



JOANNA STEFANEK<sup>1)</sup>  
WIESŁAW SZUMIERZ<sup>2)</sup>

## MODEL WSPÓŁDZIAŁANIA MOSTU Z TOREM BEZSTYKOWYM W WARUNKACH ZMIAN TEMPERATURY

**STRESZCZENIE.** W pracy przedstawiono matematyczno-mechaniczny model opisujący zjawisko współdziałania mostu z torem bezstykowym w warunkach zmian temperatury. W rozważaniach uwzględniono stadium sprężyste i sprężysto-plastyczne pracy podsypki. Wyniki przedstawionej analizy zilustrowano na przykładach liczbowych, określając wykresy oddziaływań poziomych oraz dodatkowych przemieszczeń i naprężeń normalnych toru wywołanych ruchami termicznymi przęsła mostowego.

### 1. WSTĘP

Zmianom temperatury szyn towarzyszą przemieszczenia toru bezstykowego, którym przeciwstawia się opór podłoża podsypkowego. Wskutek ograniczenia swobody poziomych przemieszczeń termicznych szyn przez podsypkę powstaje w torze, przy wzroście temperatury, osiowa siła ściskająca, która w niekorzystnych warunkach eksploatacyjnych może zagrozić stateczności lokalnej toru bezstykowego w płaszczyźnie poziomej lub pionowej. Wpływ odkształceń termicznych podłoża jest bardzo znikomy, więc można go pominąć. Analizując stateczność toru

<sup>1)</sup> mgr inż. – Katedra Konstrukcji Budowlanych i Mostów, Zakład Budowy Mostów, Politechnika Śląska w Gliwicach

<sup>2)</sup> dr hab. inż. – profesor nzw., Katedra Konstrukcji Budowlanych i Mostów, Zakład Konstrukcji Metalowych, Politechnika Śląska w Gliwicach

na podłożu “nieruchomym” uwzględnia się maksymalną wartość siły ściskającej, jaka może wystąpić w torze w naszym klimacie, w okresie wysokich temperatur. Wartość tej siły ma dla bezpieczeństwa pracy toru znaczenie podstawowe.

W praktyce podłoże podsypkowe na którym spoczywa ruszt torowy może podlegać wymuszonym przemieszczeniom pionowym i poziomym (np. czynne tereny osiadań górniczych, nieustabilizowane wysokie nasypy). Wówczas takie podłoże, które nazywamy podłożem “ruchomym” będzie czynnie oddziaływać na biernie zachowujący się względem niego tor, wywołując w nim dodatkowe przyrosty siły ściskającej i rozciągającej.

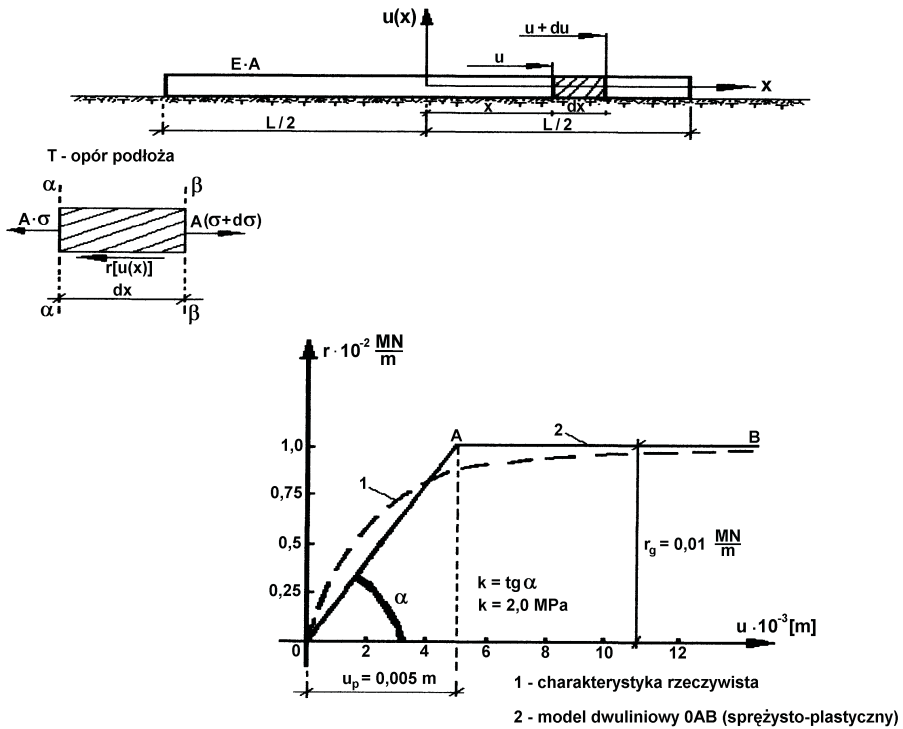
Przykładem “ruchomego” podłoża podsypkowego jest konstrukcja nawierzchni mostu. Pod wpływem zmian temperatury powstaje w układzie “ruszt torowy - podsypka - przęsło mostowe” zróżnicowanie stanu wzdlużnych przemieszczeń termicznych przęsła mostu względem toru (odniesionych do tego samego przekroju poprzecznego). Skutkiem przemieszczeń toru względem przęsła mostowego są odkształcenia postaciowe warstwy podsypki, pośredniczącej w pracy obu ustrojów. Prowadzą one do dodatkowych przyrostów siły ściskającej i rozciągającej w eksploatowanym torze bezстыkowym, które są tematem niniejszej pracy. Stateczność toru bezстыkowego na podłożu “ruchomym” należy analizować z uwzględnieniem łącznego wpływu: maksymalnej siły ściskającej w torze, występującej w okresie wysokich temperatur i określonej jak dla podłoża “nieruchomego”, oraz dodatkowego przyrostu tej siły jaki wynika ze współdziałania mostu z torem bezстыkowym pod wpływem zmian temperatury.

