

JERZY ODOROWICZ<sup>1)</sup>

## BADANIA DOŚWIADCZALNE NAD ŚCISKANIEM PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH W ZAKRESIE ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH<sup>2)</sup>

**STRESZCZENIE.** Praca zawiera analizę stateczności ściskanych prętów pryzmatycznych o przekroju kołowym pełnym, w zakresie odkształceń sprężysto-plastycznych. Rozważane są smukłości  $\lambda_H \leq \lambda \leq \lambda_r$ , gdzie  $\lambda_H = \pi \sqrt{E/R_H}$ ,  $R_H$  jest granicą proporcjonalności oraz smukłość  $\lambda_r$  rozdziela zakres odkształceń sprężystych od zakresu sprężysto-plastycznego. Przedstawiono opis badań eksperymentalnych oraz analizę wyników tych badań na podstawie zaproponowanych przez autora wzorów określających parametry statyczne i geometryczne pręta materialnego oraz wartość energii i pracy sił zewnętrznych stanu krytycznego i nadkrytycznego. Badania uzupełniono obliczeniami współczynnika pewności konstrukcji, który wg zaproponowanej w pracy teorii ma wartości znacznie mniejsze niż te wynikające z normy PN-90/B-03200 dotyczącej obliczeń statycznych i projektowania konstrukcji stalowych.

W analizie uwzględniono, wynikający z badań eksperymentalnych przebieg próby ściskania, w której ściskany pręt zachowuje postać prostoliniową tylko w pierwszym etapie próby. Przy sile  $P_E / \sqrt{3}$ , gdzie  $P_E$  jest wyznaczoną przez Eulera wartością siły krytycznej, występuje krytyczne skrócenie jego osi a pręt staje się nieściśliwy. Powyżej tej siły obserwuje się ugiętą stateczną postać pręta. Pręt osiąga energię potencjalną równą maksymalnej energii sprężystej wynikającej ze struktury materiału i kształtu przekroju poprzecznego pręta. Odkształcenia trwałe pojawiają się przy obciążeniu siłą  $P > P_E$ , przy której materiał pręta ulega wzmocnieniu.

### 1. WSTĘP

Stalowe konstrukcje nośne mostów drogowych, zwłaszcza kolejowych należą do najbardziej odpowiedzialnych konstrukcji w praktyce inżynierskiej. Wiele katastrof

<sup>1)</sup> mgr inż. – emerytowany projektant konstrukcji, Warszawa

<sup>2)</sup> pracę poświęcam moim córkom Elżbiecie i Beacie

mostów np. w Manchenstern w Szwajcarii w 1896 r., na rzece Kewdzie w Rosji w 1892 r. czy na rzece Quebec w Kanadzie było spowodowanych niedoskonałością metod obliczeniowych stosowanych w projektowaniu konstrukcji [1] i przyczyniło się do rozwoju badań podstawowych elementów konstrukcji mostowych, w tym badań nad statecznością elementów ściskanych. Istotny jest zwłaszcza zakres sprężysto-plastyczny pracy konstrukcji, gdy występujące w nich naprężenia ściskające są wyższe od granicy proporcjonalności  $R_H$ . Prace te zapoczątkował polski uczony Feliks Jasiński [2], który wprowadził do rozważań zmienny moduł  $T$ . Jego sugestię rozwinęli Engesser [3], Karman [4] oraz Ylinen [5]. Aktualnie, teoretyczne i eksperymentalne badania stateczności elementów konstrukcyjnych w zakresie sprężysto-plastycznym: prętów pryzmatycznych, kształtowników, płyt, elementów cienkościennych etc. są prowadzone w wielu ośrodkach naukowych na świecie [6 - 7].

W niniejszej pracy opisano badania eksperymentalne oraz podano ścisłe teoretyczne wzory, które mogą być wykorzystane do obliczeń konstrukcji zbudowanych z układów prętowych np. mostów, suwnic, maszyn budowlanych itd.

Analiza dotyczy stateczności prętów pryzmatycznych o przekroju kołowym pełnym, o smukłościach  $\lambda_H \leq \lambda \leq \lambda_r$ , gdzie smukłość  $\lambda_r$  rozdziela zakres odkształceń sprężystych od zakresu sprężysto-plastycznego. W pręcie o smukłości  $\lambda_r$ , obciążonym eulerowską siłą krytyczną  $P_E$ , całkowite naprężenie, od ściskania i zginania, występujące w skrajnych włóknach - po jego wklęsłej stronie - jest równe granicy proporcjonalności materiału  $R_H$ . W odniesieniu do przekroju będącego przedmiotem badań smukłość  $\lambda_r = 4,369\lambda_H$ , gdzie smukłość graniczna  $\lambda_H = \pi \sqrt{E / R_H}$ .

Autorowi nie są znane przypadki, aby w ściskanych prętach o smukłościach  $\lambda < \lambda_r$  uwzględniono występowanie modułów wybozeniowych  $E^* < E$ , istotnych zwłaszcza w konstrukcjach cienkościennych opisanych przez Własowa [8].

W pracy [9] przedstawiono wyniki badań ściskanych prostych prętów o smukłości  $\lambda \geq \lambda_r$ . Stwierdzono, że przy sile ściskającej

$$P \approx P_E / \sqrt{3} , \quad (1.1)$$

występuje krytyczne skrócenie osi pręta

$$\Delta l_k = \pi^2 i^2 / l = \pi^2 i / \lambda = l \varepsilon_k = l \pi^2 / \lambda^2 , \quad (1.2)$$

gdzie  $l$  jest długością początkową prostego pręta, natomiast  $i$  jest promieniem bezwładności rdzenia przekroju poprzecznego pręta. Przy obciążeniu siłą  $P < P_E / \sqrt{3}$  pręt zachowuje postać prostoliniową, a przy sile  $P = P_E / \sqrt{3}$  pojawiają się, pierwsze mierzalne ugięcia wynoszące  $\sim 0,0002 \text{ cm} = 2 \mu\text{m}$ , występujące niezależnie od smukłości pręta. Przy siłach  $P > P_E / \sqrt{3}$  spełnione są zależności

$$k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{4 \sin^2(\alpha / 2)}{f^2} = \frac{P}{E_w^* J} . \quad (1.3)$$

Dokrytyczne siły ściskające  $P \leq P_E$  są natomiast określone zależnościami

$$P = \varepsilon_k E_w^* A = \frac{\pi^2 E_w^*}{\lambda^2} A = E_w^* J \frac{\pi^2}{l^2} = E_w^* J \frac{4 \sin^2(\alpha / 2)}{f^2}, \quad (1.4)$$

gdzie  $E_w^* \leq E$  jest modułem wyboczeniowym występującym w materiale ściskanego pręta przy ugięciu  $0 < f < f_k$ , po pierwotnym wystąpieniu jego nieściśliwości w stanie prostym, zgodnie z (1.1) i (1.2).

Eulerowska, krytyczna siła ściskająca  $P_E$  jest ekstremalną siłą stanów dokrytycznych, występującą w nieściśliwym pręcie o smukłości  $\lambda > \lambda_r$  w chwili, gdy moduł wyboczeniowy  $E_w^*$  osiąga wartość modułu Younga  $E$ . Tak określony, sprężysty, statyczny stan wyboczonego pręta, występuje tylko przy smukłości  $\lambda \geq \lambda_r$ , gdy strzałka ugięcia

$$a_k = \frac{f_k}{l} = \frac{4}{\pi} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{\lambda}{\lambda_H^3} - \frac{1}{\lambda^2} \right)} - 1, \quad (1.5)$$

przy której układ materialny osiąga - niezależną od smukłości - maksymalną energię sprężystą

$$U_H = \sqrt{R_H^3 / E} \pi A i / 2. \quad (1.6)$$

Powyższa energia wynika z badań [9] i [10], na podstawie których przeprowadzono analizę stanów krytycznych i nadkrytycznych w pracy [10], stanowiącej teoretyczne interpretacje otrzymanych wyników.

## 2. WZORY TEORETYCZNE WYPROWADZONE W PRACACH [9], [10]

Krytyczne odkształcenie wzdłużne osi ściskanego pręta

$$\varepsilon_k = \pi^2 / \lambda^2 = \sigma / E_w^* = \sigma_E / E = (Z_O / \rho)_{l/2}, \quad (2.1)$$

gdzie:

$Z_O$  – współrzędna położenia osi obojętnej w połowie długości pręta,

$\rho$  – promień krzywizny w połowie długości pręta.

Iloczyn przemieszczeń poprzecznych

$$Z_O f = i^2, \quad (2.2)$$

gdzie:

$f$  – ugięcie (wyboczenie) w połowie długości pręta.

Krzywizna w połowie długości wyboczonego pręta

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\pi^2 f}{l^2} = -\frac{P f}{E_w J} = -\frac{P_E f_k}{E J} = -\frac{4 \sin^2(\alpha/2)}{f} \quad (2.3)$$

Adekwatna smukłość pręt ściśliwego o pełnym przekroju kołowym

$$\lambda_\phi = a_{nk} \lambda_H^2 + \sqrt{(a_{nk} \lambda_H^2)^2 + \lambda_H^2} \quad (2.4)$$

gdzie nadkrytyczna strzałka ugięcia

$$a_{nk} = \frac{f_{nk}}{l} = \frac{W}{A i} \left( \frac{\lambda}{\lambda_H^2} - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.5)$$

Stan krytyczny pręta obciążonego Eulerowską siłą  $P_E = P_k$ , przy krytycznym wyboczeniu  $f_k$ , występuje przy nieściśliwej osi pręta i jest opisany bilansem prac sił zewnętrznych

$$2L_{zgk} + L_{sc_k} = L_H \quad (2.6)$$

gdzie praca zginania

$$L_{zgk} = P_E \Delta l_{zgk} = P_E l \left( \frac{\pi a_k}{2} \right)^2 \left( 1 + \frac{\pi^2 a_k^2}{32} \right) \quad (2.7)$$

praca ściskania

$$L_{sc_k} = P_E \Delta l_{sc_k} / 2 = P_E \frac{\pi^2 i^2}{2l} \quad (2.8)$$

oraz maksymalna praca sprężysta

$$L_H = R_H A \frac{\pi^2 i^2}{2l_H} = \sqrt{R_H^2 / E} \pi A i / 2 = U_H \quad (2.9)$$

Smukłość rozdzielającą  $\lambda_r$  wyznaczamy z porównania wzorów (1.5) i (2.5)

$$\frac{4}{\pi} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{\lambda}{\lambda_H^2} - \frac{1}{\lambda} \right)} - 1} = \frac{W}{A i} \left( \frac{\lambda}{\lambda_H^2} - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.10)$$

Krytyczny kąt obrotu końców wyboczonego pręta określamy z wzoru

$$\cos \alpha_k = 9 - 8 \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{\lambda}{\lambda_H^3} - \frac{1}{\lambda^2} \right)}. \quad (2.11)$$

Z wzoru (1.3), w odniesieniu do stanów dokrytycznych jest

$$\sin(\alpha / 2) = \frac{\pi f}{2l} = \frac{\pi}{2} a, \quad (2.12)$$

a w stanie krytycznym

$$\sin(\alpha_k / 2) = \frac{\pi f_k}{2l} = \frac{\pi}{2} a_k. \quad (2.13)$$

Zbliżenie końców pręta od zginania w stanach dokrytycznych oraz krytycznych określamy z wzoru ogólnego

$$\Delta l_{zg} = \left( \frac{\pi a}{2} \right)^2 \left( 1 + \frac{\pi^2 a^2}{32} \right) l \quad (2.14)$$

albo

$$\Delta l_{zg} = l / 2 [1 - \cos^4(\alpha / 4)]. \quad (2.15)$$

Przy mniejszych smukłościach  $\lambda \leq \lambda_r$ , ugięcia krytyczne określimy z wzoru

$$f_k = i \sqrt{(\lambda / \lambda_H)^3 - 1}, \quad (2.16)$$

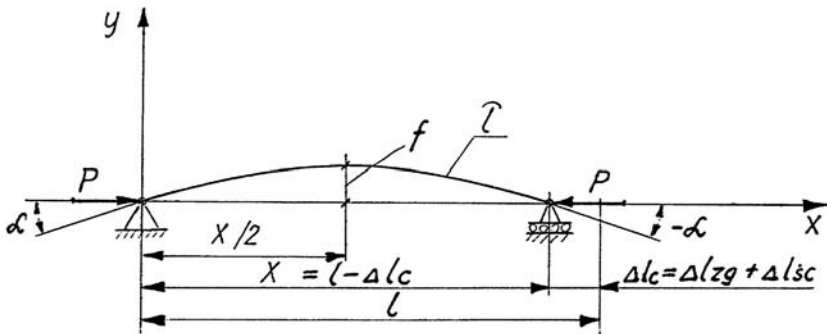
a strzałka ugięcia

$$a_k = f_k / l = \sqrt{\lambda / \lambda_H^3 - 1 / \lambda^2}. \quad (2.17)$$

### 3. OGÓLNE OMÓWIENIE BADAŃ

#### 3.1. OPIS STANOWISKA DO BADAŃ

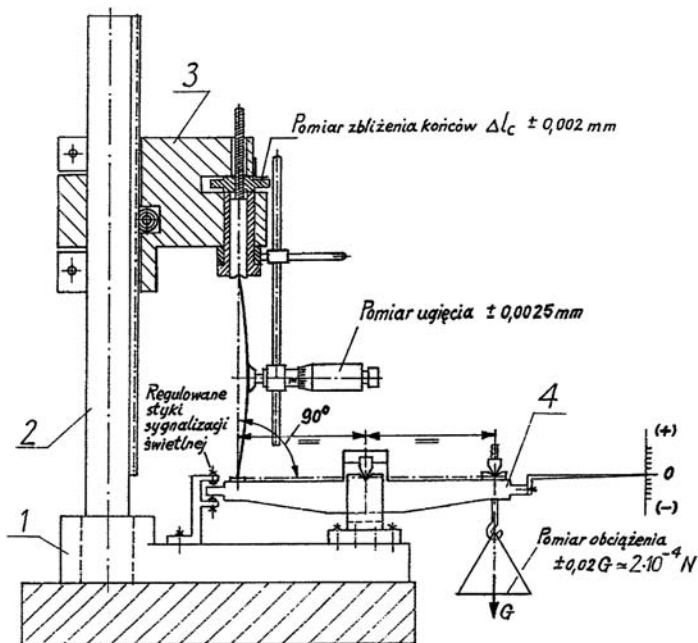
Badania przeprowadzono nad prętami prostymi podpartymi obustronnie przegubowo, wg schematu na rysunku 3.1. Do badań prętów o smukłości  $\lambda_H \leq \lambda \leq \lambda_r$  wykorzystano stanowisko opisane w pracy [9].



