30)$$

a stąd zmieniając prawą stronę wg (27) otrzymuje się

$$\frac{N_a}{A_a} - M_a \frac{r_g}{I_a} - \frac{N_a}{A_{c\varphi}} - M_a \frac{e_d}{I_a} = \beta \cdot \left(\frac{N_a}{A_a} - \frac{M_a r_g}{I_a} \right) \quad (31)$$

i ostateczne równanie o postaci

$$-\frac{a_d A_a}{I_a} (a - \beta \cdot r_g) M_a - (1 - \beta \frac{a_d}{a}) a N_a = 0. \quad (32)$$

Równania (29) i (32) służą do określania relacji pomiędzy M_a i aN_a w przekroju poprzecznym dźwigara zespolonego jako skutek działania momentu M . Korzystając ze wzorów (5) oraz (32) określa się związek pomiędzy β i μ uzależniony jedynie od parametrów geometrycznych połączonych elementów

$$\mu = \frac{a_d(a - \beta \cdot r_g)a \cdot A_a}{(a - \beta \cdot a_d)I_a} \quad (33)$$

Z postaci funkcji $\mu(\beta)$, podanej w (33) wynika, że dla

$$\beta_n = \frac{a}{a_d} = \frac{A_a + A_{c\varphi}}{A_{c\varphi}} \quad (34)$$

otrzymuje się punkt osobliwy. W granicy prawostronnej $\mu \rightarrow -\infty$ natomiast w granicy lewostronnej $\mu \rightarrow +\infty$. Dla $\beta \rightarrow \pm \infty$ otrzymuje się z (33) wartość

$$\mu_\infty = \frac{a \cdot r_g A_a}{I_a} \quad (35)$$

W przypadku skrajnym, gdy $aN_a = 0$ uzyskuje się wartość $\mu = 0$, a stąd

$$\beta_0 = \frac{a}{r_g} \quad (36)$$

W sytuacji gdy $\beta = 0$, czyli dla zespolenia pełnego otrzymuje się z (33)

$$\mu_0 = \frac{a \cdot a_d \cdot A_a}{I_a} \quad (37)$$

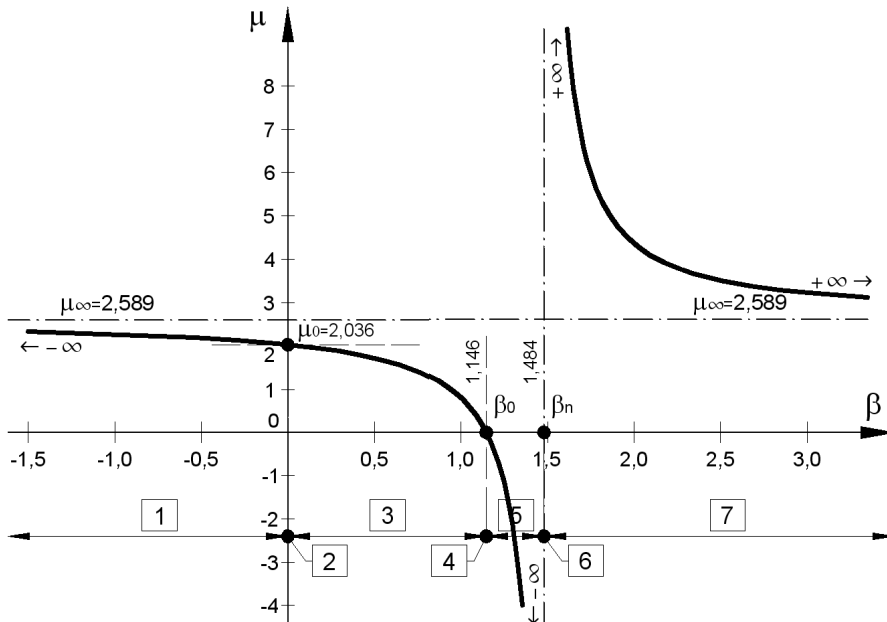
Dla charakterystyk przekroju poprzecznego podanych w tabl. 1 (wiadukt w Kluczborku [45]) wykres zależności $\mu(\beta)$ podano na rysunku 13. Na rysunku 14 przedstawiono wykresy odkształceń jednostkowych w przekroju poprzecznym dźwigara dla charakterystycznych punktów i odcinków funkcji $\mu(\beta)$. Podane one zostały w kolejności ich występowania na rysunku 13.

Tablica 1. Parametry geometryczne analizowanego dźwigara
Table 1. Geometrical parameters of analyzed girder

Elementy	A_c, A_a [m ²]	I_c, I_a [m ⁴]	e_g, r_g [m]	e_d, r_d [m]	E_c, E_a [MPa]
Płyta pomostowa	0,5820	0,0020	0,095	0,145	32600
Belka stalowa	0,0448	0,0191	0,990	0,640	205000

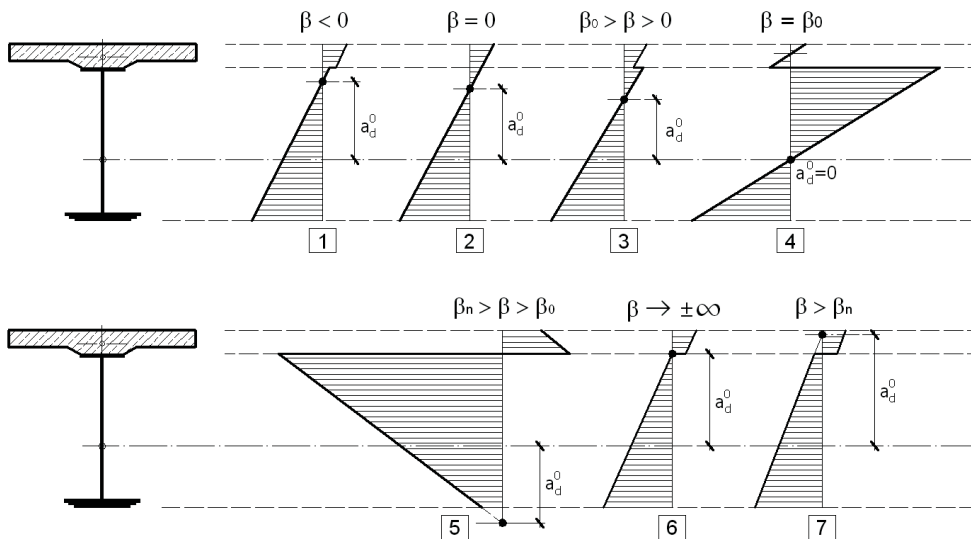
Ponieważ w całym rozpatrywanym zakresie wartości μ ($i \beta$) obserwuje się jednakowy znak siły N_a , wobec tego w obszarze osobliwym $\beta_0 > \beta > \beta_n$ występuje moment zginający w belce M_a o przeciwnym zwrocie niż moment M ! W punkcie $\beta = \beta_n$ moment

zginający $M_a = 0$, a więc cały moment zginający przenosi para sił N_a – czyli $M = a \cdot N_a$. Możliwości powstawania podanych wyżej wartości parametrów μ ($i \beta$) w dźwigarach zespolonych podano w dalszej części pracy.



Rys.13. Zależność wskaźników zespolenia $\mu(\beta)$

Fig.13. Dependence of connection index $\mu(\beta)$



Rys.14. Wpływ rozkładu odkształceń w przekroju poprzecznym dźwigara na wartość wskaźnika β

Fig.14. The strain distribution in cross section of the girder influence onto the β index

Zmiany charakterystyk geometrycznych w funkcji wskaźników podatności zespolenia

Odcinki o długości a_d i a_g określają położenie środka ciężkości przekroju dźwigara, który w przypadku pełnego zespolenia (bez poślizgu) jest również położeniem głównych osi bezwładności przekroju poprzecznego. W sytuacji podatnego zespolenia położenie osi obojętnej (rys. 14) przyjmuje wartość

$$a_d^0 = \frac{\mu \cdot I_a}{a \cdot A_a} , \quad (38)$$

a w funkcji wskaźnika zespolenia β

$$a_d^0 = \frac{a - \beta \cdot r_g}{a - \beta \cdot e_d} a_d . \quad (39)$$

Zakres zmian a_d^0 nie jest w niektórych, szczególnych przypadkach, podanych na rysunku 14 oczywisty.