Celem niniejszej pracy jest poznanie mechanizmu współdziałania mostu z torem bezстыkowym w warunkach zmian temperatury i jego analityczny opis. Analiza zostanie przeprowadzona na przykładzie jednoprzęsłowego mostu stalowego z żelbetowym korytem podsypkowym.

Należy podkreślić, że w literaturze technicznej można znaleźć niewiele publikacji dotyczących omawianego zagadnienia mimo iż dla potrzeb praktyki inżynierskiej jest ono nader istotne ze względu na konieczność stosowania przyrządów wyrównawczych w torze bezстыkowym na mostach, jak i konieczność ułożyskowania mostów na podporach [1 – 6].

## **2. ANALIZA ZACHOWANIA SIĘ TORU BEZSTYKOWEGO NA PODŁOŻU “NIERUCHOMYM” PRZY RÓWNOMIERNYM WZROŚCIE TEMPERATURY**

Rozpatrujemy dowolnie długi odcinek  $L$  toru bezстыkowego typu S60, na podkładach drewnianych i podsypce tłuczniowej, o polu przekroju  $A$  ( $A = 2A_s, A_s$  – pole przekroju szyny) i prostej osi geometrycznej (rys. 1).



Rys.1. Model toru bezstykowego. Charakterystyka podsypki  $r(u)$   
 Fig.1. Model of the continuous rail track. Characteristic curve of ballast  $r(u)$

Dowolny przekrój toru o odciętej  $x$  doznaje przemieszczenia  $u$  określonego wzorem:

$$u = u_t - u_s \quad (1)$$

gdzie:

$u_t = \alpha_t \Delta t x$  – przemieszczenie przekroju odpowiadające przyrostowi temperatury  $\Delta t$ ,

$u_s$  – przemieszczenie toru wywołane poprzez opór sprężysty podłoża podsypkowego, które przeciwstawia się przemieszczeniom  $u_t$ ,

a ponadto  $\Delta t = t - t_p$ ,

$t$  – aktualna temperatura szyn w chwili pomiaru,

$t_p$  – temperatura montażu,

$\alpha_t$  – współczynnik rozszerzalności liniowej stali.

Opór podłużny podsypki  $r(u)$  zależy od wielkości przesunięcia rusztu torowego  $u(x)$  względem podłoża podsypkowego.

Rozważmy równowagę elementu  $dx$  toru (rys. 1). Pomijając mimośród działania składowej stycznej reakcji,  $r \cdot dx$ , względem osi szyny, otrzymujemy związek

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{r(u)}{A} . \quad (2)$$

Po zróżniczkowaniu równania (1)

$$\frac{du}{dx} = \alpha_t \Delta t - \frac{du_s}{dx} , \quad (3)$$

dostajemy wzór na wydłużenie jednostkowe, które w zakresie stosowalności prawa Hooke'a ma postać:

$$\frac{du}{dx} = \alpha_t \Delta t + \frac{\sigma}{E} . \quad (4)$$

Różniczkując równanie (4) względem  $x$  i uwzględniając w nim związek (2), otrzymujemy równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{r(u)}{EA} . \quad (5)$$

Z równania (5) przy zadanych warunkach brzegowych (kinematycznych i statycznych), oraz określonej charakterystyce oporu podłużnego podsypki  $r(u)$ , przedstawionej na rysunku 1, można wyznaczyć przemieszczenia  $u$  przekroju toru bezstykowego dla dowolnej odciętej  $x$ . Opór  $r(u)$  zależy głównie od rodzaju, ilości i stopnia zagęszczenia podsypki, od rodzaju i rozstawu podkładów oraz od rodzaju przytwierdzeń szyn do podkładów. Charakterystykę oporu podsypki  $r(u)$  przedstawiono na rysunku 1. Do pewnej granicy przemieszczenia  $u(x)$  jest ona nieliniowa, zaś powyżej, przyjmuje wartość bliską granicznej wartości  $r_g$ . Można wykazać, że poziomym przemieszczeniom termicznym rusztu torowego towarzyszy początkowo zjawisko zagęszczania się podsypki w między podkładami, któremu odpowiada stopniowe zwiększanie oporu wewnętrznego podsypki. Stan ten trwa do chwili pokonania sił tarcia pomiędzy podkładami a podsypką, oraz pokonania oporu ścinania warstwy podsypki między podkładami. Wówczas dochodzi do poślizgów rusztu torowego, oraz przemieszczenia i wypierania podsypki.