Rys.3.1. Schemat podparcia obciążanych prętów  
Fig.3.1. Supporting scheme of the considered beam columns

Schemat stanowiska badawczego przedstawiono na rysunku 3.2.

Przyrząd składa się z płyty podstawy 1, wykonanej z żeliwa, w której osadzono stalową kolumnę 2 z przymocowaną do niej listwą uzębioną, służącą do pionowego przesuwania wspornika 3. Na płycie podstawy 1 ustawiono wagę 4, której pozioma dźwignia miała możliwość kontroli położenia za pomocą sygnalizacji świetlnej. Pomiaru ugięcia dokonywano za pomocą głębokościomierza.



Rys.3.2. Schemat urządzenia do badań prętów  
Fig.3.2. Predesign of the experimental test stand

Przyrząd zapewnia dokładność pomiarów:

- obciążeń pręta do  $0,02 \text{ G} \equiv 2 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ ,
- zbliżeń końców pręta do  $0,002 \text{ mm}$ ,
- ugięć pręta do  $0,0025 \text{ mm}$ .

Do pomiarów ugięcia zastosowano głębokościomierz wyższej klasy dokładności wyposażony w końcówkę talerzową  $\phi 15 \text{ mm}$  ułatwiającą wykrycie największego ugięcia pręta. Głębokościomierz włączony w obwód elektryczny o napięciu  $U=4,5 \text{ V}$  zapewniał pomiar ugięcia przy najmniejszej sile nacisku na pręt poprzez zastosowanie sygnalizacji świetlnej.

Pomiar zbliżeń końców, ugięcia i obciążenia pręta dokonywano przy poziomym (zerowym) położeniu dźwigni wagi, kontrolowanym sygnalizacją świetlną poprzez regulowane styki. Taki system umożliwił zarejestrowanie wartości ekstremalnej siły niszczącej  $P_n$  z dużą dokładnością. Wykrycie ekstremalnej siły  $P_n$  następowało przez samoistny zanik zdolności pręta do przeniesienia ostatniego obciążenia, w wyniku czego dźwignia wagi opierała się o górny styk, powodując włączenie czerwonego sygnału świetlnego.

### 3.2. PRZYGOTOWANIE PRÓBEK

Przy smukłościach  $\lambda < \lambda_r$  występują siły ściskające o dużych wartościach, wpływające ujemnie na dokładność pomiarów. Wg wzoru (2.4) adekwatna smukłość pręta jest zależna od smukłości  $\lambda_H$  określonej wzorem  $\lambda_H^2 = \pi^2 E / R_H$ , z którego wynika, iż dla materiałów o niskiej granicy  $R_H$  otrzymamy większe smukłości badanych prętów.

Znaczne obniżenie granicy  $R_H$  otrzymujemy w wyniku rekrytalizacji materiału (w temperaturze  $\sim 650^\circ\text{C}$ ), która wpływa dodatnio na jednolitość struktury, usuwając trwałe zgnioty powstałe w wyniku przeciągania drutu. Do badań użyto dwa gatunki drutów o średnicy  $d = 1,005 \text{ mm}$ , wykonanych przez Mikrohutę Baildon ze stali odsiarczonych i odgazowanych, poddanych następnie rekrytalizacji. Użyte do badań odcinki drutów, pierwotnie proste, nie uległy żadnej deformacji.

Pręty wykonane ze stali D45 o zawartości węgla 0,45% wykazały:

- wytrzymałość na rozciąganie  $R_m = 560,50 \text{ MPa}$ ,
- granicę plastyczności  $R_e = 371,10 \text{ MPa}$ , materiał A
- granicę proporcjonalności  $R_H = 269,90 \text{ MPa}$ ,
- moduł sprężystości  $E = 210250 \text{ MPa}$ ,
- kwadrat smukłości  $\lambda_H^2 = 6998,93$ .

Pręty wykonane ze stali D50 o zawartości węgla 0,50% wykazały:

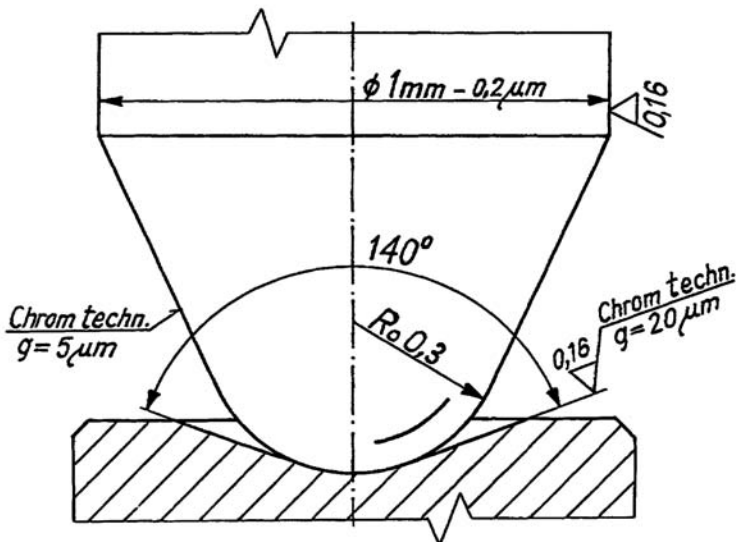
- wytrzymałość na rozciąganie  $R_m = 627,20 \text{ MPa}$ ,

– granicę plastyczności	$R_e = 402,00 \text{ MPa}$ ,	materiał B
– granicę proporcjonalności	$R_H = 317,62 \text{ MPa}$ ,	
– moduł sprężystości	$E = 210100 \text{ MPa}$ ,	
– kwadrat smukłości	$\lambda_H^2 = 6528,60$ .	

Próbki przygotowane do badań (o długościach podanych w tablicach 3.1 i 3.2), wykonane przez wzorczarzy w F.W.P. „VIS”, spełniały wymagania tolerancji wg PN-80/M-02138, w której przy szeregu IT4 – stosowanym w wykonawstwie narzędzi pomiarowych i wzorców – obowiązują:

- tolerancja średnicy ( $d = 1 \text{ mm}$ )  $- 0,2 \mu\text{m}$ ,
- tolerancja bicia promieniowego  $1,2 \mu\text{m}$ ,
- tolerancja długości prętów  $- 8 \mu\text{m}$ ,
- tolerancja równoległości tworzącej  $1,2 \mu\text{m}$ ,
- tolerancja okrągłości zarysu kołowego  $0,08 \mu\text{m}$ ,
- chropowatość docieranych i polerowanych powierzchni  $0,16 \mu\text{m}$ .

Wysoka dokładność wymiarowa i geometryczna prętów umożliwia wysnucie z badań racjonalnych wniosków, odnoszących się do modelu pręta idealnego. Kuliste końce prętów wg rysunku 3.3 zahartowano powierzchniowo na głębokość około 0,5 mm, otrzymując twardość warstwy około 750 HV.



Rys.3.3. Schemat ułożyskowania prętów  
Fig.3.3. Predesign of the rods bearing



Tablica 3.1. Wyniki badań prętów (o średnicy  $d = 0,1$  cm) wykonanych z materiału wykazującego moduł  $E = 210250$  MPa, granicę proporcjonalności  $R_H = 296,91$  MPa, przy której jest  $\lambda_H^2 = 6988,934$  a smukłość rozdziałająca  $\lambda_r = 367,51$  przy  $a_r = 0,0249$   
 Table 3.1. Results of analysis of rods of diameter  $d = 0.1$  cm, made of steel of modulus  $E = 210250$  MPa and proportional limit  $R_H = 296.91$  MPa, for which  $\lambda_H^2 = 6988.934$ , slenderness of separation  $\lambda_r = 367.51$  and  $a_r = 0.0249$

Nr pręta	Smukłość $\lambda$	$l$ [cm]	$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ [daN]	Wyniki z badań			$a_n = \frac{f_n}{l}$	$\frac{P_n}{P_k}$	$\Delta l_{z_{gn}} = \frac{\pi^2 f_n^2}{4l}$ [cm]	$\Delta l_{sk_n} = \Delta l_c - \Delta l_{z_{gn}}$ [cm]	$L_{z_{gn}} = P_n \cdot \Delta l_{z_{gn}}$ [J]	$L_{sk_n} = P_n \cdot \Delta l_{sk_n}$ [J]	$\Delta l_{sk_n}$ $L_{sk_n} = P_n \cdot \frac{\Delta l_{sk_n}}{2}$ [J]
				$P_n$ [daN]	$f_n$ [cm]	$\Delta l_c$ [cm]							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
45	360	9	1,2575	1,2550	0,02220	0,0140	0,02467	0,9980	0,01351	0,000488	$1,696 \cdot 10^{-3}$	$3,063 \cdot 10^{-5}$	
46	320	8	1,5916	1,5693	0,1865	0,0116	0,02331	0,9862	0,01073	0,000872	$1,683 \cdot 10^{-3}$	$6,841 \cdot 10^{-5}$	
47	280	7	2,0788	2,0244	0,1535	0,0092	0,02193	0,9739	0,00830	0,000895	$1,681 \cdot 10^{-3}$	$9,060 \cdot 10^{-5}$	
48	240	6	2,8295	2,7152	0,1215	0,0070	0,02025	0,9598	0,00607	0,000929	$1,648 \cdot 10^{-3}$	$1,261 \cdot 10^{-4}$	
49	200	5	4,0744	3,8407	0,0920	0,0054	0,01840	0,9426	0,00418	0,001223	$1,604 \cdot 10^{-3}$	$2,349 \cdot 10^{-4}$	
50	160	4	6,3663	5,8748	0,0645	0,0042	0,01625	0,9228	0,00257	0,001534	$1,508 \cdot 10^{-3}$	$4,506 \cdot 10^{-4}$	
51	120	3	11,3178	10,1513	0,0385	0,0031	0,01283	0,8969	0,00122	0,001881	$1,238 \cdot 10^{-3}$	$9,547 \cdot 10^{-4}$	
52	$\lambda_H = 83,6$	2,09	23,3193	20,2225	0,0117	0,0029	0,00550	0,8673	0,00016	0,00274	$3,236 \cdot 10^{-4}$	$2,770 \cdot 10^{-3}$	

Tablica 3.2. Wyniki badań prętów (o średnicy  $d = 0,1$  cm) wykonanych z materiału wykazującego moduł  $E = 210100$  MPa, granicę proporcjonalności  $R_H = 317,62$  MPa, przy której jest  $\lambda_H^2 = 6528,6$  a smukłość rozdzielająca  $\lambda_r = 355,2$  przy  $a_r = 0,0258$   
 Table 3.2. Results of analysis of rods of diameter  $d = 0,1$  cm, made of steel of modulus  $E = 210100$  MPa and proportional limit  $R_H = 317,62$  MPa, for which  $\lambda_H^2 = 6988,934$ , slenderness of separation  $\lambda_r = 355,2$  and  $a_r = 0,0258$

Nr pręta	Smukłość $\lambda$	$l$ [cm]	$P_k = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$ [daN]	Wyniki z badań			$a_n = \frac{f_n}{l}$	$\frac{P_n}{P_k}$	$\Delta l_{zgn} = \frac{\pi^2 f_n^2}{4 l}$ [cm]	$\Delta l_{scn} = \Delta l_c - \Delta l_{zgn}$ [cm]	$L_{zgn} = P_n \cdot \Delta l_{zgn}$ [J]	$L_{scn} = P_n \frac{\Delta l_{scn}}{2}$ [J]
				$P_n$ [daN]	$f_n$ [cm]	$\Delta l_c$ [cm]						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
53	350	8,75	1,3295	1,3275	0,2240	0,0149	0,02560	0,9987	0,01415	0,00075	$1,879 \cdot 10^{-3}$	$4,985 \cdot 10^{-5}$
54	320	8	1,5904	1,5744	0,1965	0,0127	0,02456	0,9899	0,01191	0,00079	$1,875 \cdot 10^{-3}$	$6,227 \cdot 10^{-5}$
55	280	7	2,0773	2,0312	0,1615	0,0101	0,02307	0,9778	0,09194	0,00091	$1,867 \cdot 10^{-3}$	$9,205 \cdot 10^{-5}$
56	240	6	2,8274	2,7210	0,1280	0,0076	0,02133	0,9624	0,00674	0,00106	$1,834 \cdot 10^{-3}$	$1,442 \cdot 10^{-4}$
57	200	5	4,0715	3,8476	0,0970	0,0059	0,01940	0,9450	0,00464	0,00116	$1,787 \cdot 10^{-3}$	$2,225 \cdot 10^{-4}$
58	160	4	6,3617	5,8904	0,0743	0,0049	0,01858	0,9259	0,00341	0,00148	$1,690 \cdot 10^{-3}$	$4,214 \cdot 10^{-4}$
59	120	3	11,3098	10,1749	0,0406	0,0034	0,01367	0,8997	0,00136	0,00204	$1,384 \cdot 10^{-3}$	$1,038 \cdot 10^{-4}$
60	$\lambda_H = 80,8$	2,02	24,9457	21,5880	0,0118	0,0030	0,00584	0,8654	0,00017	0,00283	$3,672 \cdot 10^{-4}$	$3,054 \cdot 10^{-3}$

Po spolerowaniu zahartowanych czół pokryto je warstwą chromu technicznego o grubości  $q = 5 \mu\text{m}$  w celu zmniejszenia tarcia w łożyskach. Hartowane łożyska o twardości wynoszącej około 900 HV po spolerowaniu pokryto również warstwą chromu technicznego i następnie spolerowano.