Moment bezwładności przekroju porzecznego dźwigara częściowo zespolonego, jako funkcja wskaźnika zespolenia β ma postać

$$I_x = I_a + I_{c\varphi} + a \cdot a_d \cdot A_a \frac{a - \beta \cdot r_g}{a - \beta \cdot a_d} \quad (40)$$

oraz jako funkcja wskaźnika zespolenia μ

$$I_x = (1 + \mu) \cdot I_a + I_{c\varphi} . \quad (41)$$

W sytuacji pełnego zespolenia, czyli dla $\beta \rightarrow 0$, wyrażenie (40) upraszcza się

$$I_x = I_a + I_{c\varphi} + a \cdot a_d \cdot A_a , \quad (42)$$

a w związku z tym, gdy $\beta = 0$ otrzymuje się μ_0 jak w (37). W wypadku $\beta = \beta_0$ (traktowanego zwyczajowo jako brak zespolenia, bo $\mu \rightarrow 0$) otrzymuje się

$$I_x = I_a + I_{c\varphi} . \quad (43)$$

W przypadku, gdy określone są moment bezwładności dźwigara zespolonego I_x oraz położenie punktu zerowego naprężenia a_d^0 , odkształcenia (naprężenia) w belce stalowej określa się ze wzoru

$$\varepsilon_a = \frac{M}{E_a I_x} z , \quad (44)$$

natomiast w płycie betonowej jako

$$\varepsilon^c = \varepsilon_a - \varepsilon_{ca} , \quad (45)$$

gdy współrzędna położenia analizowanego punktu z (rys. 12) odniesiona jest do punktu $\varepsilon = 0$.

Zmiany sił wewnętrznych w funkcji podatności zespolenia

Charakterystyczną zależność sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym dźwigara zespolonego od wskaźników zespolenia μ i β podano na rys. 15 i rys. 16. Do analizy przyjęto dźwigar zespolony stalowo-betonowy [45] o parametrach geometrycznych i własnościach fizycznych materiałów podanych w tabl. 1. Założono, że obciążenia wywołują w analizowanym przekroju moment zginający o wartości $M = 4,0$ MNm. Analizowano następujące wielkości:

- momenty w części stalowej przekroju zespolonego M_a i $a \cdot N_a$,
- naprężenia normalne na krawędzi górnej oraz dolnej belki stalowej (σ_g, σ_d),
- wartość a_d^0 , charakteryzującą położenie osi obojętnej przekroju zespolonego względem środka ciężkości belki stalowej.

Jako reprezentatywny przyjęto wskaźnik zespolenia μ na podstawie którego można określić z (33) wskaźnik β . Przyjęto zmienność wskaźników w zakresie $0 < \mu < \mu_\infty$ ($-\infty < \beta < \beta_0$, por. rys. 13).

Wykresy momentów M_a i $a \cdot N_a$ podane na rys. 15 są symetryczne względem wartości $M_a = a \cdot N_a = 2,0$ MNm. Z wykresów tych wynika, że przyrost wartości μ powoduje wzrost siły osiowej N_a oraz spadek momentu zginającego M_a w przekroju belki stalowej. Zmiany te są duże przy małych wartościach μ . Przy dużych wartościach μ następuje stabilizacja sił przekrojowych. Podobnie zmieniają się naprężenia normalne na krawędzi dolnej i górnej belki stalowej, podane na rys. 16. Naprężenia na krawędzi dolnej belki stalowej σ_d zmieniają się nieznacznie (całkowity przyrost o około 30 %) wraz ze wzrostem podatności połączenia. Istotnie natomiast rosną naprężenia σ_g na krawędzi górnej, wykazujące większą wrażliwość na zmiany sztywności połączenia. Położenie punktu obojętnego naprężenia normalnego a_d^0 zmienia się w sposób liniowy w funkcji parametru μ (rys. 17), zgodnie z wzorem (37). Dla μ_∞ otrzymuje się $a_d^0 = r_g$.

4.3. ROZWIĄZANIE W POSTACI SIŁ

Siłę poprzeczną t w przekroju zespolonym określa zależność

$$t = \frac{dN_a}{dx}, \quad (46)$$

a stąd

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d^2 N_a}{dx^2}. \quad (47)$$

Podstawiając wyrażenie (47) do wzoru (27) otrzymuje się po przekształceniach

$$\left(\frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_{c\phi}} + \frac{a^2}{I_a + I_{c\phi}} \right) N_a - \frac{M \cdot a}{I_a + I_{c\phi}} - \frac{E_a}{C_z} \frac{d^2 N_a}{dx^2} = 0, \quad (48)$$

a stąd równanie wiążące siłę osiową N_a z momentem zginającym przekrój zespolony M

$$\frac{d^2 N_a}{dx^2} - k_z \left(\frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_{c\varphi}} + \frac{a^2}{I_a + I_{c\varphi}} \right) N_a + \frac{k_z \cdot a}{I_a + I_{c\varphi}} M = 0, \quad (49)$$

gdym

$$k_z = \frac{C_z}{E_a}. \quad (50)$$

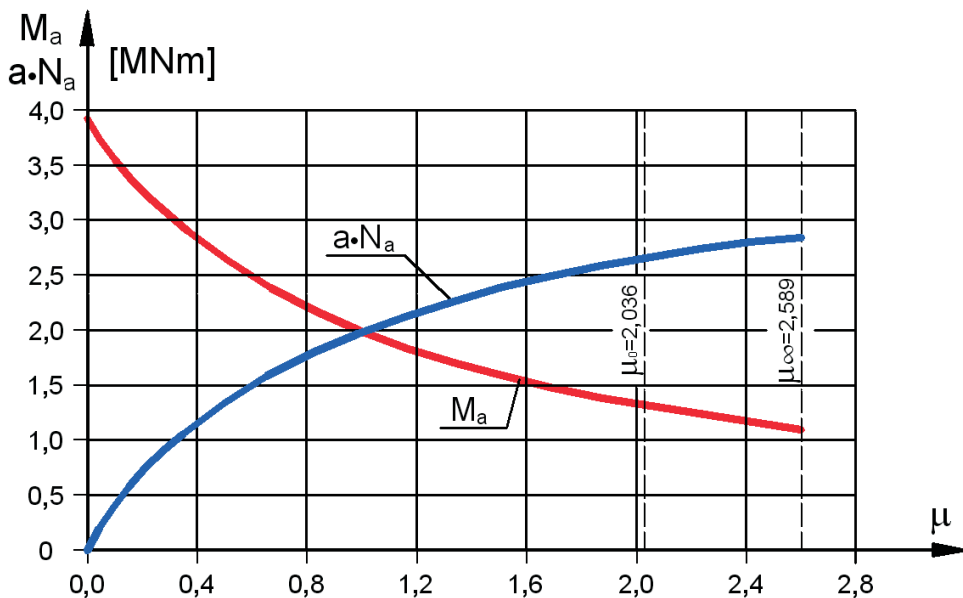
Równanie (49) dotyczy belek, w których sztywność połączenia jest stała na długości belki.