Do dalszej analizy przyjęto model sprężysto-plastyczny przedstawiony linią ciągłą na rysunku 1. Poprzez uplastycznienie rozumie się tutaj pokonanie sił tarcia w ośrodku

podsypkowym, któremu odpowiada graniczna wartość jej oporu  $r_g$ , natomiast  $u_p$  – oznacza umowną wartość względnego przemieszczenia, sygnalizującą stan graniczny pracy podłoża, zaś  $k$  – współczynnik poziomej sztywności sprężystego podłoża.

Rozważmy przypadek szczególnie, gdy na całej długości  $L$  odcinka toru (rys. 1) wystąpi równomierny wzrost temperatury (przekrój środkowy 0 jest wówczas nieruchomy i stanowi płaszczyznę symetrii dla odkształceń termicznych toru).

Rozpatrzmy prawą połowę odcinka toru, wyróżniając dwa stany pracy podłoża podsypkowego:

$$1. \text{ stan sprężysty: } \quad r(u) = k \cdot u, \quad u \leq u_p, \quad 0 \leq x \leq x_g, \quad (6)$$

$$2. \text{ stan graniczny: } \quad r(u) = r_g, \quad u \geq u_p, \quad x_g \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad (7)$$

którym, na podstawie rozwiązania równania (5) po podstawieniu odpowiedniej wielkości  $r(u)$  odpowiadają następujące całki opisujące funkcję  $u$  :

$$u_1 = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq x_g, \quad (8)$$

gdzie:

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{EA_t}}, \quad A_t = 2A_s,$$

$A_t$  – pole toru kolejowego,

$A_s$  – pole przekroju szyny

oraz

$$u_2 = \frac{r_g}{2EA}x^2 + Cx + D, \quad \text{dla } x_g \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (9)$$

W celu określenia nieznanymi stałymi całkowania:  $A, B, C, D$  i odciętej przekroju  $x_g$ , dla której  $u = u_p$ , dysponujemy następującymi warunkami:

$$\begin{aligned} x=0 \quad u_1 &= 0, \\ x=x_g, \quad u_1 &= u_2 = u_p, \quad \frac{du_1}{dx} = \frac{du_2}{dx}, \\ x &= \frac{L}{2}, \quad \sigma = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

W wyniku otrzymujemy następujące rozwiązania, (por. [1]):

$$\text{dla } x_g \leq x \leq \frac{L}{2} \quad u_1 = u_p \cdot \frac{\sinh(\beta x)}{\sinh(\beta x_g)},$$

$$\sigma_1 = -E\alpha_t \Delta t \left[ 1 - \frac{u_p \beta}{\alpha_t \Delta t} \cdot \frac{\cos(\beta x)}{\sinh(\beta x_g)} \right], \quad (11)$$

$$\text{dla } x_g \leq x \leq \frac{L}{2} \quad u_2 = \frac{r_g}{2EA} (x - x_g)^2 + \left( \alpha_t \Delta t - \frac{r_g L}{2EA} \right) \cdot (x - x_g) + u_p,$$

$$\sigma_2 = -\frac{r_g}{A} \left( \frac{L}{2} - x \right), \quad (12)$$

gdzie wartość odciętej  $x_g$  określa się z następującego równania:

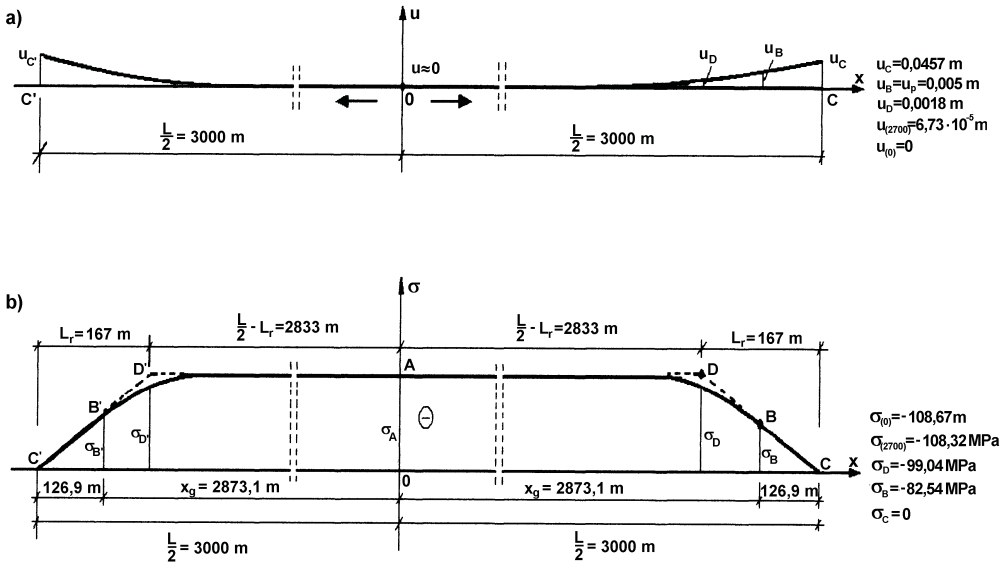
$$\frac{1}{\beta} \operatorname{ctgh}(\beta x_g) - x_g + \frac{L}{2} - \frac{\alpha_t \Delta t EA}{r_g} = 0. \quad (13)$$

### Przykład obliczeniowy [7]

$L = 6000$  m, tor typu S60, podkłady drewniane, podsypka tłuczniowa:  $k = 2,0$  MPa,  $r_g = 0,01$  MN/m,  $u_p = 0,005$  m,  $A = 0,015372$  m<sup>2</sup> (dwie szyny),  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa,  $EA = 3228,12$  MN,  $\alpha_t = 1,15 \cdot 10^{-5}$ /K,  $\Delta t = t - t_p = 45$  K, złącza szynowe luźne, czyli dla  $x = \frac{L}{2} = 3000$  m,  $\sigma = 0$ , (co odpowiada przyjętemu powyżej warunkowi brzegowemu).