Dzięki kontaktowi utwardzonych końców pręta z twardymi łożyskami uniknięto zjawiska utwierdzania się ściskanego pręta w miękkich łożyskach, powodującego wzrost siły ściskającej przy zmniejszonym ugięciu, co w efekcie powoduje błędne wyniki badań.

Bardzo ważnym testem świadczącym o należyтым przygotowaniu próbek do badań oraz o poprawnym wyznaczeniu modułów Younga  $E$  – było sprawdzenie zachowania się prętów przy obciążeniu siłami  $P = P_E / \sqrt{3}$ , przy których pręt osiąga krytyczne skrócenie osi  $\Delta l_k = \pi^2 i^2 / l$  i jednocześnie w pierwotnie prostym przecię pojawiają się pierwsze mierzalne mikro-ugięcia o wartości  $\sim 2 \mu\text{m}$ .

Wszystkie próbki spełniły ten test pozytywnie, co uwiarygodnia późniejsze wyniki właściwych badań zestawionych w tablicach 3.1 i 3.2.

Przeprowadzony test wykazał, że pierwotnie proste pręty pryzmatyczne obciążane osiowymi siłami ściskającymi pozostają w stanie prostym tylko do chwili wystąpienia nieściśliwości osi, zgodnie z (1.1) i (1.2).

W rozdziale 6 podano pełne wyniki badań nad obciążaniem pręta nr 59, które potwierdzają powyższy wniosek.

### 3.3. CEL BADAŃ

Celem badań było określenie podstawowych parametrów geometrycznych i statycznych pręta w ekstremalnym stanie obciążenia, a więc:

- wyznaczenie ekstremalnej wyboczeniowej siły niszczącej  $P_n$ ,
- ekstremalnego ugięcia niszczącego  $f_n$ ,
- zbliżenia całkowitego końców pręta  $\Delta l_c = \Delta l_{zg_n} + \Delta l_{śc_n}$ .

### 3.4. OPIS PRZEPROWADZONYCH BADAŃ

Badania przeprowadzono w pomieszczeniu pozbawionym drgań w temperaturze otoczenia  $18^\circ\text{C}$ . W celu zminimalizowania tarcia w przegubach, kuliste końce prętów pokrywano warstwą smaru z dodatkiem  $\text{M}_0\text{S}_2$ . Wszystkie pomiary przeprowadzono przy poziomym (zerowym) położeniu dźwigni wagi, a zapisy dokonywano na oddzielnych kartach z numerem pręta.

Długości prętów wykonanych z materiału D45 zestawiono w tablicy 3.1, nadano im numery 45 ÷ 52. Pręty wykonane z materiału D50 zestawiono w tablicy 3.2, nadając im numery 53 ÷ 60.

Wyniki badań prętów wykonanych z materiału D45 podano w tablicy 3.1 w kolumnach 5 ÷ 7, natomiast wyniki badań prętów z materiału D50 podano w kolumnach 5 ÷ 7 tablicy 3.2.

W kolumnie 10 obu tablic wyznaczono obliczeniową wartość zbliżenia końców pręta od zginania, a w kolumnie 11 podano wartości skróceń od ściskania.

W kolumnie 12 obu tablic podano wartości prac zginania  $L_{zg_n}$  od zewnętrznych sił niszczących  $P_n$ , natomiast w kolumnie 13 zestawiono obliczeniowe wartości prac ściskania  $L_{śc_n}$  od tych samych sił zewnętrznych.

obu tablic wynika, że w miarę zmniejszania się smukłości prętów maleje praca zginania  $L_{zg_n}$  i jednocześnie wzrastają prace ściskania  $L_{śc_n}$ .

W tablicy porównawczej 3.3, kolumny 1 ÷ 4 dotyczą wyników z tablicy 3.1 dla prętów wykonanych ze stali D45, a kolumny 5 ÷ 8 dotyczą wyników z tablicy 3.2 dla prętów wykonanych ze stali D50.

W kolumnie 3 podano wartość maksymalnej pracy sprężystej dla prętów wykonanych ze stali D45 wg wzoru (2.9)

$$L_H = R_H A \frac{\pi^2 i}{2 \lambda_H} = 3,4413 \cdot 10^{-3} \text{ J} , \quad (3.1)$$

która jest równa maksymalnej energii sprężystej wg (1.6)

$$U_H = \sqrt{\frac{R_H^3}{E}} \frac{\pi}{2} A i = 3,4413 \cdot 10^{-3} \text{ J} . \quad (3.2)$$

W kolumnie 7 podano wartość maksymalnej pracy sprężystej dla stali D50

$$L_H = R_H A \frac{\pi^2 i}{2 \lambda_H} = 3,8089 \cdot 10^{-3} \text{ J} , \quad (3.3)$$

która jest równa maksymalnej energii sprężystej

$$U_H = \sqrt{\frac{R_H^3}{E}} \frac{\pi}{2} A i = 3,8089 \cdot 10^{-3} \text{ J} . \quad (3.4)$$

Tablica 3.3 Porównanie prac sił zewnętrznych wg (2.6) z maksymalną energią sprężystą  $U_H = L_H = R_H A \pi^2 i / 2 \lambda_H$   
 Table 3.3 Comparison of the work of external forces, according to (2.6) with the maximum elastic energy  $U_H = L_H = R_H A \pi^2 i / 2 \lambda_H$

Pręty z tablicy 3.1				Pręty z tablicy 3.2			
Nr pręta	$2 L_{zg_n} + L_{sc_n}$ wg (2.6) [J]	$L_H$ [J]	$\frac{\text{kolumna 3}}{\text{kolumna 2}}$	Nr pręta	$2 L_{zg_n} + L_{sc_n}$ wg (2.6) [J]	$L_H$ [J]	$\frac{\text{kolumna 7}}{\text{kolumna 6}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
45	$3,422 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\pi^2 i}{2 \lambda_H} = 3,441 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ $L_H = R_H A$	1,0056	53	$3,807 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\pi^2 i}{2 \lambda_H} = 3,809 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ $L_H = R_H A$	1,0004
46	$3,433 \cdot 10^{-3}$		1,0019	54	$3,813 \cdot 10^{-3}$		0,9990
47	$3,453 \cdot 10^{-3}$		0,9965	55	$3,823 \cdot 10^{-3}$		0,9953
48	$3,423 \cdot 10^{-3}$		1,0052	56	$3,812 \cdot 10^{-3}$		0,9992
49	$3,443 \cdot 10^{-3}$		0,9994	57	$3,796 \cdot 10^{-3}$		1,0035
50	$3,466 \cdot 10^{-3}$		0,9929	58	$3,801 \cdot 10^{-3}$		1,0019
51	$3,430 \cdot 10^{-3}$		1,0034	59	$3,805 \cdot 10^{-3}$		1,0011
52	$3,427 \cdot 10^{-3}$		1,0042	60	$3,789 \cdot 10^{-3}$		1,0053

### 3.5. ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ

W kolumnie 2 tablicy 3.3 podano bilanse prac od sił zewnętrznych obliczone na podstawie wzorów (2.7) ÷ (2.9) dla przebadanych prętów wykonanych ze stali D45. Maksymalna niezgodność między kolumnami 3 i 2 wynosi 7‰ dla pręta nr 50.

W kolumnie 6 podano bilanse prac od sił zewnętrznych dla przebadanych prętów wykonanych ze stali D50, a z kolumny porównawczej 8 maksymalna niezgodność wynosi 4,7‰ dla pręta nr 55.

Na ogólną niezgodność wyników bilansów prac podanych w kolumnach 2 i 6 mają wpływ niedoskonałości pomiarów: ugięcia  $f_n$ , zbliżenia końców  $\Delta l_c$  oraz obciążenia  $P_n$ .

Z analizy statystycznej wynika, że łączny maksymalny błąd pomiarów może wywołać maksymalną odchyłkę bilansu prac wynoszącą  $\pm 9,2\%$ , a najbardziej prawdopodobną wynoszącą  $\pm 3\%$ . Otrzymane wyniki z badań mieszczą się w tych przedziałach i dlatego należy uznać, że wyniki z badań całkowicie potwierdzają, iż w zakresie odkształceń sprężysto-plastycznych wielkości ekstremalnych sił niszczących  $P_n$ , ugięć niszczących  $f_n$  i zbliżeń końców pręta  $\Delta l_n$  wynikają z prawa zachowania maksymalnej energii sprężystej wg (2.6) i (2.9).

Z kolumn 9 tablic 3.1 i 3.2 wynika, że ilorazy sił  $P_n / P_k$  maleją regularnie w miarę zmniejszania się smukłości prętów.

W następnej części analizy dokonujemy obliczeń wielkości promieni krzywizn pręta w połowie jego długości wg zależności (2.3) zapisując wzór w postaci

$$\rho_{n(l/2)} = l^2 / \pi^2 f_n = l / \pi^2 a_n . \quad (\text{a})$$

Wyniki obliczeń zestawiamy w tablicy 3.4.

Tablica 3.4 Wartości promieni krzywizn  $\rho_n$  w połowie długości badanych prętów  
Table 3.4 Values of radii of curvatures  $\rho_n$  in the middle of the tested rods span

Pręty z tablicy 3.1					Pręty z tablicy 3.2				
Poz.	Nr pręta	$l$ [cm]	$f_n$ [cm]	$\rho_n = l^2 / \pi^2 f_n$ [cm]	Poz.	Nr pręta	$l$ [cm]	$f_n$ [cm]	$\rho_n = l^2 / \pi^2 f_n$ [cm]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	45	9	0,2220	36,9685	1	53	8,75	0,2240	34,6313
2	46	8	0,1865	34,7697	2	54	8	0,1965	33,0000
3	47	7	0,1535	32,3436	3	55	7	0,1625	30,5522
4	48	6	0,1215	30,0211	4	56	6	0,1280	28,4966
5	49	5	0,0920	27,5330	5	57	5	0,0970	26,1137
6	50	4	0,0645	25,1340	6	58	4	0,0682	23,7700
7	51	3	0,0385	23,6855	7	59	3	0,0406	22,4604
8	52	2,09	0,0117	37,8274	8	60	2,02	0,0118	35,0365

#### 4. BILANS PRAC OD SIŁ ZEWNĘTRZNYCH DLA ZAKRESU ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH

Z analizy danych zawartych w kolumnach 5 i 10 tablicy 3.4 wynika, że promienie krzywizn  $\rho_n$  maleją wraz z długością prętów, jednakże w prętach nr 52 i 60 występuje ich raptowny wzrost.

Dla prętów wykonanych ze stali D45 wg tablicy 3.1 określono smukłość rozdzielającą  $\lambda_r = 4,3961$ ,  $\lambda_H = 367,513$  oraz długość  $l_r = \lambda_r \cdot i = 9,1888$  cm. Wg wzoru (2.16) ugięcie pręta wynosi

$$f_r = i \sqrt{\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_H}\right)^3 - 1} = i \sqrt{4,3961^3 - 1} = 0,229 \text{ cm} , \quad (\text{b})$$

oraz promień krzywizny

$$\rho_r = l_r^2 / \pi^2 f_r = 37,338 \text{ cm} . \quad (\text{c})$$

Jest on zbliżony do promienia krzywizny pręta nr 52.

Dla stali D50 określono smukłość rozdzielającą  $\lambda_r = 4,3961$  oraz  $\lambda_H = 355,2$  (wg tablicy 3.2), skąd długość  $l_r = \lambda_r i = 8,880 \text{ cm}$ .

Ugięcie pręta wynosi

$$f_r = i \sqrt{4,3961^3 - 1} = 0,229 \text{ cm} , \quad (\text{d})$$

a promień krzywizny

$$\rho_r = l_r^2 / \pi^2 f_r = 34,879 \text{ cm} . \quad (\text{e})$$

Jest on zbliżony do promienia krzywizny pręta nr 60.

W tej sytuacji możemy postawić hipotezę, że promień krzywizny pręta o smukłości  $\lambda_H$  jest równy promieniowi krzywizny pręta o smukłości  $\lambda_r$ , czyli

$$\rho_{n(H)} = \rho_r , \quad (4.1)$$

a po podstawieniu stosownych wartości jest

$$\frac{l_H^2}{\pi^2 f_{n(H)}} = \frac{l_r^2}{\pi^2 f_r} = \frac{4,3961^2 l_H^2}{\pi^2 f_r} . \quad (4.2)$$

Przyjmując zapis,  $\lambda_r / \lambda_H = \chi_r$ , otrzymamy z wzorów (4.2) oraz (b) wzór na ugięcie niszczące pręta o smukłości  $\lambda_H$  w postaci

$$f_{n(H)} = i \sqrt{\frac{1}{\chi_r} - \frac{1}{\chi_r^4}} \quad (4.3)$$

i jednocześnie jest z wzoru (4.3) oraz (b)

$$\frac{f_r}{f_{n(H)}} = \sqrt{\frac{(\chi_r^3 - 1) \chi_r^5}{\chi_r^4 - \chi_r}} = \chi_r^2 . \quad (4.4)$$

Z wzoru (4.3) otrzymujemy ugięcie

$$f_{n(H)} = 0,01185 \text{ cm} , \quad (\text{f})$$

które jest większe o 1,28% od ugięcia pręta nr 52 i zaledwie o 0,42% większe od ugięcia pręta nr 60.