W przypadku, gdy sztywność połączenia jest zmienna $C_z(x)$, otrzymuje się

$$\frac{1}{C_z} \frac{d^2 N_a}{dx^2} = \frac{1}{C_z} \frac{d^2 N_a}{dx^2} - \frac{1}{C_z^2} \frac{dN_a}{dx} \frac{dC_z}{dx}, \quad (51)$$

a stąd równanie (49) o postaci

$$\frac{d^2 N_a}{dx^2} - \frac{1}{C_z} \frac{dN_a}{dx} \frac{dC_z}{dx} - C_z \left(\frac{1}{EA_a} + \frac{1}{EA_{c\varphi}} + \frac{a^2}{EI_a + EI_{c\varphi}} \right) N_a + \frac{C_z \cdot a}{EI_a + EI_{c\varphi}} M = 0. \quad (52)$$



Rys.15. Zmienność sił M_a , $a \cdot N_a$ w funkcji wartości wskaźnika μ
 Fig.15. Variability of M_a , $a \cdot N_a$ forces as a function of μ index value

Po przekształceniach (52) otrzymuje się

$$\frac{I_a + I_c}{a^2} \left(\frac{d^2 N_a}{dx^2} - \frac{1}{C_z} \frac{dN_a}{dx} \frac{dC_z}{dx} \right) - \frac{C_z}{E} \left[\frac{I_a + I_{c\varphi}}{a^2} \left(\frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_{c\varphi}} \right) + 1 \right] N_a + \frac{C_z}{E} M = 0, \quad (53)$$

a stąd ostateczne równanie o postaci

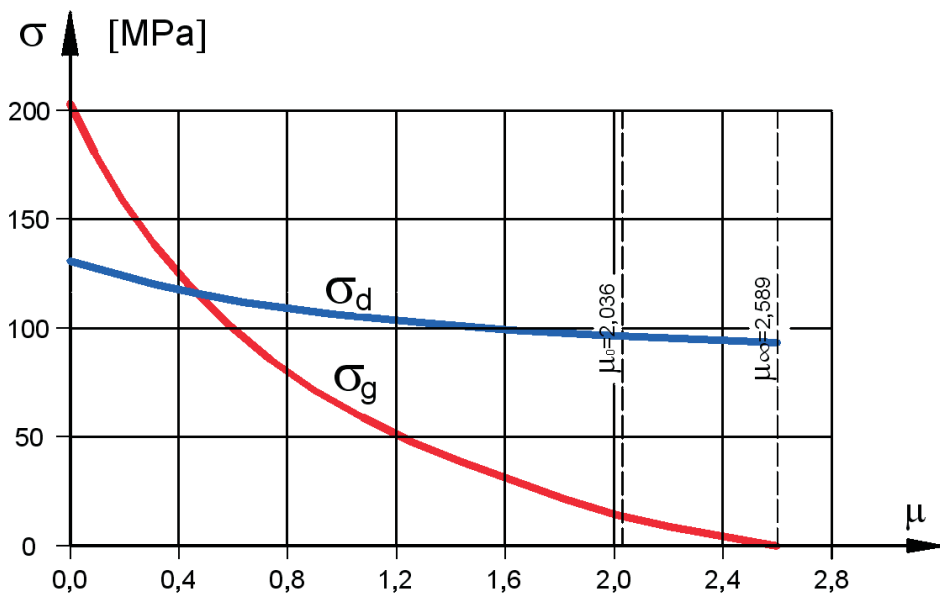
$$\frac{E}{C_z} \frac{I_a + I_c}{a^2} \left(\frac{d^2 N_a}{dx^2} - \frac{1}{C_z} \frac{dN_a}{dx} \frac{dC_z}{dx} \right) - \frac{I_x}{a \cdot a_d \cdot A_a} N_a + M = 0, \quad (54)$$

po wprowadzeniu I_x z (42) i korzystając z (53)

$$\begin{aligned} \frac{I_a + I_{c\varphi}}{a^2} \left(\frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_{c\varphi}} \right) + 1 &= \frac{I_a + I_{c\varphi}}{a^2} \frac{A_a + A_{c\varphi}}{A_a \cdot A_{c\varphi}} + 1 = \\ &= \frac{I_a + I_{c\varphi}}{a \cdot a_d \cdot A_a} + \frac{a \cdot a_d \cdot A_a}{a \cdot a_d \cdot A_a} = \frac{I_a + a \cdot a_d \cdot A_a + I_{c\varphi}}{a \cdot a_d \cdot A_a}. \end{aligned} \quad (55)$$

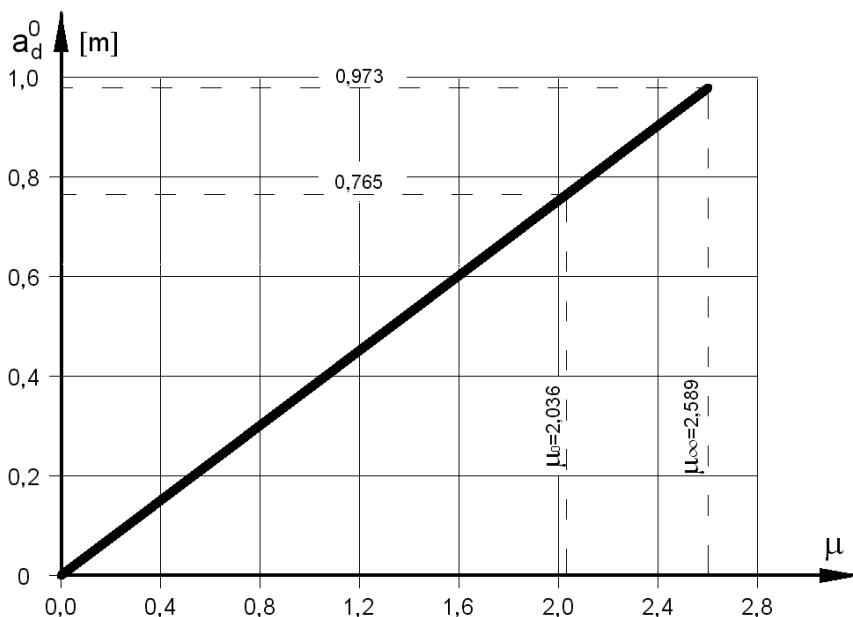
W (55) wykorzystano wzór (11), z którego uzyskuje się zależność

$$\frac{A_a + A_{c\varphi}}{A_{c\varphi}} = \frac{a}{a_d}. \quad (56)$$



Rys.16. Zmienność naprężeń normalnych σ_g , σ_d w belce stalowej, w funkcji wartości wskaźnika μ

Fig.16. Variability of σ_g , σ_d normal stresses in steel beam as a function of μ index value



Rys.17. Zmienność wielkości a_d^0 w funkcji wartości wskaźnika μ
 Fig.17. Variability of a_d^0 value as a function of μ index value

Rozwiązanie dźwigara zespolonego, obciążonego momentem $M(x)$, z łącznikami podatnymi polega na obliczeniu N_a z równania (54). Na podstawie N_a oblicza się M_a z (26), a następnie z (21) i (13) siły M_c i N_c . Podział siły poprzecznej (rys. 18) traktuje się jako wtórny. Rozdział siły przekrojowej Q na siły poprzeczne przypadające na płytę Q_c i belkę Q_a jest proporcjonalny do podziału M na M_c i M_a . Wynika to ze związku (21) oraz zależności różniczkowej

$$Q_i = \frac{dM_i}{dx} \quad (57)$$

Funkcje zmian sił wewnętrznych na długości przęsła

W ogólnym przypadku zmienność sił wewnętrznych w belce $M_a(x)$ i $N_a(x)$ nie jest zgodna ze zmianą momentu zginającego $M(x)$. Dotyczy to również sytuacji przęsła przyrządnego, w którym przekrój poprzeczny jest stały, również gdy sztywność zespolenia jest stała $C_z(x) = C_0$. Dla istnienia zgodności funkcji momentów