Jak widać z analizy funkcji  $u(t)$  i  $\sigma(t)$  przedstawionych na rysunku 2, dla części środkowej toru bezстыkowego o długości 5400 m można praktycznie przyjąć:

$u \approx 0$  i  $\sigma \cong -109$  MPa = const, co daje podstawę do pominięcia przemieszczeń termicznych szyn  $u_i^o$  (rys. 2a) w zagadnieniu współdziałania toru bezстыkowego z przęsłem mostowym w kierunku podłużnym od zmian temperatury.



Rys.2. Wykres funkcji  $u(t)$  i  $\sigma(t)$   
 Fig.2. Graph of function  $u(t)$  and  $\sigma(t)$

### 3. WSPÓLDZIAŁANIE MOSTU Z TOREM BEZSTYKOWYM W UJĘCIU MODELOWYM

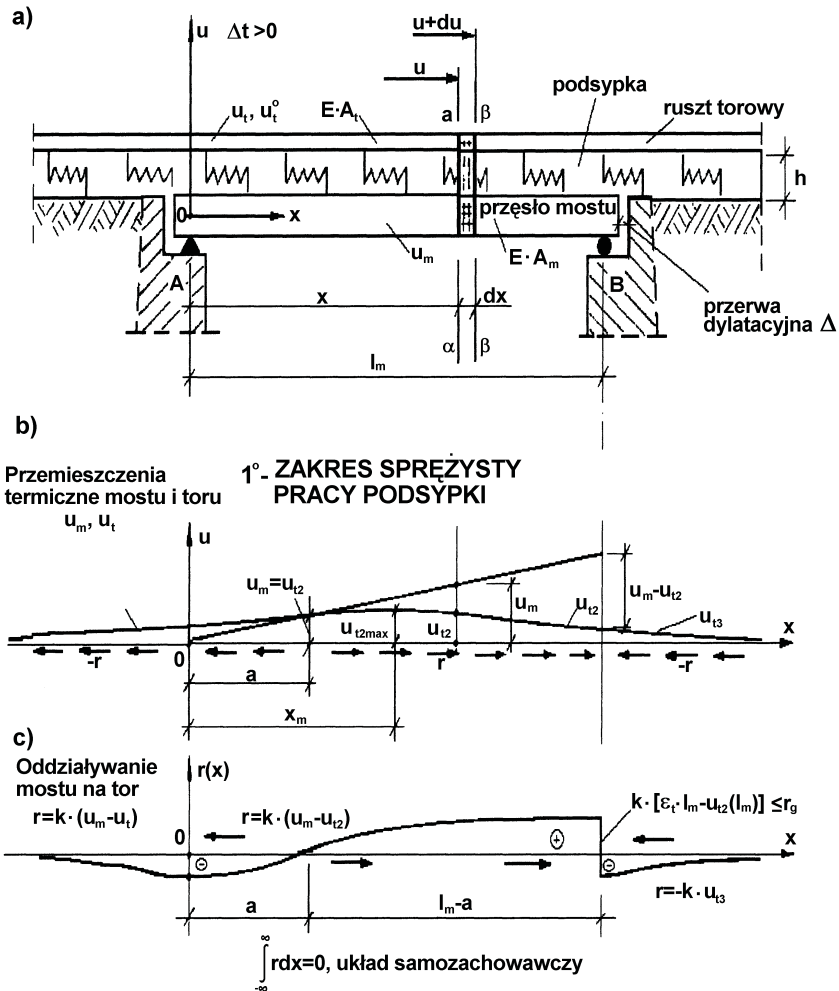
Na rysunku 3 przedstawiono model wykorzystany do analizy współdziałania mostu z torem bezstykowym pod obciążeniem,  $\Delta t > 0$ , na podstawie [8], [9].

Rozważmy przypadek, swobodnie podpartego przęsła mostowego o długości  $l_m$  o konstrukcji zespolonej (stal, beton), położonego w części środkowej długiego odcinka toru bezstykowego (rys. 3). Niech taki układ złożony: "ruszt torowy – podsypka – przęsło" podlega obciążeniu równomiernym wzrostem temperatury. Ponieważ bezpośredni wpływ temperatury na tor bezstykowy wywołuje w jego części środkowej znikome wartości przemieszczeń osiowych (rys. 2), do dalszej analizy współdziałania mostu z torem na podsypce przyjęto  $u_t^o = 0$ , por. rys. 3a).

Wzrost temperatury powoduje natomiast wydłużenia przęsła mostowego  $u_m$  w kierunku łożysk ruchomych (rys. 3)

$$u_m = \varepsilon_t \cdot x \quad , \quad (14)$$

gdzie  $\varepsilon_t = \alpha_t \Delta t$ , pomija się wpływ oporów łożysk.