Przyjmując, że w pręcie nr 60 jest ugięcie wg (f) i promień krzywizny wg (e) otrzymamy siłę

$$P = \frac{E J}{\rho_{n(H)} f_{n(H)}} = 24,9457 \text{ daN} , \quad (\text{g})$$

aż taką wartość ma teoretyczna siła  $P_k$  pręta nr 60 zapisana w kolumnie 4 tabeli 3.2. Rzeczywista siła niszcząca jest mniejsza o wartość 1,1555 co świadczy o tym, że w materiale pręta występuje moduł wybozczeniowy

$$E_{w(H)} = 0,8654 E = E P_n / P_k = E / 1,1555 , \quad (\text{h})$$

przy obecności odkształceń trwałych  $\Delta \varepsilon_{trw} > 0$ . Taki stan potwierdza rzeczywiste trwałe ugięcie każdego badanego pręta po jego odciążeniu.

Możemy więc zapisać, że

$$P_n = \frac{\pi^2 E_w J}{l^2} = \frac{\pi^2 E \frac{P_n}{P_k} J}{l^2} = \frac{\pi^2 E J}{(l \sqrt{P_k / P_n})^2} , \quad (4.5)$$

gdzie

$$l \sqrt{P_k / P_n} = l_z \quad (4.6)$$

jest długością zastępczą, przy pomocy której możemy obliczyć wartość siły niszczącej  $P_n$  wg hiperboli Eulera, co pokazano na rysunku 4.1.

Przyjęcie długości zastępczej umożliwia obliczenie wartości skrócenia pręta od ściskania siłą  $P_n$  poprzez zapis:

$$\Delta l_{\text{scn}} = \varepsilon_{k_z} l_z = \frac{\pi^2}{(\lambda \sqrt{P_k / P_n})^2} l \sqrt{P_k / P_n} = \frac{\pi^2 i}{\lambda \sqrt{P_k / P_n}} = \frac{\pi^2 i^2}{l \sqrt{P_k / P_n}} . \quad (4.7)$$

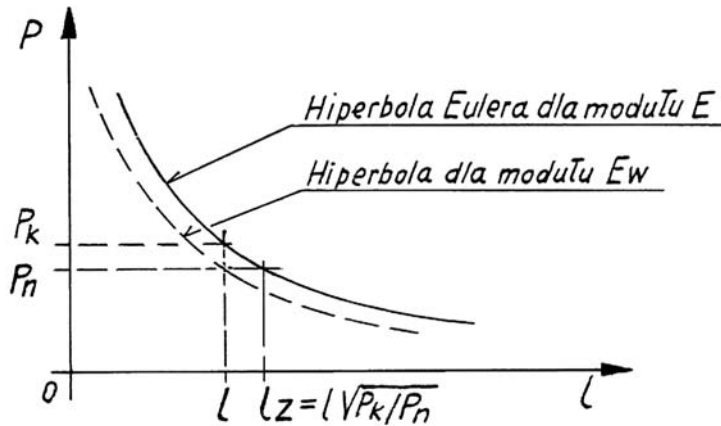
Zapiszmy bilans prac od sił zewnętrznych wg zależności (2.7)



$$2 P_n l \frac{\pi^2 a_n^2}{4} + \frac{P_n}{2} \frac{\pi^2 i^2}{l \sqrt{P_k / P_n}} = \frac{P_H}{2} \frac{\pi^2 i^2}{l_H}, \quad (4.8)$$

stąd można wyznaczyć

$$a_n^2 = \frac{P_H i^2}{P_n l_H l} \cdot l_l - \frac{i^2}{l^2 \sqrt{P_k / P_n}} = \frac{P_k}{P_n} \frac{i^2 l}{l_H^3} - \frac{i^2}{l^2 \sqrt{P_k / P_n}}. \quad (4.9)$$



Rys.4.1. Interpretacja położenia długości zastępczej  $l_z$   
 Fig.4.1. Explanation of the location of replacing length  $l_z$

Przyjmując  $P_k / P_n = \beta$  otrzymujemy

$$a_n = \sqrt{\beta \frac{\lambda}{\lambda_H^3} - \frac{1}{\lambda^2 \sqrt{\beta}}}, \quad (4.10)$$

skąd po przemnożeniu stronami przez  $l$  otrzymujemy wzór na ugięcie niszczące pręta

$$f_n = i \sqrt{\beta \frac{\lambda^3}{\lambda_H^3} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}}. \quad (4.11)$$

Przy  $\beta = 1$  wzór (4.11) przekształca się we wzór (2.16), a wzór (4.10) staje się wzorem (2.17). Zapis zależności (4.10) wynika z lewej strony zapisu (2.10) jednakże przy smukłościach  $\lambda < \lambda_r$  różnice otrzymywanych wyników są mniejsze o około 0,02% i nie mają żadnego znaczenia w obliczeniach inżynierskich.

Z zależności (4.3) przy wykorzystaniu wzoru (4.11) możemy dla prętów o smukłości  $\lambda = \lambda_H$  zapisać równość

$$\beta_H - \frac{1}{\sqrt{\beta_H}} = \frac{1}{\chi_r} - \frac{1}{\chi_r^4}, \quad (4.12)$$

z której przy  $\chi_r = 4,3961$  otrzymujemy dla przekroju kołowego pełnego

$$\beta_{H\phi} - \frac{1}{\sqrt{\beta_{H\phi}}} = 0,2248. \quad (4.13)$$

Równość tę spełnia wartość

$$\beta_{H\phi} = 1,1552. \quad (4.14)$$

Możemy zatem zapisać, że wartość siły niszczącej dla prętów o przekroju kołowym pełnym, o smukłości  $\lambda = \lambda_H$  wynosi

$$P_{n(H)} = P_k / \beta_{H\phi} = P_H / 1,1552. \quad (4.15)$$

Obliczenie współczynnika  $\beta_H$  dla dowolnego przekroju możemy dokonać z zapisu

$$\beta_H = \left( \frac{\lambda_r}{\lambda_H} \right)^\zeta = \chi_r^\zeta, \quad (4.16)$$

skąd wykładnik

$$\zeta = \frac{l_n \beta_H}{l_n \chi_r}. \quad (4.17)$$

Przy  $\chi_r = 4,3961$  i  $\beta_{H\phi} = 1,1552$  otrzymujemy dla prętów o pełnym przekroju kołowym wykładnik potęgi

$$\zeta_\phi = 1 / 10,263. \quad (4.18)$$

Z dyskusji można przedstawić wzór ogólny na wartość współczynnika  $\beta$  dla dowolnej smukłości pręta

$$\beta = \frac{P_k}{P_n} = \frac{E}{E_w} = \left( \frac{\lambda_r}{\lambda} \right)^\zeta. \quad (4.19)$$

Dla pręta nr 50 o smukłości  $\lambda = 160$  przy  $\lambda_r = 367,513$ , otrzymamy z powyższego wzoru, przy  $\zeta_\phi$  wg (4.18), wartość współczynnika  $\beta_\phi = 1,0844$ , a iloraz sił

$P_n / P_k = 1 / \beta_\phi = 0,9222$ . Wartość z badań zapisana w kolumnie 9 tabeli 3.1 wynosi  $P_n / P_k = 0,9228$  i jest większa o 0,68%, co potwierdza słuszność wzoru (4.19).

Dla prętów o pełnym przekroju kwadratowym otrzymujemy z równości (2.10) wartość  $\chi_r = \lambda_r / \lambda_H = 3,4798$  i w związku z tym na podstawie (4.12) zapisujemy

$$\beta_{H\phi} - \frac{1}{\sqrt{\beta_{H\phi}}} = \frac{1}{3,4798} - \frac{1}{3,4798^4} = 0,2806 \quad (4.20)$$

Równość tę spełnia  $\beta_{H\phi} = 1,1952$ , a wg (4.17) otrzymamy wykładnik potęgi

$$\zeta_\phi = \frac{l_n 1,1952}{l_n 3,4798} = 1 / 6,9919 \quad (4.21)$$

Chcąc obliczyć wartość ilorazu  $E_w / E = 1 / \beta$  dla dowolnego przekroju pręta (o zarysie zamkniętym) wykonanego z dowolnego materiału wykazującego granicę proporcjonalności  $R_H$ , należy najpierw określić smukłość  $\lambda_r$  z równości (2.10) i następnie wyznaczyć współczynnik  $\beta_H$  z wzoru (4.12), a po wyznaczeniu wykładnika  $\zeta$  wg (4.17) można obliczyć dowolną wartość  $\beta$  z wzoru (4.19) dla smukłości  $\lambda_H \leq \lambda \leq \lambda_r$ .

Powracając do prętów o przekroju kołowym pełnym wykonujemy (dla prętów zestawionych w tabeli 3.2 wykonanych ze stali D50) obliczenia ilorazów  $1 / \beta = P_n / P_k$  wg (4.19), ugięć niszczących  $f_n$  wg (4.11) oraz promieni krzywizn  $\rho_n$  wg (a) – zestawiając je w tabeli 4.1.

Tablica 4.1 Ilorazy  $1 / \beta = P_n / P_k$ , ugięcia niszczące  $f_n$  oraz promienie krzywizn  $\rho_n$  dla prętów zestawionych w tabeli 3.2  
 Table 4.1 Quotients  $1 / \beta = P_n / P_k$ , failure displacements  $f_n$  and radii of curvature  $\rho_n$  for rods put together in Table 3.2

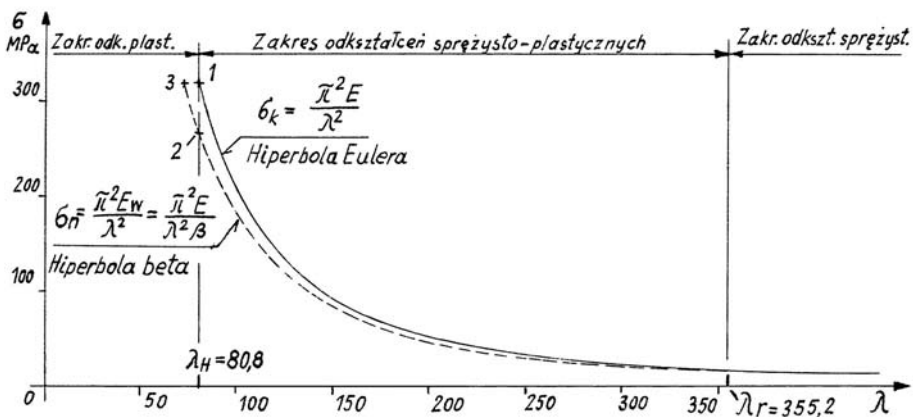
Nr pręta	Smukłość $\lambda$	$l$ [cm]	$\frac{1}{\beta} = \frac{P_n}{P_k}$ wg (4.19)	$a_n$ wg (4.10)	$f_n$ wg (4.11) [cm]	$\rho = \frac{l^2}{\pi^2 f_n}$ wg (a) [cm]
1	2	3	4	5	6	7
53	350	8,75	0,9986	$2,562 \cdot 10^{-2}$	$2,242 \cdot 10^{-1}$	34,607
54	320	8	0,9899	$2,456 \cdot 10^{-2}$	$1,965 \cdot 10^{-1}$	33,006
55	280	7	0,9971	$2,304 \cdot 10^{-2}$	$1,613 \cdot 10^{-1}$	30,789
56	240	6	0,9625	$2,135 \cdot 10^{-2}$	$1,281 \cdot 10^{-1}$	28,480
57	200	5	0,9456	$1,941 \cdot 10^{-2}$	$9,704 \cdot 10^{-2}$	26,103
58	160	4	0,9252	$1,704 \cdot 10^{-2}$	$6,815 \cdot 10^{-2}$	23,789
59	120	3	0,8997	$1,367 \cdot 10^{-2}$	$4,102 \cdot 10^{-2}$	22,229
60	80,8	2,02	0,8656	$5,868 \cdot 10^{-3}$	$1,185 \cdot 10^{-2}$	34,879

Warto porównać wartości ugięć prętów podanych w kolumnie 9 i promieni krzywizn z kolumny 10 tablicy 3.4, aby dojść do wniosku, że wartości te różnią się niewiele od wartości teoretycznych dla tych samych prętów zestawionych w tablicy 4.1. Świadczy to o poprawnie ustawionych wzorach (4.10), (4.11) oraz (4.19).

Na podstawie obliczeń zestawionych w tablicy 4.1 wykonamy odpowiednie wykresy. Pierwszy, wykonany na rysunku 4.2 dotyczy ekstremalnych naprężeń niszczących

$$\sigma_n = \frac{\pi^2 E_w}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \beta} \quad (4.22)$$

na tle hiperboli Eulera dla naprężeń krytycznych  $\sigma_k$ .