$$M(x) = \omega \cdot M_a(x) \quad (58)$$

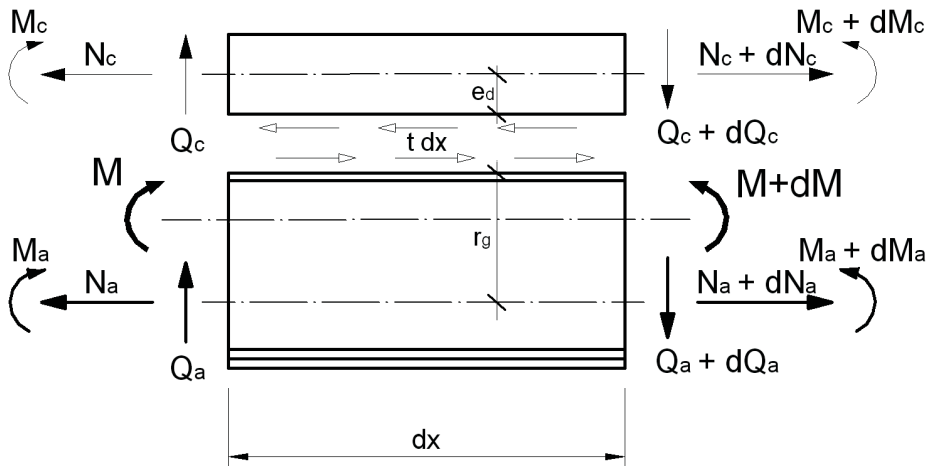
musiałby być spełniony warunek $M_a(x) = \omega \cdot f(x)$, gdy $M(x) = f(x)$, a ω byłoby liczbą. Wobec powyższego z równania zgodności krzywizn (20) otrzymalibyśmy

$$\frac{M(x)}{M_a(x)} = \frac{EI_x}{EI_a} \quad (59)$$

a stąd, po uwzględnieniu (41)

$$\omega = \frac{(1 + \mu(x)) \cdot I_a + I_{cp}}{I_a} = 1 + \mu(x) + \frac{I_{cp}}{I_a} . \quad (60)$$

Z równania (60) wynika, że aby ω było liczbą, musi wystąpić również $\mu(x) = \mu_0$ (wartość stała). Podane w dalszej części pracy przykłady wskazują, że nawet dla belki pryzmatycznej $\mu(x) = \mu_0$ może wystąpić jedynie dla szczególnego przypadku $M(x)$ i $C_z(x)$.



Rys.18. Siły wewnętrzne w wycinku dźwigara zespolonego
Fig.18. Internal forces in an infinitesimal segment of a composite beam

W sytuacji, gdy $\mu(x) = \mu_0$, na mocy równania (5), również funkcja $N_a(x)$ byłaby taka sama (z dokładnością do stałego współczynnika) jak $M(x)$, ponieważ

$$N_a(x) = \frac{\mu \cdot M_a(x)}{a} = \frac{\mu \cdot M(x)}{\omega \cdot a} . \quad (61)$$

W ogólnym rozwiązaniu (gdy $\mu(x) \neq \mu_0$) zmienne $M(x)$, $M_a(x)$, $N_a(x)$ są różnymi funkcjami.

Funkcje $N_a(x)$ oraz $N_c(x)$ są identyczne z uwagi na zależność (13), natomiast $M_a(x)$ i $M_c(x)$ różnią się o stały mnożnik (dla pryzmatycznej belki i płyty pomostowej), określony w (21) jako

$$\frac{M_a(x)}{M_c(x)} = \frac{I_a}{I_{cp}} . \quad (62)$$

Zmiany sił poprzecznych w łącznikach $t(x)$ są funkcjami złożonymi. Jedynie w przypadku szczególnym, gdy $\mu(x) = \mu_0$ i gdy dźwigar jest pryzmatyczny, kształt funkcji $t(x)$ jest podobny (z dokładnością do stałego parametru) do funkcji $Q_a(x)$.

4.4. ROZWIĄZANIE W POSTACI PRZEMIESZCZEŃ

Siły wewnętrzne rozpatrywane poprzednio można wykorzystać również do określenia przemieszczeń belki i płyty u , v i w , podanych na rys. 12. Biorąc pod uwagę odkształcenia jednostkowe, powstałe w wyniku działania sił normalnych otrzymuje się

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_a}{E_a \cdot A_a}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{N_c}{E_a \cdot A_{c\varphi}}, \quad (63)$$

a z równania krzywizny

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_a}{E_a \cdot I_a}. \quad (64)$$

Wobec powyższego równania równowagi (13) i (14) można zapisać w postaci

$$E_a \cdot A_a \frac{du}{dx} = -E_a \cdot A_{c\varphi} \frac{dv}{dx}, \quad (65)$$

$$-E_a \cdot I_a \frac{d^2 w}{dx^2} - E_a \cdot I_{c\varphi} \frac{d^2 w}{dx^2} - a \cdot E_a \cdot A_a \frac{du}{dx} = M, \quad (66)$$

a stąd

$$-(E_a \cdot I_a + E_a \cdot I_{c\varphi}) \frac{d^2 w}{dx^2} - a \cdot E_a \cdot A_a \frac{du}{dx} = M. \quad (67)$$

Wzór na siłę poprzeczną w styku połączenia t (rys. 18) zawiera wszystkie składowe przemieszczeń oraz sztywność zespolenia w równaniu

$$t = C_z \delta = C_z \left(u - v - a \frac{dw}{dx} \right). \quad (68)$$

Ponieważ

$$t = \frac{dN_a}{dx} = E_a \cdot A_a \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (69)$$

równanie (68) przyjmuje postać

$$E_a \cdot A_a \frac{d^2 u}{dx^2} = C_z \left(u - v - a \frac{dw}{dx} \right). \quad (70)$$

Wyrażenia (65), (67) i (70) tworzą układ równań różniczkowych wiążących przemieszczenia u , v , w ze skutkiem obciążenia dźwigara w postaci momentu zginającego M . Na podstawie przemieszczeń oblicza się siły wewnętrzne w elementach dźwigara ze wzorów (63) i (64).

Rozseparowanie równań

Wykorzystanie zależności (5) pomiędzy siłą osiową N_a a momentem zginającym M_a belkę pozwala na określenie sztywności dźwigara zespolonego wg (41). Dzięki zależności (5) możliwe jest rozseparowanie zmiennych u , v , w . Ugięcia belki można ująć jako zależność analogiczną do (64) z uwzględnieniem warunku krzywizn (20) w postaci

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{E_a \cdot I_x} . \quad (71)$$

Przemieszczenie poziome u można określić z (63) wykorzystując zależność (24) o przekształconej postaci

$$a \cdot N_a = \frac{I_x - I_a - I_{c\phi}}{I_x} M , \quad (72)$$

a stąd niezależne równanie służące do określenia przemieszczeń u

$$a \cdot A_a \frac{du}{dx} = -\frac{\mu \cdot I_a}{I_x} M , \quad (73)$$

bowiem zgodnie z (41)

$$I_x - I_a - I_{c\phi} = (I_a + \mu \cdot I_a + I_{c\phi}) - I_a - I_{c\phi} = \mu \cdot I_a . \quad (74)$$

Z zależności (65) otrzymuje się równanie, z którego oblicza się przemieszczenie v

$$a \cdot A_{a\phi} \frac{dv}{dx} = -\frac{\mu \cdot I_a}{I_x} M . \quad (75)$$

W podanym wyżej rozwiązaniu parametrem określającym podatność połączenia jest μ . Do wyznaczenia wartości μ dogodnie jest wykorzystanie β z zależności (32). Wartość β z (4) może być określona np. na podstawie wyników badań [21].

Sztywność połączenia C_z można wówczas obliczyć na podstawie (70) i przemieszczeń u , v i w z wyrażenia

$$k_z = \frac{C_z}{E_a} = \frac{A_a \frac{d^2 u}{dx^2}}{u - v - a \frac{dw}{dx}} . \quad (76)$$

Układ równań teorii ścisłej

Można go uzyskać na podstawie (65), (67) i (70). Równanie równowagi sił normalnych przekroju poprzecznego dźwigara (rys. 18) ma postać

$$\frac{dN_a}{dx} + \frac{dN_c}{dx} = 0 , \quad (77)$$

a stąd zależność

$$E_a \cdot A_a \frac{d^2 u}{dx^2} + E_a \cdot A_{c\phi} \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (78)$$

Różniczkując dwukrotnie funkcję momentu zginającego $M(x)$ (67) po współrzędnej x otrzymuje się

$$-(E_a \cdot I_a + E_a \cdot I_{c\phi}) \frac{d^4 w}{dx^4} + a \cdot E_a \cdot A_a \frac{d^3 u}{dx^3} = 0 \quad (79)$$

oczywiście przy założeniu, że dźwigar nie jest obciążony w sposób ciągły, bo $p(x) = 0$.