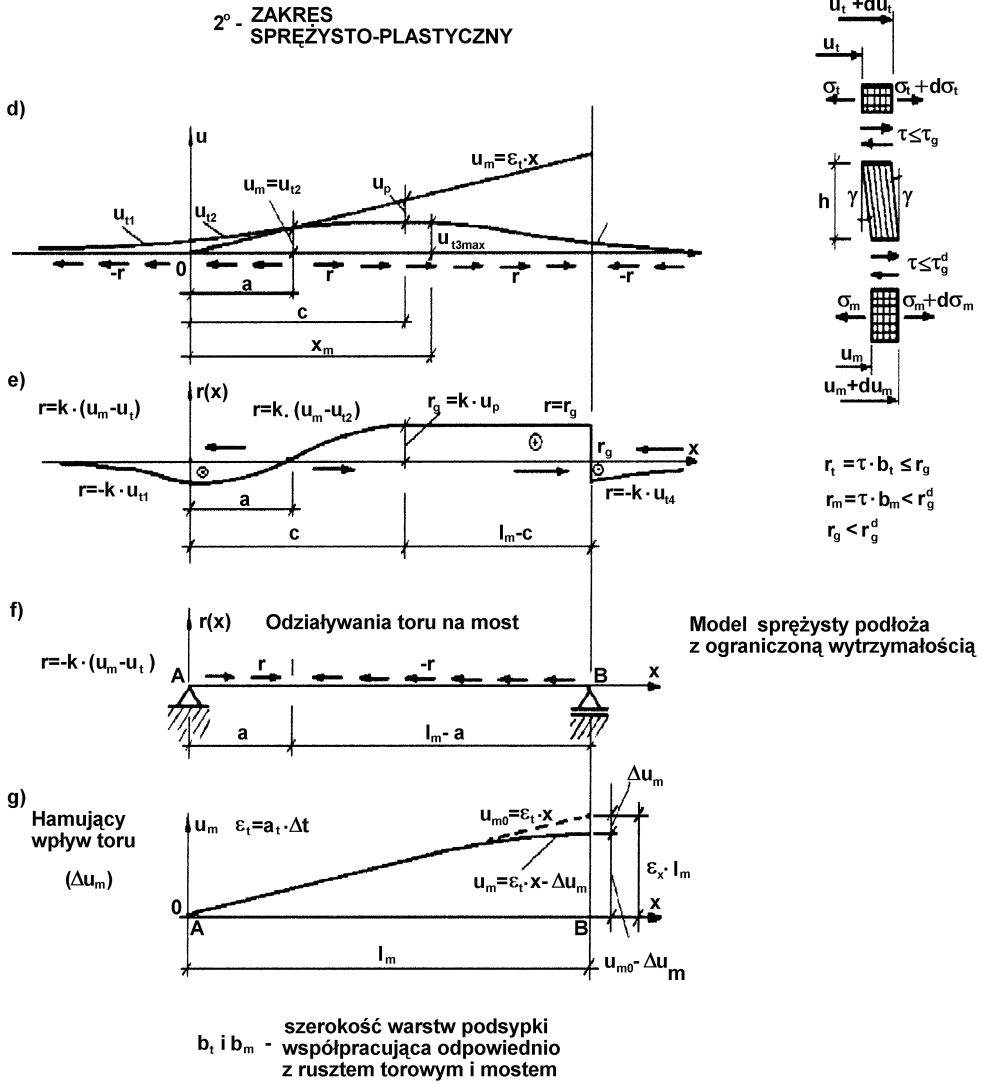


Rys.3a-c. Model współdziałania mostu z toru przy wzroście temperatury ( $\Delta t > 0$ )  
 Fig.3a-c. Model of bridge interaction with a track at the temperature rise ( $\Delta t > 0$ )

Przemieszczeniom termicznym przesła towarzyszą poziome przemieszczenia podsypki będącej “ruchomym” podłożem toru  $t_g$ , które powodują powstawanie sił reakcji w torze bezstykowym.

Wskutek ograniczenia swobody przemieszczeń warstwy podsypki przez ruszt torowy dochodzi do jej odkształceń postaciowych, miarą których jest kąt  $\gamma$  (rys. 3).





Rys.3d-g. Model współdziałania mostu z torem przy wzroście temperatury ( $\Delta t > 0$ )  
 Fig.3.d-g. Model of bridge interaction with a track at the temperature rise ( $\Delta t > 0$ )

Wzdłuż linii styku toru z podsypką i podsypki z przęsłem mostowym pojawiają się poziome oddziaływania styczne o intensywności:

$$r_t = \tau \cdot b_t \text{ i } r_m = \tau \cdot b_m \text{ ,} \quad (15)$$

gdzie:

$b_t, b_m$  – szerokość warstwy podsypki współpracująca odpowiednio:  
z rusztem torowym i z przęsłem.