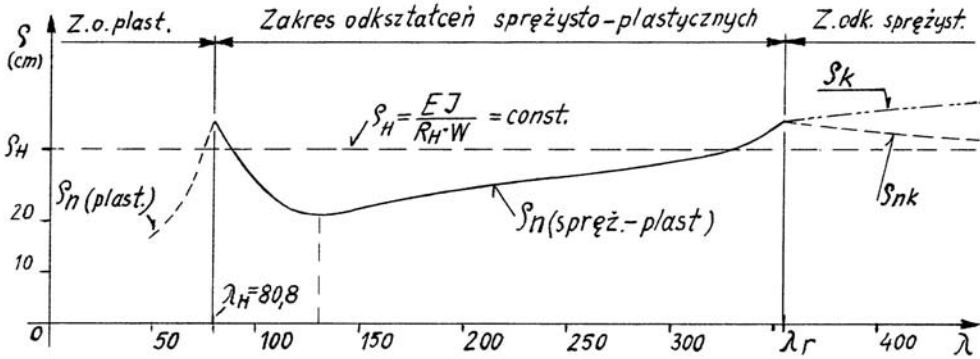


Rys.4.2. Wykres ekstremalnych naprężeń niszczących  $\sigma_n$  sporządzony na podstawie wyników zestawionych w tablicy 4.1 dla prętów wykonanych ze stali D50, wykazującej  $R_H = 317,62$  MPa przy  $E = 210100$  MPa

Fig.4.2. Extremal failure stresses  $\sigma_n$  plotted from results put together in the Table 4.1 for rods made of the steel D50, for which  $R_H = 317.62$  MPa occurs with  $E = 210100$  MPa

Na rysunku 4.3 przedstawiono wykres promieni  $\rho_n$  krzywizn występujących w połowie długości ugiętych, w wyniku wyoboczenia prętów. Po prawej stronie przy  $\lambda > \lambda_r$  występują promienie  $\rho_k$  (stanu krytycznego) i  $\rho_{nk}$  (stanu nadkrytycznego), po lewej stronie zaś przy  $\lambda < \lambda_H$  występują promienie  $\rho_{n(plast)}$  dla zakresu odkształceń plastycznych. Pręty o średnicy  $d = 0,1$  cm wykonano ze stali D50.

Dla stali D50 wartość promienia  $\rho_H = \frac{E J}{R_H W} = \frac{E}{R_H} \frac{d}{2} = 33,074$  cm, a przy smukłości  $\lambda_r = 355,2$  jest  $\rho_r = 34,879$  cm  $> \rho_H$ .



Rys.4.3. Wykres promieni  $\rho_n$  krzywizn prętów wykonany na podstawie tablicy 4.1 dla prętów o pełnym przekroju kołowym  
 Fig.4.3. Radii of curvatures  $\rho_n$  against slenderness for rods of circular and filled section, from the Table 4.1

Z zależności poniższej otrzymujemy

$$\frac{\rho_r}{\rho_r - \rho_H} = 4,3961^2 = \chi_r^2 \quad (i)$$

Przy średnicy pręta  $d = 0,1$  cm jest rdzeń przekroju  $r = d / 8 = 0,0125$  cm, a dla pręta nr 60 o smukłości  $\lambda_H$  jest teoretyczne ugięcie niszczące  $f_{n(H)} = 0,0118532$  cm.

Z poniższej zależności otrzymujemy

$$\frac{r}{r - f_{n(H)}} = 4,3961^2 = \chi_r^2 \quad (j)$$

Z porównania (i) z (j) wynika, że

$$\frac{f_{n(H)}}{r} = \frac{\rho_H}{\rho_r} \quad (4.23)$$

skąd wyznaczamy promień krzywizny

$$\rho_r = \frac{\rho_H r}{f_{n(H)}} = \frac{EJ}{R_H W} \frac{d}{8 f_{n(H)}} = \frac{\lambda_H^2}{\pi^2} \frac{d^2}{16 f_{n(H)}} = \frac{l_H^2}{\pi^2 f_{n(H)}} = \rho_{n(H)} \quad (4.24)$$

a to jest dowodem na to, że przyjęta hipoteza (4.1) jest słuszna.

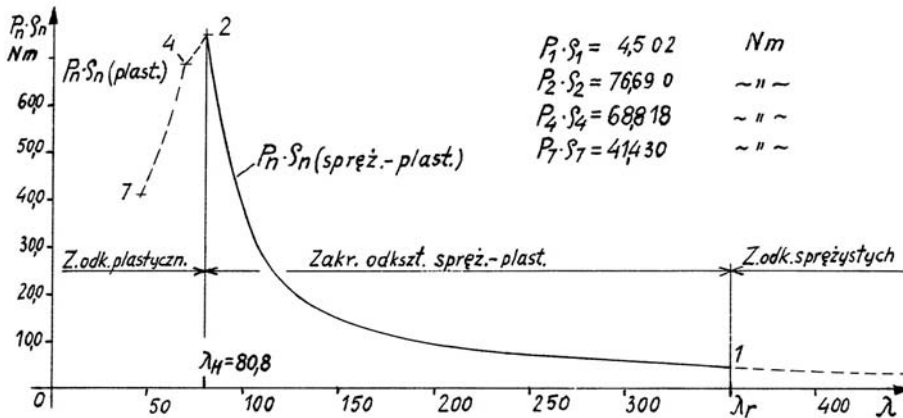
Najbardziej charakterystycznym wykresem, wskazującym na zdolność prętów do przenoszenia sił ściskających w zakresie odkształceń sprężysto-plastycznych jest wykres iloczynów

$$P_n \rho_n = Z_o A E_w \quad (k)$$

wynikających z wzoru poniższego, przy uwzględnieniu (2.2)

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{P_n f_n}{E_w J} = \frac{P_n i^2}{E_w Z_o J} = \frac{P_o}{Z_o A E_w} \quad (l)$$

które przedstawiono na rysunku 4.4, dla prętów o średnicy  $d = 0,1$  cm wykonanych ze stali D50.



Rys.4.4. Wykres iloczynów  $p_n \cdot \rho_n$  dla prętów o średnicy  $d = 0,1$  cm

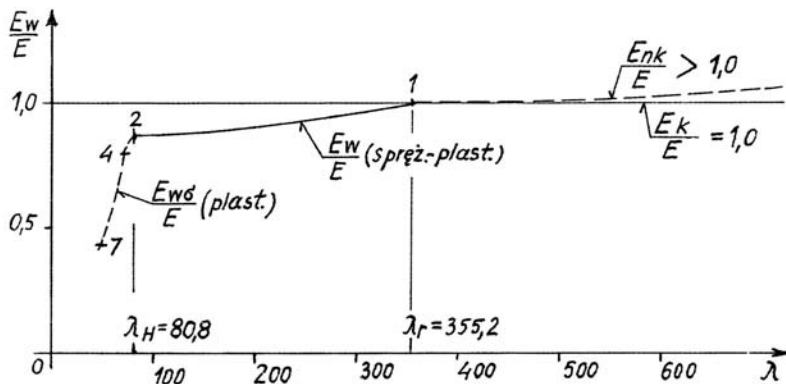
Fig.4.4. Products  $p_n \cdot \rho_n$  plotted for rods of diameter  $d = 0.1$  cm

Na rysunku 4.3 naniesiono linią przerywaną wykres promieni krzywizn w zakresie odkształceń sprężystych (przy  $\lambda \geq \lambda_r$ ) wg przygotowanej przez autora pracy pt. "Badania nad statecznością prętów pryzmatycznych o bardzo dużych smukłościach przy obciążeniach pokrywających  $P_{pk} > P_E$ ".

W zakresie odkształceń plastycznych (przy  $\lambda < \lambda_H$ ) naniesiono linią przerywaną wykres promieni krzywizn wg przygotowanej przez autora pracy pt. "Stateczność prętów pryzmatycznych w zakresie odkształceń plastycznych". Z tych samych prac pochodzą przebiegi wykresów naniesione linią przerywaną na rysunku 4.4 oraz 4.5.

W zakresie odkształceń sprężysto-plastycznych wykresem iloczynów  $P_n \cdot \rho_n$  jest hiperbola osiągająca wartość maksymalną w p. 2 przy smukłości  $\lambda = \lambda_H$ . Dla  $\lambda < \lambda_H$  występuje raptowny spadek wartości funkcji, która w p. 4 dotyczy granicy sprężystości materiału  $R_{sp}$  występującej przy wyoboczeniu. Zjawisku temu towarzyszy naprężenie normalne  $\sigma = R_{sp} = R_H$ . W p. 7 występuje granica plastyczności  $R_e$  przy wyoboczeniu.

Następnym wykresem wyjaśniającym słuszność podziału zjawisk wyboczenia na trzy zakresy odkształceń jest wykres ilorazów  $E_{nk} / E, E_w / E$  i  $E_{w\sigma} / E$  przedstawiony na rysunku 4.5.



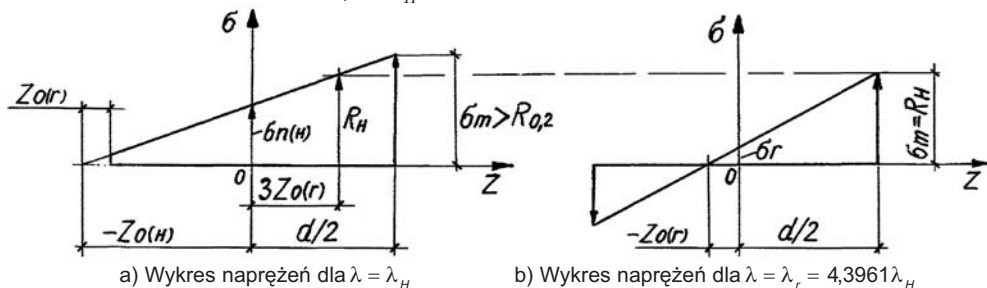
Rys.4.5. Wykres ilorazów  $E_w / E$  dla prętów o średnicy  $d = 0,1$  cm wykonanych ze stali D50  
 Fig.4.5. Quotients  $E_w / E$  plotted for rods of diameter  $d = 0.1$  cm made of the steel D50

Ściskany pręt o smukłości  $\lambda > \lambda_r$  przenosi siłę krytyczną  $P_k$  przy statecznym ugięciu krytycznym  $f_k$ , a po odciążeniu pręt powraca do pierwotnej prostoliniowości, ponieważ nie ma odkształceń trwałych,  $\Delta \epsilon_{trw} = 0$ .

W stanie nadkrytycznym występuje nadkrytyczna wartość modułu Younga  $E_{nk} > E$  przy ugięciu  $f_{nk} > f_k$  wywołanym siłą nadkrytyczną  $P_{nk} > P_k$ . Po odciążeniu pręta stwierdza się jego trwałe ugięcie ponieważ w materiale pręta występują trwałe odkształcenia  $\Delta \epsilon_{nktrw} > 0$ , w całej objętości pręta.

W zakresie odkształceń sprężysto plastycznych przy smukłości  $\lambda_H \leq \lambda \leq \lambda_r$ , ściskany pręt przenosi ekstremalną siłę niszczącą  $P_n < P_k$  przy  $\Delta \epsilon_{trw} > 0$  i dlatego moduł wyboczeniowy  $E_w < E$ . Po odciążeniu pręta wykazuje on trwałą ugiętą postać w kształcie sinusoidy.

Na rysunku 4.6 przedstawiono wykresy naprężeń, występujących w połowie długości prętów o smukłościach  $\lambda_r$  i  $\lambda_H$ .



Rys.4.6. Wykres naprężeń w połowie długości pręta  
 Fig.4.6. Normal stresses in the middle of the beam column span  
 a) Graph for  $\lambda = \lambda_H$  b) Graph for  $\lambda = \lambda_r = 4.3961 \lambda_H$

W tablicy 4.2 zestawiono obliczenia charakterystycznych wartości fizycznych dla pręta o średnicy  $d = 0,1$  cm i długości  $l_H = 2,02$  cm, wykonanego ze stali D50.

Tablica 4.2 Porównanie wyników obliczeń dotyczących prętów o smukłości  $\lambda_H$  i  $\lambda_r$ , wykonanych ze stali D50

Table 4.2 Comparison of results obtained for rods of slenderness  $\lambda_H$  and  $\lambda_r$ , made of steel D50

1	$\lambda_H = 80,8, l_H = 2,02$ cm	$\lambda_r = 355,2, l_r = 8,88$ cm
2	$a_{n(H)} = 0,005868$ wg (4.10)	$a_r = 0,02580$ wg (4.10) dla $\beta = 1$
3	$f_{n(H)} = a_{n(H)} l_{(H)} = 0,01185$ cm	$f_r = a_r l_r = 0,2290$ cm
4	$Z_{o(H)} = i^2 / f_{n(H)} = 0,05273$ cm = $\frac{d}{2} + Z_{o(r)}$	$Z_{o(r)} = 0,00273$ cm
5	$\rho_{n(H)} = l_H / \pi^2 a_{n(H)} = 34,8794$ cm	$\rho_r = l_r / \pi^2 a_r = 34,8794$ cm
6	$E_w = E / \beta_H = 181873$ MPa	$E_w = E = 210100$ MPa
7	$\sigma_{n(H)} = \pi^2 E_w / \pi_H^2 = 274,946$ MPa	$\sigma_r = \pi^2 E / \lambda_r^2 = 16,435$ MPa
8	$\sigma_{n(H)} = \left( \frac{Z_o}{\rho_n} \right)_{H} E_w = 274,946$ MPa	$\sigma_r = \left( \frac{Z_o}{\rho} \right)_r E = 16,435$ MPa
9	$\alpha_n^\circ = 2\arcsin(\pi a_n / 2) = 1,0563^\circ$	$\alpha_r^\circ = 2\arcsin(\pi a_r / 2) = 4,6442^\circ$
10	$1 / \beta_H = \frac{Z_{o(H)}}{Z_{o(H)} + 3 Z_{o(r)}} = \frac{Z_{o(r)} + d / 2}{4 Z_{o(r)} + d / 2}$	

Z pozycji 1 jest  $-\lambda_r / \lambda_H = 4,3961 = \chi_r$ .