Równania różniczkowe (70), (78) i (79) w zastosowaniach praktycznych stwarzają utrudnienia przy doborze warunków brzegowych funkcji u i v , w szczególności gdy sztywność połączenia nie jest wartością stałą, czyli $C_z(x)$. Określenie pochodnych $\frac{d^3 u}{dx^3}$ w miejscach położenia sił skupionych jak również w węzłach podporowych w ogólnych przypadkach jest trudne do ustalenia, w tym przypadku bowiem istotne są funkcje $M(x)$ i $C_z(x)$.

4.5. ROZWIĄZANIE MIESZANE

Z równania (54) można wyznaczyć N_a , które służy do obliczenia przemieszczeń u i v z (63), po wykorzystaniu odpowiednich warunków brzegowych oraz M_a z (26) i ugięcia dźwigara w z (64). Siłę poprzeczną w płaszczyźnie zespolenia t można obliczyć z (69) na podstawie N_a lub z (68) przy przyjęciu przemieszczeń u, v, w . Zgodność sił stycznych t z (68) i (69) we wzorze

$$\frac{dN_a}{dt} = C_z \cdot (u - v - a \frac{dw}{dx}) \quad (80)$$

można wykorzystać do określenia warunków brzegowych przemieszczeń.

5. ANALIZA PORÓWNAWCZA

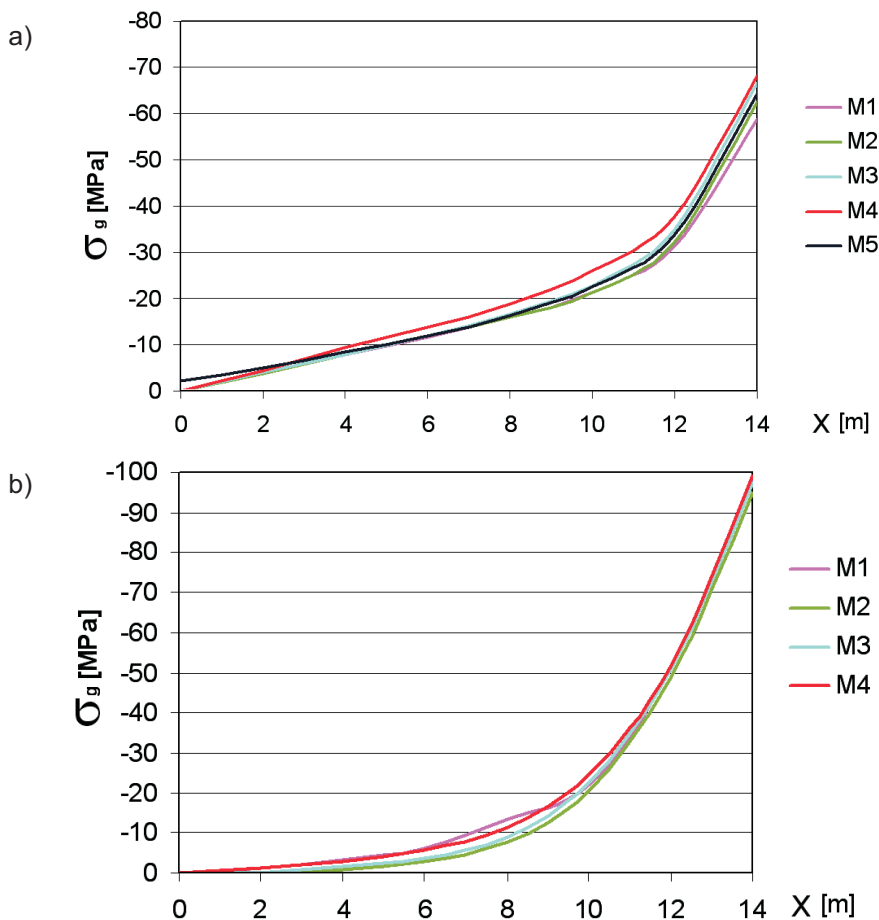
5.1. MODELE OBLICZENIOWE DŹWIGARA ZESPOLONEGO

W celu przedstawienia wpływu zespolenia podatnego na wyężenie dźwigara mostowego podano niżej przykłady numeryczne dla jednoprzęsłowego dźwigara zespolonego stalowo-betonowego o rozpiętości teoretycznej $L = 28,0$ m. Parametry geometryczne i własności materiałowe przekroju podano w tabl. 1. Obciążenie stanowi siła skupiona $P = 1$ MN, przyłożona w środku rozpiętości belki (liniowo zmienna funkcja momentu zginającego $M(x)$). W (14) założono, że momenty zginające są dodatnie, gdy rozciąganie dotyczy włókien dolnych elementów. Dodatnie wartości sił osiowych N i N_a powodują rozciąganie elementu, natomiast znak N_c wynika z zależności (13) i zwrotu (przeciwnego do N_a) na rys. 12.

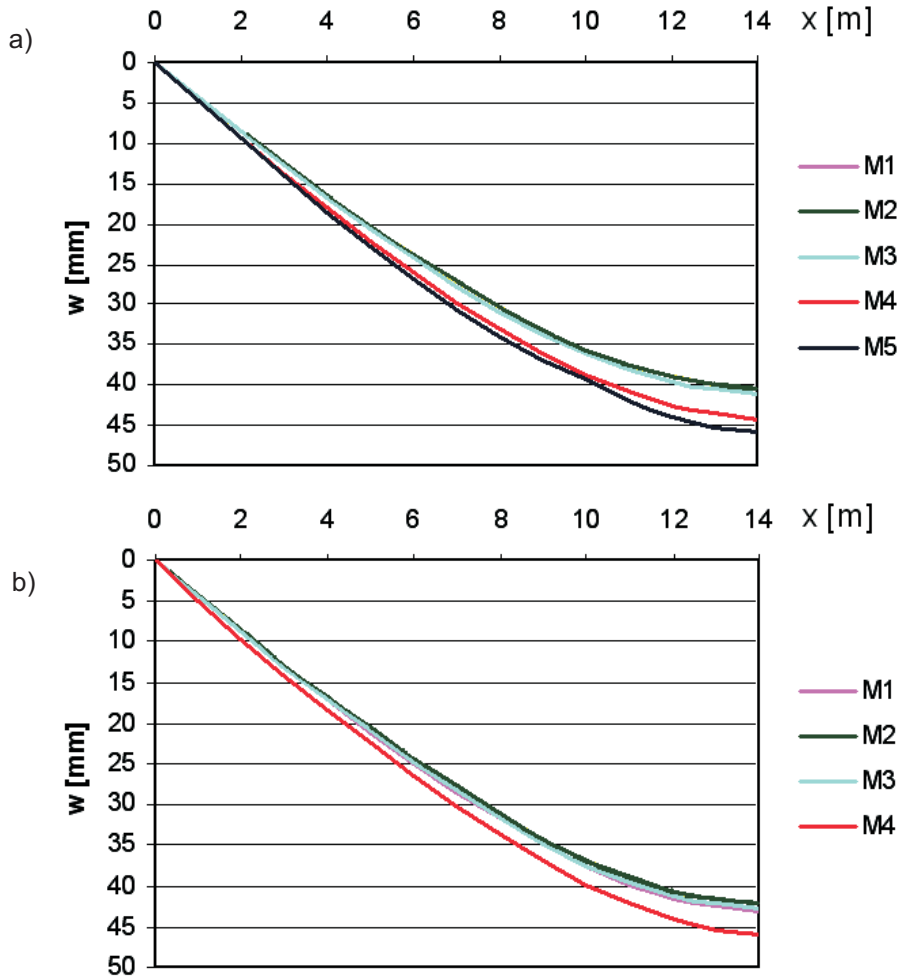
Analizę porównawczą zaproponowanych modeli numerycznych MES odniesiono do rozwiązania analitycznego w ujęciu MRS (metody różnic skończonych, oznaczonej jako model M1) z zastosowaniem algorytmu mieszanego opartego na równaniu (54). Modele MES oznaczono jako M2 (model klasy e^1, p^2), M3 i M4 (modele klasy e^1+e^2, p^3) oraz M5 (model klasy $e^1+e^2+e^3, p^3$). Rozpatrzono dwa przypadki sztywności zespolenia na długości dźwigara:

- o stałej wartości $C_z = 1000 \text{ MN/m}^2$ (modele M1, M2, M3, M4, M5),
- o zmiennej sztywności $C_{zp} = 0$ (brak połączenia) w środku rozpiętości dźwigara i rosnącej liniowo do $C_{zk} = 1000 \text{ MN/m}^2$ nad podporą (modele M1, M2, M3, M4).