Siły kontaktowe  $r_t$  i  $r_m$ , stanowiąc obciążenie zewnętrzne zarówno w stosunku do toru jak i przęsła, wywołują w nich dodatkowe naprężenia normalne  $\sigma_t$  i  $\sigma_m$  oraz dodatkowe sprężyste przemieszczenia  $u_t$  (tor) i  $-\Delta u_m$  (przęsło), por. rys. 3, przy czym wymuszone przemieszczenia  $u_t$  są zgodne co do kierunku i zwrotu z przemieszczeniami termicznymi przęsła (14), natomiast zwrot przemieszczeń  $-\Delta u_m$  jest do nich przeciwny. Wielkości poziomych oddziaływań  $r(u)$  zależą wprost od różnicy przemieszczeń przęsła i toru ( $u_m - u_t$ ) oraz od własności fizyko-mechanicznych i stopnia zagęszczenia podsypki (współczynnik sztywności  $k$ ) i nie mogą przekroczyć wartości granicznej  $r_g$ , por. rysunek 3:

1° – zakres sprężysty, dla którego na całej długości przęsła obowiązuje niezmiennosc relacji styku tor-podsypka:

$$r = k \cdot (u_m - u_t) < r_g \quad \text{dla } x < l_m \quad \text{i} \quad r = r_g \quad \text{dla } x = l_m, \quad (16)$$

co prowadzi do warunku granicznego:

$$u_m(l_m) - u_t(l_m) \leq u_p, \quad (17)$$

2° – zakres sprężysto-plastyczny:

$$r = k \cdot (u_m - u_t) \leq r_g, \quad (18)$$

w którym obok przedziałów oddziaływań sprężystych (16) może występować jedna strefa, bądź trzy strefy oddziaływań granicznych  $r = r_g$ .

Rozpatrzmy na wstępie pracę całego układu złożonego: “tor – podsypka – przęsło” w odniesieniu do stadium sprężystego (rys. 3). Z warunków równowagi toru i przęsła, przy pominięciu mimośrodowego wpływu oddziaływań poziomych [6], otrzymujemy:

$$\frac{d\sigma_t}{dx} = -\frac{\tau \cdot b_t}{A_t} = \frac{r_t}{A_t} \quad (\text{tor}) \quad \frac{d\sigma_m}{dx} = \frac{\tau \cdot b_m}{A_m} = \frac{r_m}{A_m} \quad (\text{przęsło}), \quad (19)$$

Z kolei równania fizyczne prowadzą do związków:

$$\frac{du_t}{dx} = \frac{\sigma_t}{E_t}, \quad \frac{du_m}{dx} = \frac{\sigma_m}{E_m}, \quad \gamma \cong \frac{u_m - u_t}{h} = \frac{\tau}{G_p}, \quad (20)$$

gdzie:

$G_p$  – oznacza moduł odkształcenia postaciowego dla warstwy podsypkowej.

Z powyższych równań można otrzymać równanie różniczkowe drugiego rzędu na obliczenie różnicy naprężeń normalnych  $\sigma_m - \sigma_t$ :

$$\frac{d}{dx^2} \left( \frac{\sigma_m}{E_m} - \frac{\sigma_t}{E_t} \right) - \beta^2 \left( \frac{\sigma_m}{E_m} - \frac{\sigma_t}{E_t} \right) = 0 ,$$

gdzie:

$$\beta^2 = \frac{G_p}{h} \left( \frac{b_t}{A_t E_t} + \frac{b_m}{A_m E_m} \right) . \quad (22)$$

Rozwiązanie powyższego równania ma postać:

$$\frac{\sigma_m}{E_m} - \frac{\sigma_t}{E_t} = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) . \quad (23)$$

Do wyznaczenia stałych  $A$  i  $B$  konieczna jest znajomość czterech warunków brzegowych, np.:  $\sigma_t(0), \sigma_t(l_m), \sigma_m(0), \sigma_m(l_m)$ .

Całka równania różniczkowego (23) określa różnicę dwóch nieznanymi funkcji naprężeń. W celu określenia dwóch stałych całkowania konieczna jest znajomość wartości obu funkcji w przekroju  $x=0$  i  $x=l_m$ . Znając różnicę funkcji naprężeń osiowych występujących w torze i w moście możemy, na podstawie wcześniejszych zależności, określić funkcję poziomych oddziaływań stycznych  $r_t$  i  $r_m$ , a następnie same funkcje  $\sigma_t$  i  $\sigma_m$ .

Przyjmując  $E_m = E_t = E$ ,  $A_t = A$  i założenia upraszczające  $b_t = b_m = b$ ,  $A_t \ll A_m$ , oraz  $k = \frac{G_p b}{h}$  (współczynnik sztywności poziomej podłoża), otrzymujemy  $\beta^2 = \frac{k}{EA}$ .

Współczynnik  $\beta$ , charakteryzujący wpływ sztywności podłoża podsypkowego oraz sztywności podłużnej szyn na pracę toru jest wykładnikiem w rozwiązaniu (8).

W niniejszej pracy zaproponowano dla opisu współdziałania mostu z torem bezstykowym następujące rozwiązanie:

1° – Zakres sprężysty, (rys. 3 b, c).