Z pozycji 2 jest  $-a_r / a_{n(H)} = 4,3961 = \chi_r$ .

Z pozycji 3 jest  $-f_r / f_{n(H)} = 4,3961^2 = \chi_r^2$ .

Z pozycji 4 jest  $-Z_{o(H)} / Z_{o(r)} = 4,3961^2 = \chi_r^2$ .

Z pozycji 9 jest  $-\alpha_r / \alpha_n = 4,3961 = \chi_r$ .

Z pozycji 10 otrzymujemy potwierdzenie, że  $Z_{o(H)} = Z_{o(r)} + d / 2$ , co wcześniej zapisano w poz. 4.

Powyższe porównanie wskazuje na harmonię i zasadność wykorzystanych zależności. Warto zwrócić uwagę na fakt, że naprężenia obliczone w pozycji 7 i 8 są jednakowe, co jest potwierdzeniem słuszności podstawowego prawa fizycznego opisanego zależnością (2.1). Zostanie to również wykazane wzorem (5.5) w poniższym rozdziale.



## 5. GENEZA WYSTĘPOWANIA MODUŁU WYBOCZENIOWEGO $E_w < E$

W zakresie odkształceń sprężysto plastycznych – przy smukłościach  $\lambda_H \leq \lambda \leq \lambda_r$  – występowanie modułów wybozczeniowych  $E_w < E$  jest zjawiskiem fizycznym i w związku z tym geneza ich występowania może być uzasadniona wyłącznie przesłankami fizycznymi.

Przy rozciąganiu próbek na nowoczesnych zrywarkach – np. marki „Instron” – stwierdza się, że proporcjonalny przyrost długości próbki stalowej

$$\Delta l = P l / E A \quad (m)$$

występuje dla sił o wartościach pomiędzy  $P \approx P_H / 2,7$  a  $P = P_H$ , gdzie siła  $P_H$  wyznacza granicę proporcjonalności  $R_H = P_H / A$ . Przy siłach  $P < P_H / 2,7$  wykresem przyrostu  $\Delta l$  nie jest linia prosta i zapewne jest to wynikiem występowania w sieci krystalicznej materiału utajonych, pozornie trwałych mikrokształceń  $\Delta \varepsilon^* > 0$ , powodujących wystąpienie modułów „sieciowych”  $E^* > E$ . Po odciążeniu próbki – mikroodkształcenia  $\Delta \varepsilon^*$  znikają do zera. Podobne zjawiska występują w przecie ściskanym, powodujące przy siłach  $P \approx P_k / \sqrt{3}$  wystąpienie wg (1.2)  $\Delta l_k = \pi^2 i / \lambda$ , gdy moduły ściskania:  $E_{sc}^* = E / \sqrt{3}$  i wybozczenia  $E_w^* = E / \sqrt{3}$ . Od tej chwili pozorne odkształcenia  $\Delta \varepsilon^*$  zaczynają się utrzymywać w sieci krystalicznej wybaczanego pręta i zależnie od smukłości  $\lambda < \lambda_r$  generują moduły wybozczeniowe  $E_w < E$ . Ekstremalna siła niszcząca jest równa  $P_n = \pi^2 E_w J / l^2 < P_E$ .

Rozważmy iloraz modułów

$$E / E_w = \beta . \quad (5.1)$$

Po pomnożeniu i podzieleniu lewej strony przez  $\sigma$  otrzymujemy

$$\frac{\sigma / E_w}{\sigma / E} = \frac{\sigma / E + \Delta \varepsilon_{trw}}{\sigma / E} = 1 + \frac{E \Delta \varepsilon_{trw}}{\sigma} = \beta , \quad (5.2)$$

skąd

$$\Delta \varepsilon_{trw} = \frac{\sigma}{E} (\beta - 1) = \sigma \left( \frac{1}{E_w} - \frac{1}{E} \right) . \quad (5.3)$$

Wg (4.19) współczynnik  $\beta = (\lambda_r / \lambda)^\zeta$ , a po przyjęciu wg (4.22) wartości  $\sigma = \sigma_n$  i wstawieniu do (5.3) otrzymujemy

$$\Delta \varepsilon_{trw} = \frac{\pi^2}{\lambda^2 \beta} (\beta - 1) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_r} \right)^\zeta \right] = \varepsilon_k \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_r} \right)^\zeta \right] . \quad (5.4)$$

Utajone odkształcenia trwale wyraziliśmy w funkcji smukłości bieżącej  $\lambda$  i smukłości rozdzielającej  $\lambda_r$ , która jest zależna od granicy proporcjonalności  $R_H$ , modułu Younga  $E$  oraz wyrażenia  $W/A$  i, czyli od kształtu przekroju poprzecznego pręta. Przy  $\lambda < \lambda_r$ , gdy  $\sigma_n > \sigma_r$ , w osi ściskanego pręta wystąpi odkształcenie

$$\varepsilon = \frac{\sigma_n}{E} + \Delta\varepsilon_{trw} = \frac{\sigma_n}{E} + \frac{\sigma_n}{E}(\beta - 1) = \frac{\sigma_n}{E}\beta = \frac{\sigma_n}{E_w} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} = \left(\frac{Z_o}{\rho}\right)_{1/2} = \varepsilon_k \quad (5.5)$$

Wykorzystując zależność (5.4) możemy zapisać wzór na moduł wyboczeniowy

$$E_w = E \left( 1 - \frac{\Delta\varepsilon_{trw}}{\varepsilon_k} \right) = E \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_r} \right)^\zeta \right] \right\} = E \left( \frac{\lambda}{\lambda_r} \right)^\zeta = E / \beta \quad (5.6)$$

Ze wzoru (5.4) wynika, że tylko w prętach o smukłości  $\lambda \geq \lambda_r$  jest  $\Delta\varepsilon_{trw} = 0$ , natomiast przy smukłości  $\lambda < \lambda_r$  wystąpi  $\Delta\varepsilon_{trw} > 0$  i dlatego wg (5.6) jest  $E_w < E$  przy  $\beta > 1$ , a ekstremalne osiowe naprężenia niszczące – opisane wzorem (4.22) – przebiegają wg hiperboli beta przedstawionej na rysunku 4.2.

Wzór (5.6) jest wzorem dokładnym, obliczone przy jego pomocy wartości ekstremalnych sił niszczących  $P_n$  odpowiadają wartościom uzyskanym z badań zarówno dla prętów wykonanych ze stali D45 wg tablicy 3.1 oraz ze stali D50 wg tablicy 3.2.

Po udowodnieniu, że przy smukłości  $\lambda < \lambda_r$  występują moduły wyboczeniowe  $E_w < E$  możemy zapisać:

- wzór na energię zginania pręta od sił zewnętrznych

$$U_{zg_n} = \frac{(P_n f_n)^2 l}{4E_w J \cos(\alpha_n / 4)} = \frac{(P_n f_n)^2 \beta l}{4EJ \cos(\alpha_n / 4)} \quad (5.7)$$

- wzór na energię ściskania pręta od sił zewnętrznych

$$U_{śc_n} = \frac{P_n^2 l_z}{2EA} = \frac{P_n^2 l \sqrt{\beta}}{2EA} \quad (5.8)$$

- bilans energii od sił zewnętrznych

$$2 \frac{(P_n f_n)^2 \beta l}{4EJ \cos(\alpha_n / 4)} + \frac{P_n^2 l \sqrt{\beta}}{2EA} = \frac{P_n^2 l_H}{2EA} = \sqrt{\frac{R_H^2}{E}} \frac{\pi}{2} A i \quad (5.9)$$

- kąt obrotu końców pręta obliczamy z przekształconego wzoru (2.12) do postaci

$$\alpha_n = 2 \arcsin(\pi a_n / 2) \quad (5.10)$$

gdzie  $a_n$  określa wzór (4.10).

## 6. OPIS PRÓBY OBCIĄŻANIA PRĘTA SIŁĄ ŚCISKAJĄCĄ O WZRASTAJĄCEJ WARTOŚCI

W celu przedstawienia wykresów skróceń osi pręta i jego wybożenia jako funkcji siły w tablicy 6.1 zestawiono pełne wyniki badań nad ściskaniem pręta nr 59 o długości  $l = 3$  cm.

Tablica 6.1 Zestawienie wyników badań nad ściskaniem pręta nr 59  
Table 6.1 Comparison of results of compressing tests for rod No. 59

Nr pomiaru	Wyniki z badań			Wyniki obliczeniowe			
	$P$	$f$	$\Delta l_c$	$a = f / l$	$E_{sc}^*$ (6.1)	$\alpha^\circ$	$\Delta l_{zg}$
	[daN]	[cm]	[cm]		$E_w^*$ (6.2)	wg (2.12)	wg (2.15)
					[MPa]		[cm]
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,3352	-	0,0008	-	85000	-	-
2	2,9115	-	0,0014	-	79532	-	-
3	4,2510	-	0,0018	-	90209	-	-
4	5,4117	-	0,0020	-	103457	-	-
5	6,5297	~0,0002	0,00205	-	121302	-	-
6	9,2014	0,0050	0,0021	0,00167	170933	0,3000	0,000021
7	9,7508	0,0125	0,0022	0,00417	181139	0,7500	0,000129
8	9,9475	0,0200	0,0024	0,00667	184794	1,2000	0,000329
9	9,9988	0,0300	0,0028	0,01000	185747	1,8000	0,000740
10	10,1749	0,0406	0,0034	0,01367	189018	2,4600	0,001356
11	10,0752	0,0492	0,0041	0,01642	187166	2,9520	0,001991

Na podstawie wyników badań zestawionych w tablicy 6.1, wykonano wykres wybożenia pręta – we współrzędnych  $(f, P)$  – przedstawiony na rysunku 6.1, natomiast wykres skróceń osi i zbliżeń końców pręta od ugięcia – we współrzędnych  $(\Delta l_c, P)$  – gdy  $\Delta l_c = \Delta l_k + \Delta l_{zg}$ , przedstawiono na rysunku 6.2.

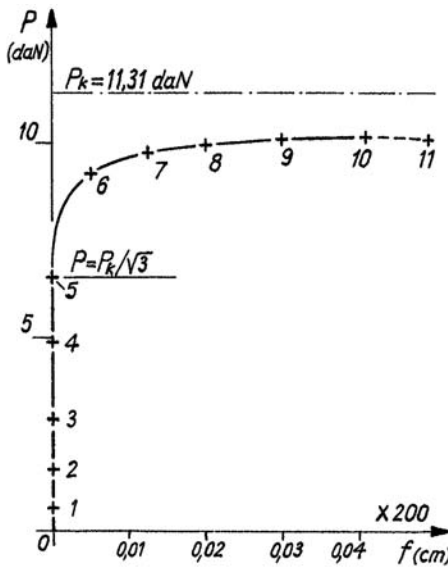
Badania wykazały, że każdy – pierwotnie prosty – badany pręt pozostaje prosty do chwili, gdy przy sile ściskającej  $P = P_E / \sqrt{3}$  wystąpi – wg (1.2) – krytyczne skrócenie jego osi  $\Delta l_k = \pi^2 i^2 / l$ . W pręcie o nr 59 wartość  $\Delta l_k = 0,002056$  cm. Z wykresu na rysunku 6.2 widać wyraźnie, że między siłami  $P_5$  i  $P_6$  ściskany pręt jest w stanie nieściśliwym. Wybożenie pręta rozpoczyna się praktycznie w chwili, gdy oś działania sił zewnętrznych wychodzi na zewnątrz rdzenia przekroju  $r = d / 8 = f_7 = 0,0125$  cm

– nieściśliwego pręta – przy sile  $P = P_7$ . Wzrastającemu skróceniu osi pręta między siłami  $P_1 \div P_5$  – wg wykresu na rysunku 6.2 – towarzyszy wzrost wartości adekwatnego modułu występującego przy ściskaniu

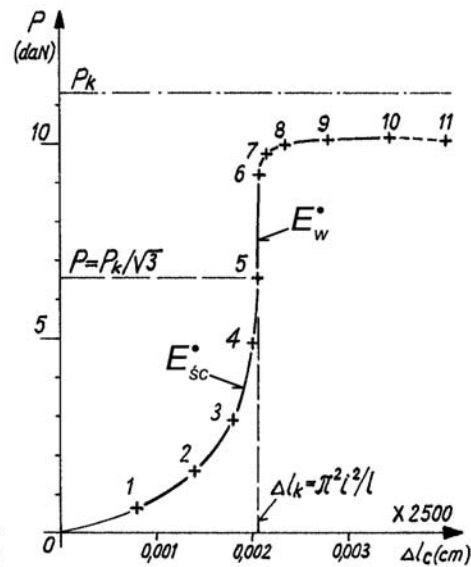
$$E_{\dot{s}c}^* = \frac{P l}{\Delta l_{\dot{s}c} A} \quad , \quad (6.1)$$

a po osiągnięciu nieściśliwości osi – przy wystąpieniu pierwszych mikro-ugięć pręta – występuje moduł wybozeniowy

$$E_w^* = \frac{P l^2}{\pi^2 J} \quad . \quad (6.2)$$



Rys.6.1. Wykres wybozenia pręta  
Fig.6.1 Load - deflection curve



Rys.6.2. Wykres skróceń osi pręta  
Fig.6.2. Load against shortening  
of the beam column axis

Przy całkowitym zbliżeniu końców pręta  $\Delta l_c = \Delta l_k + \Delta l_{zg}$  wartość modułu  $E_{\dot{s}c}^*$  wzrasta wolniej od modułu  $E_w^*$ , osiągającego w p. 10 wartość modułu wybozeniowego  $E_w = E / \beta = E / 1,115 = 189018 \text{ MPa}$ , zgodną z zależnością (5.6).