Wyniki przedstawiono na rys. 19 - 21. Na rysunkach tych przyjęto, że współrzędne przekroju dźwigara zmieniają się od $x = 0$ (przekrój podporowy) do $x = 14 \text{ m}$ (przekrój w środku rozpiętości przęsła). Wartości ujemne $\sigma_g(x)$ oznaczają ściskanie.

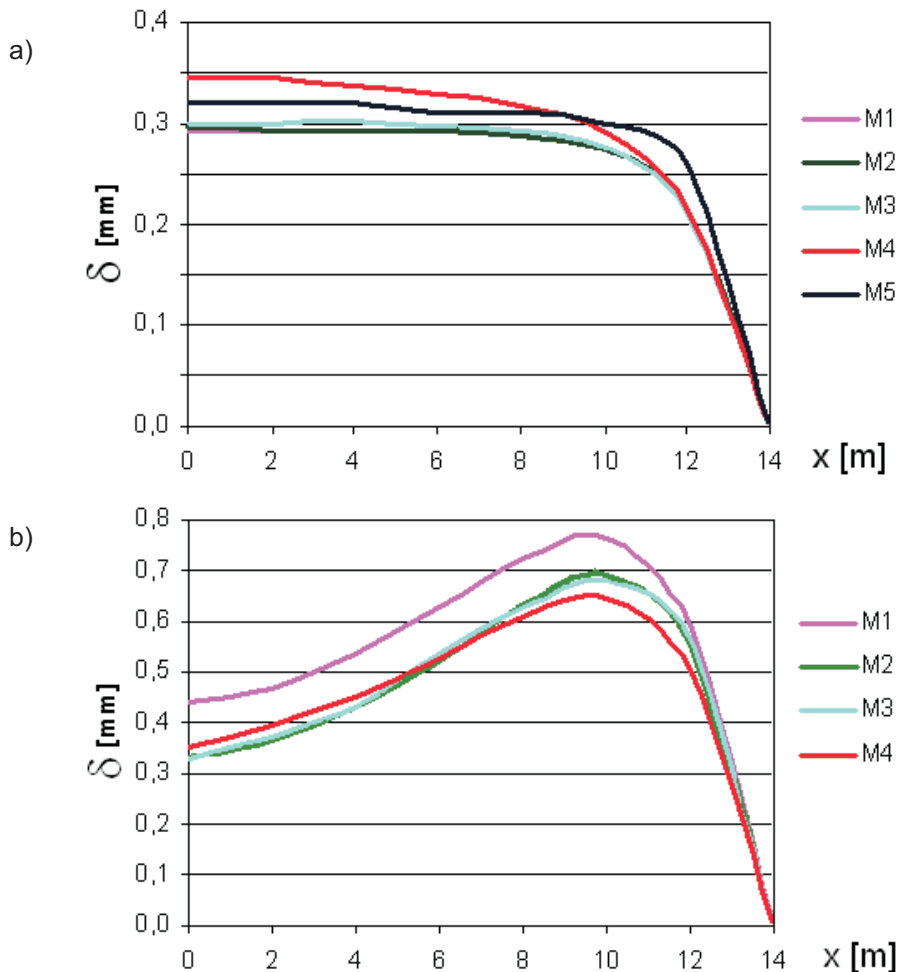


Rys.19. Naprężenia na krawędzi górnej belki stalowej: a) $C_z = \text{const}$, b) $C_z = C_z(x)$
 Fig.19. Normal stresses in the upper flange of steel beam: a) $C_z = \text{const}$, b) $C_z = C_z(x)$



Rys.20. Ugięcia dźwigara: a) $C_z = \text{const}$, b) $C_z = C_z(x)$
 Fig.20. Girder deflection: a) $C_z = \text{const}$, b) $C_z = C_z(x)$

Z porównania wykresów naprężeń i ugięć widoczna jest duża zgodność między wynikami uzyskanymi z rozwiązania ciągłego MRS (model M1) i z modeli MES. Największe różnice otrzymano w wartościach poślizgu w styku $\delta(x)$, przy czym ich przebieg na długości dźwigara dla każdej z analizowanych sztywności zespolenia dla wszystkich modeli jest podobny.

Rys.21. Poślizg w styku: a) $C_z = \text{const}$, b) $C_z = C_z(x)$ Fig.21. Shear slip: a) $C_z = \text{const}$, b) $C_z = C_z(x)$

5.2. FUNKCJE MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH I PODATNOŚCI ZESPOLENIA

Wpływ sztywności zespolenia $C_z(x)$ na odkształcenia w płaszczyźnie połączenia analizowano w dźwigarze zespolonym jednoprzęsłowym, o rozpiętości teoretycznej $L = 28,0$ m. Jako wyniki analizy przedstawiono w tabl. 2 relacje pomiędzy wskaźnikami $\mu(x)$ oraz $\beta(x)$ określającymi podatność zespolenia, a funkcjami momentów zginających. Wyniki analizy uzyskano z rozwiązania MRS. Rozpatrzono dwa rodzaje wykresów momentów zginających $M(x)$:

- liniowy, od siły skupionej $P = 200$ kN w środku rozpiętości dźwigara,
- paraboliczny, jak od siły równomiernie rozłożonej $q = 30$ kN/m.

Tablica 2. Wartości wskaźników zespolenia w zależności od funkcji sztywności zespolenia i momentów
 Table 2. Values of connection indices according to the function of the stiffness of the connection and moments