Funkcje nieznanymi przemieszczeń toru, jako rozwiązanie równania

$$\frac{d^2 u_t}{dx^2} = -\frac{r(u)}{EA} , \quad (24)$$

mają postać:

$$\text{dla } -\infty < x \leq 0 \quad u_{t1} = A_1 e^{\beta x} + B_1 e^{-\beta x} , \quad (25)$$

$$\text{dla } 0 \leq x \leq l_m \quad u_{t2} = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} + \varepsilon_t x , \quad (26)$$

$$\text{dla } l_m \leq x \leq \infty \quad u_{t3} = A_3 e^{\beta x} + B_3 e^{-\beta x} , \quad (27)$$

$$\text{gdzie: } \varepsilon_t = \alpha_t \Delta t, \beta = \sqrt{\frac{k}{EA_t}} .$$

Stałe całkowania  $A_i, B_i, i=1,2,3$  określono z następujących warunków brzegowych (kinematycznych i statycznych):

$$\text{dla } \lim_{x \rightarrow -\infty} u_{t1} = 0 , \quad \text{dla } \lim_{x \rightarrow \infty} u_{t3} = 0 , \quad (28)$$

$$\text{dla } x = 0 , \quad u_{t1} = u_{t2} , \quad \frac{du_{t1}}{dx} = \frac{du_{t2}}{dx} , \quad (29)$$

$$\text{dla } x = l_m , \quad u_{t2} = u_{t3} , \quad \frac{du_{t2}}{dx} = \frac{du_{t3}}{dx} , \quad (30)$$

z których otrzymano wyrażenia:

$$A_1 = \frac{\varepsilon_t \cdot l_m}{2} \left[ \frac{1}{\beta l_m} - e^{-\beta l_m} \left( 1 + \frac{1}{\beta l_m} \right) \right] , \quad B_1 = 0 , \quad (31)$$

$$A_2 = -\frac{\varepsilon_t \cdot l_m}{2} e^{-\beta l_m} \left( 1 + \frac{1}{\beta l_m} \right) , \quad B_2 = \frac{\varepsilon_t}{2\beta} , \quad (32)$$

$$A_3 = 0 \quad , \quad B_3 = \frac{\varepsilon_t \cdot l_m}{2\beta} \left[ \frac{1}{\beta l_m} - \left( \frac{1}{\beta l_m} - 1 \right) e^{\beta \cdot l_m} \right] . \quad (33)$$

Nieznaną odciętą przekroju  $x = a$  wyznaczono z warunku  $u_{t2} = u_m = \varepsilon_t \cdot a$ , otrzymując równanie

$$a = \frac{l_m}{2(\beta \cdot l_m)} [\beta \cdot l_m - \ln(1 + \beta \cdot l_m)] . \quad (34)$$

Natomiast odciętą przekroju  $x_m$  dla której występuje  $u_{t2 \max}$  obliczono z warunku  $\frac{du_{t2}}{dx} = 0$ , co prowadzi do równania:

$$A_2 e^{\beta \cdot x} - B_2 e^{-\beta \cdot x} + \frac{\varepsilon_t}{\beta} = 0 . \quad (35)$$

Stadium sprężyste pracy podłoża podsypkowego występuje dla  $0 \leq \Delta t \leq \Delta t_s$ , gdzie:

$$\Delta t_s = \frac{u_p}{\alpha_t} \cdot \frac{2}{l_m \left( 1 + \frac{1}{\beta \cdot l_m} \right) - \frac{e^{-\beta \cdot l_m}}{\beta}} , \quad (36)$$

uwaga:  $\Delta t_s$  określa się z warunku  $u_m(l_m) - u_{t2}(l_m) = u_p$ .

2° – Zakres sprężysto-plastyczny, (rys. 3 d, e).

Podobnie jak dla zakresu sprężystego, z równania  $\frac{d^2 u_t}{dx^2} = -\frac{r(u)}{EA}$  określono funkcje nieznanych przemieszczeń osiowych toru:

$$u_{t1} = A_1 e^{\beta x} + B_1 e^{-\beta x} , \quad \text{dla} \quad -\infty < x \leq 0 , \quad (37)$$

$$u_{t2} = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} + \varepsilon_t x , \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq c , \quad (38)$$

$$u_{t3} = -\frac{r_g}{2EA} x^2 + D_3 x + E_3 , \quad \text{dla} \quad c \leq x \leq l_m , \quad (39)$$

$$u_{t4} = A_4 e^{\beta \cdot x} + B_4 e^{-\beta \cdot x}, \quad \text{dla} \quad l_m \leq x < \infty. \quad (40)$$

Osiem niewiadomych stałych całkowania obliczono z następujących warunków brzegowych (kinematycznych i statycznych):

$$\text{dla} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u_{t1} = 0, \quad \text{dla} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_{t4} = 0, \quad (41)$$

$$\text{dla} \quad x = 0 \quad u_{t1} = u_{t2}, \quad \frac{du_{t1}}{dx} = \frac{du_{t2}}{dx}, \quad (42)$$

$$\text{dla} \quad x = c, \quad u_{t2} = u_{t3}, \quad \frac{du_{t2}}{dx} = \frac{du_{t3}}{dx} \quad (43)$$

$$\text{dla} \quad x = l_m \quad u_{t3} = u_{t4}, \quad \frac{du_{t3}}{dx} = \frac{du_{t4}}{dx}, \quad (44)$$