Ekstremalnej sile niszczącej  $P_{10} = P_E / \beta$  towarzyszy ugięcie  $f_{10} = 0,0406 \text{ cm}$ , przy której bilans prac wg (2.6) jest równy maksymalnej energii sprężystej układu wg (3.3) i (3.4), co zapisano w kolumnie 6 tabeli porównawczej 3.3.

Równość modułów (6.1) i (6.2) występuje tylko przy  $\Delta l_c = \Delta l_{sc} = \Delta l_k$ , przy sile  $P = P_E / \sqrt{3}$ . Przy tych wartościach z porównania obu wzorów otrzymujemy krytyczne skrócenie  $\Delta l_k = \pi^2 i / \lambda$ , zgodnie z (1.2), występujące w wyznaczonym przecie, aż do chwili jego zniszczenia siłą ekstremalną  $P_{10}$ .

Na podstawie ugięć pręta wyznaczono z wzoru (2.12) narastające wartości kątów obrotu  $\alpha^*$ , podane w kolumnie 7 tablicy 6.1. Przypadkowo kąty  $\alpha^* = 60 f$ , a to oznacza, że wykresem kątów we współrzędnych  $(f, \alpha^*)$  będzie linia prosta.

W kolumnie 8 tablicy 6.1 podano wartości zbliżeń końców od zginania pręta, a po przemnożeniu przez siły  $P$  otrzymamy – zgodnie z (2.7) – prace zginania, których wykresem we współrzędnych  $(\Delta l_{zg}, l_{zg})$  jest pole trójkąta.

## 7. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

### 7.1. PRZYKŁAD NA OKREŚLENIE RZECZYWISTEGO WSPÓŁCZYNNIKA PEWNOŚCI DLA PRĘTA O PEŁNYM PRZEKROJU KWADRATOWYM

W celu wyznaczenia rzeczywistego współczynnika pewności przyjmujemy pręt o przekroju kwadratowym pełnym, wykonany ze stali 18G2A, wykazującej granicę proporcjonalności  $R_H = 245$  MPa przy module  $E = 210000$  MPa, skąd  $\lambda_H = 92$ .

Dla przekroju kwadratowego otrzymujemy  $W / A i = 1 / \sqrt{3}$  oraz z równości (2.10) wartość smukłości rozdzielającej  $\lambda_r = 320,16 = 3,48 \lambda_H$ .

Wg PN-90/B-03200 dotyczącej obliczeń statycznych i projektowania konstrukcji stalowych, dla stali 18G2A przyjęto wytrzymałość obliczeniową  $R = 305$  MPa, przy której występuje smukłość względna  $\lambda_p = 95$ . Granica plastyczności  $R_{e_{min}} = 355$  MPa.

Dla przekroju kwadratowego pełnego wg wzoru (4.21) jest wykładnik potęgi  $\zeta = 1/6,992$ , a wg (4.19) otrzymamy dla  $\lambda_p = 95$  współczynnik

$$\beta_p = \left( \frac{\lambda_r}{\lambda_p} \right)^\zeta = \left( \frac{320,16}{95} \right)^{1/6,992} = 1,1898 .$$

Rzeczywiste naprężenie niszczące wg (4.22) wynosi zatem

$$\sigma_n = \frac{\pi^2 E}{\lambda_p^2 \beta_p} = 193,02 \text{ MPa} .$$

W stosunku do granicy plastyczności wystąpi iloraz

$$n_{R_e} = R_{e_{\min}} / \sigma_n = 355 / 193 \approx 1,84 \text{ ,}$$

a w odniesieniu do granicy proporcjonalności

$$n_H = R_H / \sigma_n = 245 / 193 \approx 1,27 \text{ .}$$

Przyjmując bok kwadratu  $H = 1 \text{ cm}$  pole przekroju poprzecznego  $A = 1 \text{ cm}^2$  oraz  $i = 1 / \sqrt{12}$ .

Długość pręta ( $l$ pręta)	$l_p = \lambda_p i = 95 / \sqrt{12} = 27,4241 \text{ cm}$
Ugięcie niszczące wg (4.11)	$f_n = i \sqrt{\beta_p \left( \frac{\lambda_p}{\lambda_H} \right)^3 - \frac{1}{\sqrt{\beta_p}}} = 0,1810 \text{ cm}$
Względne ugięcie	$a_n = f_n / l_p = 0,0066$
Kąt obrotu końców pręta wg (5.10)	$\alpha_n = 2 \arcsin(\pi a_n / 2) = 1,1882^\circ$
Siła niszcząca	$P_n = \sigma_n A = 1930,2 \text{ daN}$
Energia zginania wg (5.7)	$U_{zg_n} = \frac{(P_n f_n)^2 \beta_p l_p}{4 E J \cos(\alpha_n / 4)} = 0,56893 \text{ J}$
Energia ściskania wg (5.8)	$U_{\acute{s}c_n} = \frac{P_n^2 l_p \sqrt{\beta_p}}{2 E A} = 2,6536 \text{ J}$

Bilans energii wg (5.9)

$$2 U_{zg_n} + U_{\acute{s}c_n} = 1,1379 + 2,6536 = 3,7915 \text{ J .}$$

Maksymalna energia sprężysta wg (1.6)  $U_H = 3,7940 \text{ J}$ .

Z porównania wynika, że w chwili niszczenia pręt osiągnął energię  $U_H = L_H$ .

Odształcenie w osi pręta wg (5.5)

$$\epsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda^2} = \frac{\sigma_n}{E} \beta_p = \frac{193}{210000} \cdot 1,1898 = 1,0936 \cdot 10^{-3} \text{ .}$$

Odształcenie trwałe wg (5.4)

$$\Delta \epsilon_{trw} = \epsilon_k \left( 1 - \frac{1}{\beta_p} \right) = 1,7444 \cdot 10^{-4} \text{ .}$$

## 7.2. PRZYKŁAD NA OKREŚLENIE RZECZYWISTEGO WSPÓŁCZYNNIKA PEWNOŚCI DLA RURY KWADRATOWEJ O GRUBOŚCI ŚCIANKI $g = 0,05 H$

Dla  $H = 1$  cm i  $h = 0,9$  cm otrzymamy  $W / A i = 0,77778$ . Przyjmując, że rurę wykonano ze stali 18G2A wykazującej  $R_H = 245$  MPa przy  $E = 210000$  MPa otrzymujemy  $\lambda_H = 92$ , gdy wg przykładu 7.1 smukłość względna  $\lambda_p = 95$ .

Z równości (2.10) otrzymujemy  $\lambda_r = 2 / 2,34$  skąd  $\chi_r = \lambda_r / \lambda_H = 2,309$ . Z zależności (4.12) otrzymamy wartość  $\beta_H = 1,2814$ , a wg (4.17) jest wykładnik  $\zeta = 0,2965$ .

Przy smukłości względnej  $\lambda_p = 95$  otrzymamy współczynnik

$$\beta_p = (\lambda_r / \lambda_p)^\zeta = (212,34 / 95)^{0,2965} = 1,2693 \text{ ,}$$

a osiowe naprężenie niszczące wg (4.22)

$$\sigma_n = \frac{\pi^2 E}{\lambda_p^2 \beta_p} = 180,926 \text{ MPa .}$$

Przy przekroju rury  $A = 1 - 0,9^2 = 0,19 \text{ cm}^2$  promień bezwładności przekroju jest równy  $i = 0,38937 \text{ cm}$ .

Długość pręta (rury)	$l_p = \lambda_p i = 36,8951 \text{ cm}$
Ugięcie niszczące wg (4.11)	$f_n = i \sqrt{\beta_p \left( \frac{\lambda_p}{\lambda_H} \right)^3 - \frac{1}{\beta_p}} = 0,27734 \text{ cm}$
Względne ugięcie	$a_n = f_n / l_p = 0,007517$
Kąt obrotu końców pręta (rury) wg (5.10)	$\alpha_n = 2 \arcsin(\pi a_n / 2) = 1,3531^\circ$
Siła niszcząca	$P_n = \sigma_n A = 343,767 \text{ daN}$
Energia zginania wg (5.7)	$U_{zg_n} = \frac{(P_n f_n)^2 \beta_p l_p}{4 E J \cos(\alpha_n / 4)} = 0,176835 \text{ J}$
Praca zginania wg (2.8)	$L_{zg_n} = P_n \left( \frac{\pi a_n}{2} \right)^2 \frac{l_p}{\cos(\alpha_n / 4)} = 0,176838 \text{ J}$
Energia ściskania wg (5.8)	$U_{śc_n} = \frac{P_n^2 l_p \sqrt{\beta_p}}{2 E A} = 0,61557 \text{ J}$
Praca ściskania wg (4.8)	$L_{śc_n} = P_n \frac{\pi^2 l_p^2}{2 l_p \sqrt{\beta_p}} = 0,61556 \text{ J}$

Bilans energii wg (5.9)

$$2 U_{zg_n} + U_{\acute{s}c_n} = 0,35367 + 0,61557 = 0,96924 \text{ J} ,$$

a maksymalna energia sprężysta

$$U_H = \sqrt{\frac{R_H^2}{E}} \frac{\pi}{2} A i = 13,14496 \cdot 0,19 \cdot 0,38837 = 0,96997 \text{ J} .$$

Z porównania wyników stwierdzamy, że w ekstremalnym stanie ściskania rura osiągnęła energię sprężystą  $U_H = L_H$ .

Odształcenie w osi rury

$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda_p^2} = \frac{\sigma_n}{E} \beta_p = \frac{180,93}{210000} \cdot 1,2693 = 0,0010936 ,$$

a odkształcenie trwałe

$$\Delta\varepsilon_{trw} = \varepsilon_k \left( 1 - \frac{1}{\beta_p} \right) = 2,302 \cdot 10^{-4} .$$

Z porównania z przykładem 7.1 wynika, że w prętach cienkościennych (rurach) występuje zdecydowanie większe wyężenie materiału, czego dowodem jest wzrost odkształceń trwałych w osi rury aż o 32% w stosunku do przekroju pełnego.

Jest to zapewne przyczyną powstawania załamów po stronie wklęsłej w połowie długości rury.

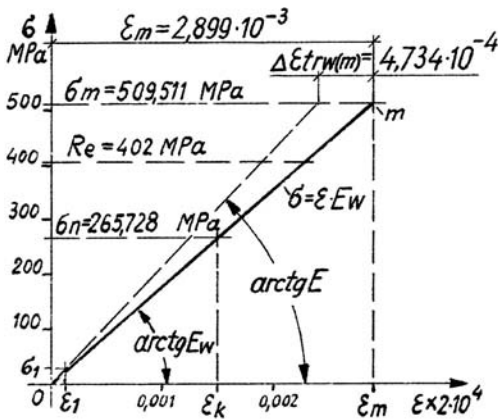
## 8. WYZNACZENIE NAPRĘŻEŃ W PRZEKROJU WYBOCZONEGO PRĘTA

### 8.1. WYZNACZENIE NAPRĘŻEŃ DLA PRĘTA O PRZEKROJU KWADRATOWYM PEŁNYM O BOKU $h = 0,1$ cm I SMUKŁOŚCI GRANICZNEJ $\lambda_H$ , WYKONANEGO ZE STALI D50

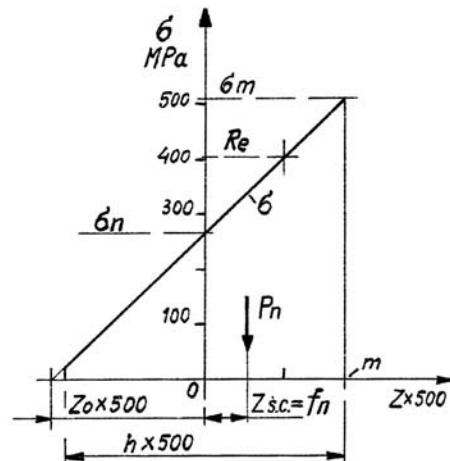
Na podstawie zamieszczonych poniżej obliczeń wykonano na rysunku 8.1 dwa wykresy; a) we współrzędnych  $(\varepsilon, \sigma)$  oraz b) we współrzędnych  $(Z, \sigma)$ .



Dla przekroju kwadratowego jest	$\beta_H = 1,1952$
Moduł wyboczeniowy	$E_w = E / \beta_H = 175780 \text{ MPa}$
Ugięcie niszczące	$f_n = i \sqrt{\beta_H - \frac{1}{\beta_H}} = 1,529 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$
Położenie osi obojętnej	$Z_{o_n} = i^2 / f_n = 5,45 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$
Krytyczne odkształcenie w osi pręta	$\epsilon_k = \pi^2 / \lambda_H^2 = 1,512 \cdot 10^{-3}$
Odkształcenie po stronie wypukłej przy $x = l / 2$	$\epsilon_l = \epsilon_k \left( 1 - \frac{h / 2}{Z_{o_n}} \right) = 1,248 \cdot 10^{-4}$
Odkształcenie po stronie wklęsłej przy $x = l / 2$	$\epsilon_m = \epsilon_k \left( 1 + \frac{h / 2}{Z_{o_n}} \right) = 2,899 \cdot 10^{-3}$
Odkształcenie trwałe po stronie wklęsłej	$\Delta \epsilon_{trw(m)} = \frac{\sigma_m}{E} (\beta_H - 1) = 4,734 \cdot 10^{-4}$
Naprężenie po stronie wypukłej	$\sigma_l = \epsilon_l E_w = 21,937 \text{ MPa}$
Naprężenie po stronie wklęsłej	$\sigma_m = \epsilon_m E_w = 509,511 \text{ MPa}$
Naprężenie w osi pręta	$\sigma_n = \epsilon_k E_w = 265,728 \text{ MPa}$



a) Wykres we współrzędnych  $(\epsilon, \sigma)$



b) Wykres we współrzędnych  $(Z, \sigma)$

Rys.8.1. Wykres naprężeń i względnych odkształceń w połowie długości pręta o przekroju kwadratowym pełnym przy smukłości  $\lambda_H = 80,8$  i  $h = 0,1 \text{ cm}$

Fig. 8.1. Stresses and relative strains in the middle of the beam column span, rod of square and filled sections, slendernees of  $\lambda_H = 80,8$  i  $h = 0.1 \text{ cm}$   
 a) Graph in the coordinates  $(\epsilon, \sigma)$ , b) Graph in the coordinates  $(Z, \sigma)$

Z wykresu a) wynika, że przez trzy wyznaczone punkty  $(\epsilon_l, \sigma_l)$ ,  $(\epsilon_k, \sigma_n)$  i  $(\epsilon_m, \sigma_m)$  przechodzi linia prosta o równaniu  $\sigma = \epsilon E_w$ . Wykresem naprężeń, gdy w przekroju pręta występuje moduł sieczny  $E_\sigma = E_w$  jest więc linia prosta tak jak w przypadku ugięć nadkrytycznych przy smukłości  $\lambda \geq \lambda_r$ .