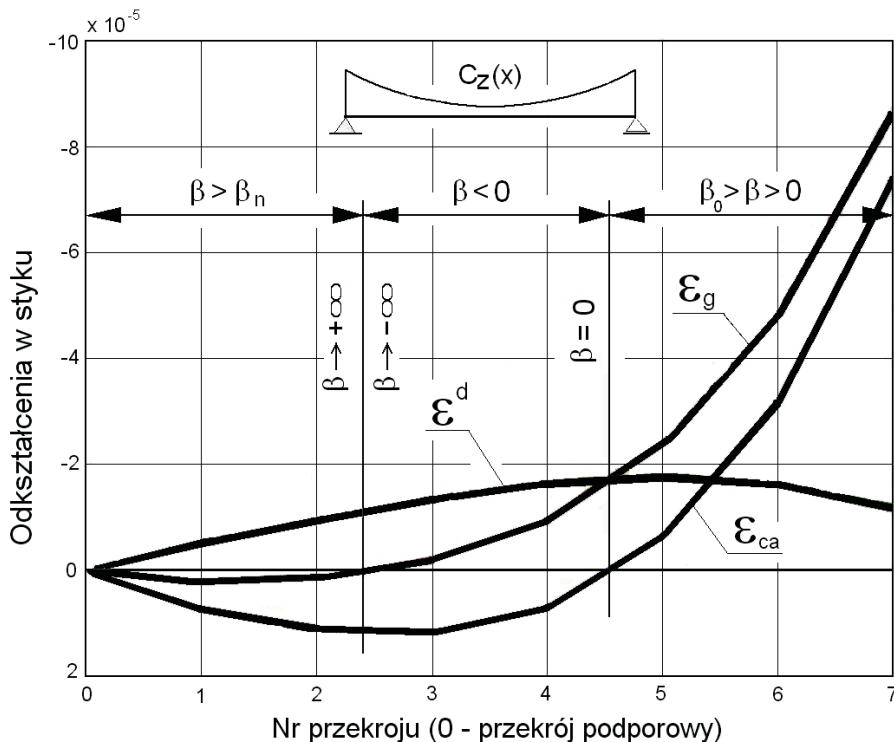
Obciążenie siłą skupioną												
pkt	C_z		β	μ	C_z		β	μ	C_z		β	μ
	[MN/m ²]				[MN/m ²]				[MN/m ²]			
0	1000	1000	0,003	2,025	-3,568	2,447	-	1000	200	-	1000	200
1			0,007	2,023	-1,556	2,331	-			-		
2			0,016	2,019	-0,947	2,258	-			-		
3			0,044	2,008	-0,428	2,160	-			-		
4			0,120	1,974	0,120	1,974	-			-		
5			0,306	1,871	0,563	1,662	-			-		
6			0,628	1,588	0,834	1,260	-			-		
7							-			-		
	Obciążenie równomiernie rozłożone											
pkt	C_z		β	μ	C_z		β	μ	C_z		β	μ
	[MN/m ²]				[MN/m ²]				[MN/m ²]			
0	1000	1000	0,512	1,712	0,225	1,920	-	1000	200	-	1000	200
1			0,405	1,802	0,210	1,928	-			-		
2			0,337	1,851	0,230	1,917	-			-		
3			0,296	1,878	0,281	1,887	-			-		
4			0,271	1,893	0,356	1,838	-			-		
5			0,258	1,901	0,438	1,777	-			-		
6			0,254	1,903	0,491	1,731	-			-		
7							-			-		

Dla każdego typu obciążenia przyjęto cztery funkcje sztywności zespolenia $C_z(x)$:

- wartość stała, $C_z = 1000 \text{ MN/m}^2$,
- liniową o $C_{zp} = 200 \text{ MN/m}^2$ oraz $C_{zk} = 1000 \text{ MN/m}^2$,
- według paraboli wypukłej $C_{zp} = 200 \text{ MN/m}^2$ oraz $C_{zk} = 1000 \text{ MN/m}^2$,
- według paraboli wklęsłej $C_{zp} = 200 \text{ MN/m}^2$ oraz $C_{zk} = 1000 \text{ MN/m}^2$,

gdzie C_{zp} jest wartością w środku rozpiętości przęsła ($x = L/2$), natomiast C_{zk} dotyczy punktu podparcia ($x = 0$ i $x = L$). Parametry geometryczne i własności materiałowe przekroju poprzecznego dźwigara zestawiono w tabl. 1 (oznaczenia jak na rys. 13).

Wartości μ oraz β podano w kolejnych przekrojach dźwigara (0 – przekrój podporowy, 7 – środek rozpiętości przęsła). W przypadku przekroju podporowego parametry zespolenia są nieokreślone, gdyż siły wewnętrzne, z założenia, dążą do zera. Na rys. 22 przedstawiono wybrany wykres zmiany odkształceń na długości dźwigara zespolonego. W tym przypadku przyjęto jeden z podanych w tabl. 2 rodzaj obciążenia (siła skupiona w środku rozpiętości przęsła) i rozkład sztywności zespolenia (parabola wklęsła). Na długości przęsła wyróżniono przedziały wartości β podane na rys. 14.



Rys.22. Odkształcenia jednostkowe na długości belki oraz zakresy zmian wartości β
Fig.22. Distribution of strains along the beam and ranges of β value

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy omówiono sposoby konstruowania płyt pomostowych, stosowane rodzaje łączników zespalających, wyniki badań w aspekcie podatności zespolenia. Poddano analizie stosowane dwa ujęcia rozwiązania: MES i analityczne. Wykazano dużą zbieżność wyników rozwiązania zagadnienia współdziałania elementów dźwigara zespolonego w postaci sił wewnętrznych i przemieszczeń. Wykazano, że mieszane rozwiązanie ujęcia analitycznego jest efektywne, daje bowiem dobre wyniki zarówno w zakresie sił wewnętrznych, jak i przemieszczeń.

Przedstawione w pracy wyniki analizy wpływu funkcji parametru zespolenia $C_z(x)$ i momentu zginającego $M(x)$ na funkcje sił wewnętrznych w belce stalowej i funkcje odkształceń w przekroju poprzecznym dźwigara, uzyskane przy użyciu wskaźników μ oraz β , pozwalają na sformułowanie podanych niżej wniosków.

- Funkcje zmiany parametru zespolenia $C_z(x)$ i momentu $M(x)$ wpływają w sposób istotny na rozkład sił wewnętrznych w belce i płycie. Mają one również decydujący wpływ na wykres naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym dźwigara.
- Wskaźniki zespolenia μ oraz β dają wyłącznie informacje o charakterystyce wykresu odkształceń na wysokości przekroju poprzecznego dźwigara.
- Ustalenie zależności pomiędzy $C_z(x)$ i $M(x)$ a $\mu(x)$ i $\beta(x)$ w ogólnym przypadku jest niemożliwe. Wobec tego klasyczna (projektowa) analiza wykresu sił wewnętrznych w wydzielonym z układu konstrukcyjnego przekroju poprzecznym dźwigara podatnie zespolonego nie oddaje wyężenia belki stalowej, zespolonej podatnie z betonową płytą pomostową.

Występujące w praktyce projektowej różnorodne funkcje $C_z(x)$ i $M(x)$ oraz nakładki pasów dolnych w belkach stalowych oraz przestrzenne struktury prętowe zespolone z płytą pomostową [48] będą przedmiotem przyszłych analiz numerycznych. Odrębnym problemem jest analiza efektów reologicznych dźwigara podatnie zespolonego [25]. W niniejszej pracy zastosowano ujęcie problemu według zmodyfikowanej teorii starzenia betonu Trosta [46].

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Furtak K.*: Mosty zespolone. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków 1999
- [2] *Danielski L.*: Mosty metalowe. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1983
- [3] *Karlikowski J., Wołowicki W.*: The experimental-analytical assessment of the carrying capacity of the quasi composite multi beam bridge. Proceedings of the 4th International Conference Safety of Bridge Structures, 435-442, Wrocław 1992
- [4] *Nakamura S., Momiyama Y., Hosaka T., Homma K.*: New technologies of steel/concrete composite bridges. Journal of Constructional Steel Research, **58**, 99-130, 2002