Wykresem naprężeń we współrzędnych  $(Z, \sigma)$  jest trapez i dla tej figury położenie środka ciężkości wyznaczamy ze wzoru

$$Z_{\text{śc}} = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} \frac{\sigma_m + 2\sigma_1}{\sigma_m + \sigma_1} = 1,529 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

i taką wartość ma obliczone ugięcie niszczące  $f_n$ .

Nie ma więc żadnej wątpliwości, że wykresem naprężeń jest wyznaczona linia prosta.

W środku ciężkości wykresu występuje siła niszcząca

$$P_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_m}{2} h^2 = \sigma_n h^2 = 26,573 \text{ daN} .$$

Z zależności (5.4) możemy zapisać wzór na wartość współczynnika

$$\beta = \frac{\epsilon}{\epsilon - \Delta\epsilon_{trw}} = \frac{1}{1 - \Delta\epsilon_{trw} / \epsilon} .$$

Z rysunku 8.1a możemy określić  $\Delta\epsilon_{trw}$  w dowolnym miejscu przekroju zależnością

$$\Delta\epsilon_{trw} = \Delta\epsilon_{trw(m)} \sigma / \sigma_m .$$

W osi pręta przy  $\sigma = \sigma_n$  otrzymujemy wartość  $\Delta\epsilon_{trw(n)} = 2,469 \cdot 10^{-4}$ , a po stronie wypukłej przy  $\sigma = \sigma_1$  jest  $\Delta\epsilon_{trw(l)} = 2,038 \cdot 10^{-5}$ . Wg przykładu (8.1) w osi pręta występuje  $\beta_n = 1,1952$ . Po stronie wypukłej  $\beta_1 = 1,1952$ . Przy  $\Delta\epsilon_{trw(m)} = 4,734 \cdot 10^{-4}$  wystąpi również wartość współczynnika  $\beta_m = 1,1952$ . Trzy jednakowe wartości są równe wielkości  $\beta_H = 1,1952$ , a to oznacza, że w każdym punkcie przekroju występuje moduł sieczny  $E_\sigma = E_w < E$ , przy którym w przekroju pręta występują liniowo zmienne względne odkształcenia trwale określone zależnością (5.1). Ujawnienie tego zjawiska jest uzasadnieniem występowania płaskich przekrojów w zginanych prętach, przy ich wyboczeniu.

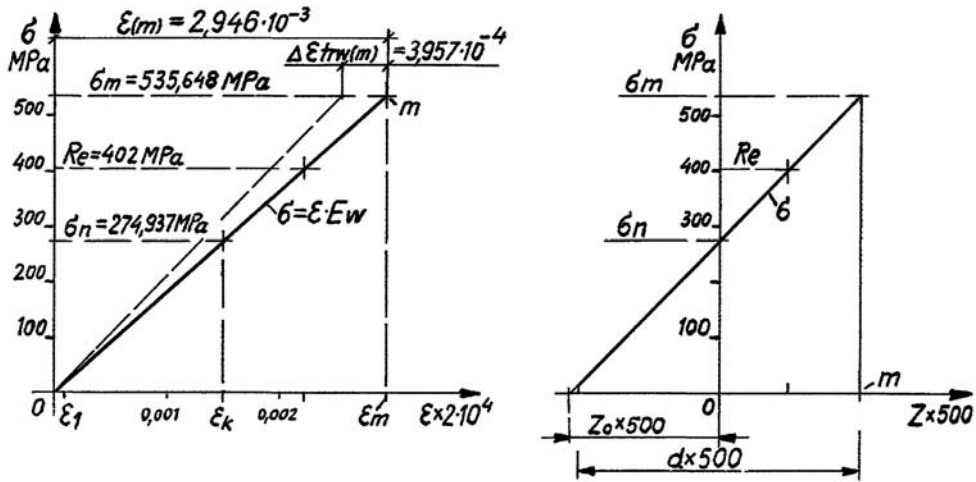
## 8.2. OBLICZENIA DO WYKRESU NAPRĘŻEŃ W PRĘCIE O PRZEKROJU KOŁOWYM PEŁNYM I SMUKŁOŚCI GRANICZNEJ $\lambda_H = 80,8$ , WYKONANYM Z MATERIAŁU D50

Na podstawie zamieszczonych poniżej obliczeń przedstawiono na rysunku 8.2 dwa wykresy; a) we współrzędnych ( $\epsilon$ ,  $\sigma$ ) oraz b) we współrzędnych ( $Z$ ,  $\sigma$ ).

Przy przekroju kołowym pełnym jest	$\beta_H = 1,1552$
Moduł wyboczeniowy w przekroju kołowym	$E_w = E / \beta_H = 181870 \text{ MPa}$
Ugięcie niszczące przy średnicy pręta $d = 0,1 \text{ cm}$	$f_n = i \sqrt{\beta_H - \frac{1}{\beta_H}} = 1,185 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$
Położenie osi obojętnej	$Z_{o_n} = i^2 / f_n = 5,273 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$
Krytyczne względne skrócenie	$\epsilon_k = \pi^2 / \lambda_H^2 = 1,512 \cdot 10^{-3}$
Względne odkształcenie po stronie wypukłej przy $x = l / 2$	$\epsilon_l = \epsilon_k \left( 1 - \frac{d / 2}{Z_{o_n}} \right) = 7,824 \cdot 10^{-5}$
Względne odkształcenie po stronie wklęsłej przy $x = l / 2$	$\epsilon_m = \epsilon_k \left( 1 + \frac{d / 2}{Z_{o_n}} \right) = 2,946 \cdot 10^{-3}$
Względne odkształcenie trwałe po stronie wklęsłej	$\Delta\epsilon_{trw(m)} = \frac{\sigma_m}{E} (\beta_H - 1) = 3,957 \cdot 10^{-4}$
Naprężenie po stronie wypukłej	$\sigma_l = \epsilon_l E_w = 14,227 \text{ MPa}$
Naprężenie po stronie wklęsłej	$\sigma_m = \epsilon_m E_w = 535,648 \text{ MPa}$
Naprężenie w osi pręta	$\sigma_n = \epsilon_k E_w = 274,937 \text{ MPa}$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że w pręcie o przekroju kołowym jest wyższe naprężenie niszczące od naprężenia w pręcie o przekroju kwadratowym przy jednakowych smukłościach  $\lambda_H = 80,8$ . Wyższemu naprężeniu towarzyszą mniejsze wartości  $\Delta\epsilon_{trw}$  o około 20% w porównaniu z przekrojem kwadratowym. Dobór optymalnego przekroju na najbardziej odpowiedzialne konstrukcje nośne stanie się zapewne tematem wielu prac.

Jednoimienny rozkład naprężeń ściskających przedstawionych na rysunkach 8.1b i 8.2b świadczy o tym, że niszczenie ściskanych prętów, pierwotnie prostych, o smukłości  $\lambda_H$  dokonuje się w chwili, gdy oś działania sił występuje w rdzeniu rozpatrywanego przekroju.

a) Wykres we współrzędnych  $(\epsilon, \sigma)$ b) Wykres we współrzędnych  $(Z, \sigma)$ 

Rys.8.2. Wykres naprężeń i odkształceń w połowie długości wyboczonego pręta o pełnym przekroju kołowym i smukłości  $\lambda_H = 80,8$  ( $l = 2,02$  cm), wykonanego z materiału D50 wg tablicy 3.2

Fig.8.2. Stresses and strains in the middle of the buckled beam column span, rod of circular and filled section and slenderness  $\lambda_H = 80.8$  ( $l = 2.02$  cm), made of steel D50 from the Table 3.2

## 9. PODSUMOWANIE

1. Przeprowadzone badania nad ścisaniem prostych prętów przyzmatycznych – o przekroju kołowym pełnym i smukłościach  $\lambda_H \leq \lambda \leq \lambda_r$  – wykazały, że wyboczone pręty są niszczone ekstremalnymi siłami  $P_n < P_E$ .
2. W każdym pręcie przy sile  $P = P_E / \sqrt{3}$  występuje, w stanie prostym, krytyczne skrócenie jego osi  $\Delta l_k = \pi^2 i^2 / l$ , przy którym powstaje pierwsze mierzalne mikro-ugięcie pręta. Praktycznie, wyboczenie – już nieściśliwego – pręta następuje w chwili wychodzenia osi działania sił na zewnątrz rdzenia przekroju  $r = d / 8$ .
3. Powodem występowania ekstremalnych sił niszczących  $P_n < P_E$  są odkształcenia trwałe  $\Delta \epsilon_{trw} > 0$ , powstające w materiale ściskanego pręta, będące podstawą wystąpienia modułów siecznych

$$E_\sigma = E (1 - \Delta \epsilon_{trw} / \epsilon_k) < E ,$$

które stają się adekwatnymi modułami wyboczeniowymi  $E_w = E_\sigma$  i dlatego osiowe naprężenia wyrażają się wzorem

$$\sigma_n = \pi^2 E_w / \lambda^2 < \sigma_k .$$

4. Największą wrażliwość na wystąpienie odkształceń trwałych wykazują (teoretycznie) pręty cienkościenne.
5. W przekroju każdego pręta występuje prostoliniowy rozkład naprężeń i odkształceń, co umożliwia stosowania zasady superpozycji.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] *Bielajew N.M.*: Wytrzymałość materiałów. Wyd. MON, Warszawa 1954
- [2] *Jasiński F.*: Pisma. Warszawa PWN, 1962
- [3] *Engesser F.*: Schweiz Bauzeitung, 1885
- [4] *Karman Th.*: Untersuchungen über Knickfestigkeit Dissertation. Göttingen, 1909
- [5] *Ylinen A.*: A method of determining the loading stress and the required cross-sectional area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range. Pub. Int. Assoc. Bridge Struct. Engng., **16**, 529-550, 1927
- [6] Proceedings of the 2nd International Conference on Structural Stability and Dynamics. Singapore, 16 - 18 December 2002
- [7] Proceedings of the 7th International Conference on Steel & Space Structures. 2-3 October 2002, Singapore
- [8] *Własow W.*: Osnownyie differencjalnyie urawnienia obszcziej teorii uprugich obołoczek. Příkladnaja Matematika i Mechanika, t.VIII, **2**, 109-140, 1944
- [9] *Odorowicz J.*: Badania doświadczalne nad statecznością prętów pryzmatycznych o bardzo dużych smukłościach przy eulerowskich obciążeniach krytycznych. Prace naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo z. 138, 29-73, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2001
- [10] *Odorowicz J.*: Analiza stanu krytycznego i nadkrytycznego ściskanych prętów pryzmatycznych o bardzo dużych smukłościach. Drogi i Mosty, nr 2/2003, 59-110
- [11] *Wasiutyński Z.*: Próby wyboczenia stalowych prętów prostych. WTP, Warszawa 1934

## EXPERIMENTAL TESTS OF COMPRESSED PRISMATIC BEAM COLUMNS IN THE RANGE OF ELASTO-PLASTIC DEFORMATIONS

### Abstract

The paper refers to stability of compressed prismatic beam columns of circular and filled section, in the range of elasto-plastic deformation. The slenderness ratio is taken from

$\lambda_H \leq \lambda \leq \lambda_r$ , where  $\lambda_H = \pi \sqrt{E/R_H}$ ,  $E$  is Young modulus,  $R_H$  is the proportional limit and slenderness  $\lambda_r$  divides elastic and elasto-plastic ranges of deformation. The original experimental test is described and analysis of experimental results is carried out with respect to the proposed by author formulas for determining both the static and geometric parameters of beam column as well as the energy and the work of external forces relating to critical and supercritical states. The research is complemented by calculation of safety factor, which due to proposed by author analysis is much lower than that proposed by Polish standard PN-76/B-03200, on static analysis and design of steel structures.

The presented approach follows the experimental tests on column buckling, namely the column preserved its straight shape only until the loading reach the value of  $P_E / \sqrt{3}$ , where  $P_E$  is the Euler value of critical force. At this level of loading the critical compressing occurs and the column axis becomes uncompressible. For higher values of the loading the process goes on with the stable bent shape and at the critical state, determined by the force  $P_E$ , the stable bent shape occurs consequently. The potential energy at critical state is equal to the maximum value of the energy of elastic deformation. This value depends on the material mechanical properties and the shape of cross-section. For the forces higher than  $P_E$  the plastic strains and the material strengthening occurs.