- [5] Flaga K., Szopa J.: Słupy zespolone typu CFST jako alternatywa dla słupowych żelbetowych filarów mostowych. Konferencja Naukowo-Techniczna Mosty Zespolone, 89-99, Kraków 1998
- [6] Toczkiwicz R.: Chiny - prekursor konstrukcji CFST. *Bezpieczne Drogi*, nr 7 (67), 20-22, 2004
- [7] Furtak K., Sobczyk M., Wąchalski K.: Nowa generacja łączników w mostach zespolonych. *Inżynieria i Budownictwo*, 5, 239-243, 1998
- [8] Oehlers D. J., Nguyen N. T., Ahmed M., Bradford M. A.: Partial interaction in composite steel and concrete beams with full shear connection. *Journal of Constructional Steel Research*, **41**, 235-248, 1997
- [9] Kliger I. R., Pellicane P. J.: Stiffness evaluation of stressed-skin panels of mixed construction. *Journal of Structural Engineering*, **123**, 8, 1046-1053, 1997
- [10] Hegger J., Sedlacek G., Doeinghaus P., Trumpf H.: Untersuchungen zur Duktilitaet der Verbundmuettel bei Anwendung von Hochfestem Stahl und hochfestem Beton. *Stahlbau* 70 (2001), **7**, 436-446
- [11] Topkaya C., Yura J. A., Williamson E. B.: Composite shear stud strength at early concrete ages. *Journal of Structural Engineering*, **130**, 6, 952-960, 2004
- [12] An L., Cederwall K.: Push out tests on studs in high strength and normal strength concrete. *Journal of Constructional Steel Research*, **36**, 15-29, 1996
- [13] Chang-Su S., Pil-Goo L., Tae-Yang Y.: Static behavior of large stud shear connectors. *Engineering Structures*, **26**, 1853-1860, 2004
- [14] Oehlers D. J.: Deterioration in strength of stud connectors on composite bridge beams. *Journal of Structural Engineering*, **116**, 12, 3417-3431, 1990
- [15] Gattesco N., Giuriani E.: Experimental study on stud shear connectors subjected to cyclic loading. *Journal of Constructional Steel Research*, **38**, 1, 1-21, 1996
- [16] Nakajima A., Saiki I., Kokai M., Doi K., Takabayashi Y., Ooe H.: Cyclic shear force-slip behavior of studs under alternating and pulsating load condition. *Engineering Structures*, **25**, 537-545, 2003
- [17] Civjan S. A., Singh P.: Behavior of shear studs subjected to fully reversed cyclic loading. *Journal of Structural Engineering*, **129**, 11, 1466-1474, 2003
- [18] Chang-Su S., Pil-Goo L., Sung-Pil C.: Design of shear connection in composite steel and concrete bridges with precast decks. *Journal of Constructional Steel Research*, **57**, 203-219, 2001
- [19] Nie J., Xiao Y., Lin C.: Experimental studies on shear strength of steel-concrete composite beams. *Journal of Structural Engineering*, **130**, 8, 1206-1213, 2004
- [20] Yen J. Y. R., Lin Y., Lai M. T.: Composite beams subjected to static and fatigue loads. *Journal of Structural Engineering*, **123**, 6, 765-771, 1997
- [21] Onysyk J., Sadowski K., Biliszczyk J.: Badania odbiorcze w zakresie próbnego obciążenia mostu granicznego na rzece Nysa Łużycka w miejscowości Zasięki. Raport serii SPR 114/20002 Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej

- [22] Łagoda M.: Stany graniczne podatności łączników w mostowych konstrukcjach zespolonych. Raport PRE-52/81 Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej (praca doktorska)
- [23] Bullo S., Di Marco R.: A simplified method for assessing the ductile behavior of stud connectors in composite beams with high strength concrete slab. *Journal of Constructional Steel Research*, **60**, 1387-1408, 2004
- [24] Hegger J., Goralski C., Rauscher S., Kerkeni N.: Finite-Elemente-Berechnungen zum Trag und Verformungsverhalten von Kopfbolzenduebeln. *Stahlbau*, 73 (2004), 1, 20-25
- [25] Ryż K.: Wpływ stopnia współpracy płyty z dźwigarem na efekty reologiczne w zespolonych przęsłach mostowych typu beton-stal. Konferencja Naukowo-Techniczna „Trwałość i Przydatność Użytkowa Konstrukcji Mostowych”, 307-315, Poznań 1989
- [26] Hyo-Gyoung K., Young-Jae S.: Time-dependent behavior of composite beams with flexible connectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 3751-3772, 2002
- [27] Slutter R. G., Fisher J. W.: Fatigue strength of shear connectors. Hwy. Res. Rec. 147, Transp. Res. Board, Washington, D.C., 1966
- [28] Hallam M. W.: The behavior of stud shear connectors under repeated loading. University of Sydney School of Civil Engineering Research Report R 281, August 1976
- [29] Taplin G., Grundy P.: Incremental slip of stud shear connectors under repeated loading. *Proceedings of the International Conference on Composite Construction*, Innsbruck 1995
- [30] Newmark N. M.: Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction. *Exp. Stress Anal.* 9 (1), 75-92, 1951
- [31] Wang Y. C.: Deflection of steel-concrete composite beams with partial shear interaction. *Journal of Structural Engineering*, **124**, 10, 1159-1165, 1998
- [32] Faella C., Martinelli E., Nigro E.: Steel and concrete composite beams with flexible shear connection: “exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Computers and Structures*, **80**, 1001-1009, 2002
- [33] Nie J., Cai C. S.: Steel-concrete composite beams considering shear slip effects. *Journal of Structural Engineering*, **129**, 4, 495-506, 2003
- [34] Seracino R., Oehlers D.J., Yeo M.F.: Partial-interaction flexural stresses in composite steel and concrete bridge beams. *Engineering Structures*, **23**, 1186-1193, 2001
- [35] Jasim N. A.: Deflections of partially composite beams with linear connector density. *Journal of Constructional Steel Research*, **49**, 3, 241-254, 1999
- [36] Salari M. R., Spacone E., Shing P., Frangopol D. M.: Nonlinear analysis of composite beams with deformable shear connectors. *Journal of Structural Engineering*, **124**, 10, 1148-1158, 1998

- [37] *Gattesco N.*: Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection. *Journal of Constructional Steel Research*, **52**, 195-218, 1999
- [38] *Oven A., Burgess I. W., Plank R. J., Wali A. A.*: An analytical model for the analysis of composite beams with partial interaction. *Computers and Structures*, **62**, 3, 493-504, 1997
- [39] *Fragiacomo M., Amadio C., Macorini L.*: Finite-element model for collapse and long-term analysis of steel-concrete composite beams. *Journal of Structural Engineering*, **130**, 3, 489-497, 2004
- [40] *Faella C., Martinelli E., Nigro E.*: Shear connection nonlinearity and deflections of steel-concrete composite beams: a simplified method. *Journal of Structural Engineering*, **129**, 1, 12-20, 2003
- [41] *Ayoub A.*: A force-based model for composite steel-concrete beams with partial interaction. *Journal of Constructional Steel Research*, **61**, 387-414, 2005
- [42] *Sebastian W. M., McConnel R. E.*: Nonlinear FE analysis of steel-concrete composite structures. *Journal of Structural Engineering*, **126**, 6, 662-674, 2000
- [43] *Razaqpur G., Nofal M.*: Analytical modeling of nonlinear behavior of composite bridges. *Journal of Structural Engineering*, **116**, 6, 1715-1733, 1989
- [44] *Lorenc W., Kubica E.*: Nonlinear modeling of composite beams prestressed with external tendons. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, **IV**, 1/2004, 83-93
- [45] *Machelski Cz.*: Efekty podatności zespolenia w przęsłach drogowych pod obciążeniem ruchomym. *Drogownictwo*, 7/1998, 210-212
- [46] *Trost H.*: Zur Berechnung von Stahlverbundträgern in Gebrauchszustand auf Grund neuerer Erkenntnisse des viskoelastischen Verhaltens des Betons. *Der Stahlbau*, 11/1968

FLEXIBILITY OF A STEEL GIRDER CONNECTION WITH A SLAB IN COMPOSITE BRIDGES

Abstract

The paper concerns analysis of internal forces and displacements in steel bridge girders flexibly connected with concrete deck slab. Types of deck slabs, shear connectors and test results are discussed. Five models describing the phenomenon of connection flexibility in bent girders are presented. The emphasis is put on the solution of the analytical problem based on differential equations. The analysis concerns two applied forms of the problem concerning the interaction of the combined girder elements resulting with internal forces or displacements. The mixed solution has been proven to be more effective, as it provides exact results (internal forces and displacements). The analysis of the problem, carried out with use of classical parameter C_z characterizing flexibility of connection, was complemented with μ and β indicators introduced by authors. It is shown that μ and β indicators inform on the stress distribution in cross section of the girder. The $C_z(x)$ and $M(x)$ functions essentially influence the internal forces distribution along the girder. Thus they influence the μ and β indicators as well. Numerical examples given in the paper describe relations between $C_z(x)$ and $M(x)$ as well as μ and β .