Natomiast nieznanne wartości odciętych przekrojów  $x = a$  i  $x = c$ , określono z warunków  $u_{t2} = u_m = \varepsilon \cdot x$ , stąd

$$a = \frac{1}{2\beta} \ln \left( -\frac{B_2}{A_2} \right), \quad \text{oraz} \quad k \cdot (\varepsilon_t \cdot x - u_{t2}) = r_g, \quad (45)$$

co prowadzi do równania na obliczenie  $c$ :

$$A_2 e^{\beta \cdot x} + B_2 e^{-\beta \cdot x} + u_p = 0. \quad (46)$$

Wyznaczone stałe całkowania mają postać:

$$A_1 = A_2 + \frac{\varepsilon_t}{2\beta}, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{\varepsilon_t}{2\beta}, \quad A_4 = 0, \quad B_4 = \frac{E_3 + \frac{r_g l_m^2}{2EA}}{e^{\beta \cdot l_m} (1 + \beta \cdot l_m)}, \quad (47)$$

$$A_2 = \frac{\frac{r_g l_m}{2EA} (\beta \cdot l_m + 2) - \left[ \frac{\varepsilon_t}{2\beta} e^{-\beta \cdot c} (1 + \beta \cdot c) - \frac{r_g c^2}{2EA} \right] \beta - \left[ \varepsilon_t \left( 1 - \frac{e^{-\beta \cdot c}}{2} \right) + \frac{r_g c}{EA} \right] (1 + \beta \cdot l_m)}{\beta \cdot e^{\beta \cdot c} (2 + \beta \cdot l_m - \beta \cdot c)}, \quad (48)$$

$$D_3 = A_2 \beta e^{\beta \cdot c} + \varepsilon_t \left( 1 - \frac{e^{-\beta \cdot c}}{2} \right) + \frac{r_g \cdot c}{EA}, \quad (49)$$

$$E_3 = A_2 e^{\beta \cdot c} (1 - \beta \cdot c) + \frac{\varepsilon_t}{2\beta} e^{-\beta \cdot c} (1 + \beta \cdot c) - \frac{r_g \cdot c^2}{2EA}, \quad (50)$$

Wartość odciętej  $x_m$  dla której występuje  $u_{t3 \max}$  obliczono z równania:

$$x_m = \frac{D_3 EA}{r_g}, \quad (51)$$

Zakres sprężysto-plastyczny występuje dla  $\Delta t_s < \Delta t$ , gdzie  $\Delta t_s$  określono w wyrażeniu (36).

### Przykłady obliczeniowe [10]

Tor bezstykowy typu S60, podsypka tłuczniowa, podkłady drewniane,  $EA_t = 3228,12 \text{ MN}$ ,  $A_t = 0,015372 \text{ m}^2$  (dwie szyny),  $k = 2,0 \text{ MPa}$ ,  $r_g = 0,01 \text{ MN/m}$  (rys. 1),  $\varepsilon_t = \alpha_t \Delta t = 1,15 \cdot 10^{-5} / \text{K} \cdot 45 \text{ K} = 5,175 \cdot 10^{-4}$ , (przyjęto jednakowe  $\Delta t$  dla toru i mostu).

Analizujemy wpływ osiowych przemieszczeń termicznych jednoprzęsłowego mostu stalowego z żelbetowym pomostem (korytem balastowym), o długości przęsła:  $l_m = 60,0 \text{ m}$  i  $l_m = 91,0 \text{ m}$ .

Sprawdzenie przyjętego na wstępie założenia (rys. 3):

$r_g^d = g_n \cdot \text{tg} \varphi_w \cong 40 \text{ kN/m} \cdot \text{tg} 36^\circ = 29,06 \text{ kN/m}$ , gdzie  $g_n$  – jednostkowa siła masowa nawierzchni kolejowej odpowiadająca  $b_m$  (podsypka + ruszt torowy),  $\varphi_w$  – kąt tarcia wewnętrznego dla tłucznia. Tak więc  $r_g = 0,101 \text{ MN/m} < r_g^d \cong 0,0291 \text{ MN/m}$ .

Ocenę wpływu poziomych “hamujących” oddziaływań toru na most podlegający równomiernemu wzrostowi temperatury (rys. 3 f i g), przyjęto niekorzystnie na całej długości przęsła  $l_m$  rozkład:  $r = -r_g$ , rezygnując tym samym ze strefy oddziaływań  $r$  skierowanych dodatnio na długości odcinka  $a$ .

Dla:  $E_m = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $A_m \cong 1,0 \text{ m}^2$ ,  $r_g = 0,01 \text{ MN/m}$ ,  $l_m = 60 \text{ m}$  otrzymujemy:

$$\Delta u_m = -\frac{r_g}{2E_m A_m} \cdot x^2 = -2,381 \cdot 10^{-8} \cdot x^2; \text{ dla odciętej } x = l_m = 60 \text{ m mamy}$$

$\Delta \bar{u}_m = -\frac{r_g}{2E_m A_m} \cdot x^2 \cong -0,09 \cdot 10^{-3}$  m. Wypadkowe termiczne przemieszczenie osiowe przekroju przęsła dla  $\Delta t = 45$  K wynosi:

$$\Delta \bar{u}_m = \varepsilon_t \cdot x - \frac{r_g}{2E_m A_m} \cdot x^2 = 5,175 \cdot 10^{-4} \cdot x - 2,381 \cdot 10^{-8} \cdot x^2 \quad .$$

Jak widać, wpływ oddziaływań toru na most jest bardzo mały.

Z wykresów na rysunku 4 wynika również, że w zakresie sprężystym pracy podsypki występuje największy względny przyrost naprężeń ściskających w torze bezstykowym wywołanym ruchami termicznymi przęsła mostu.

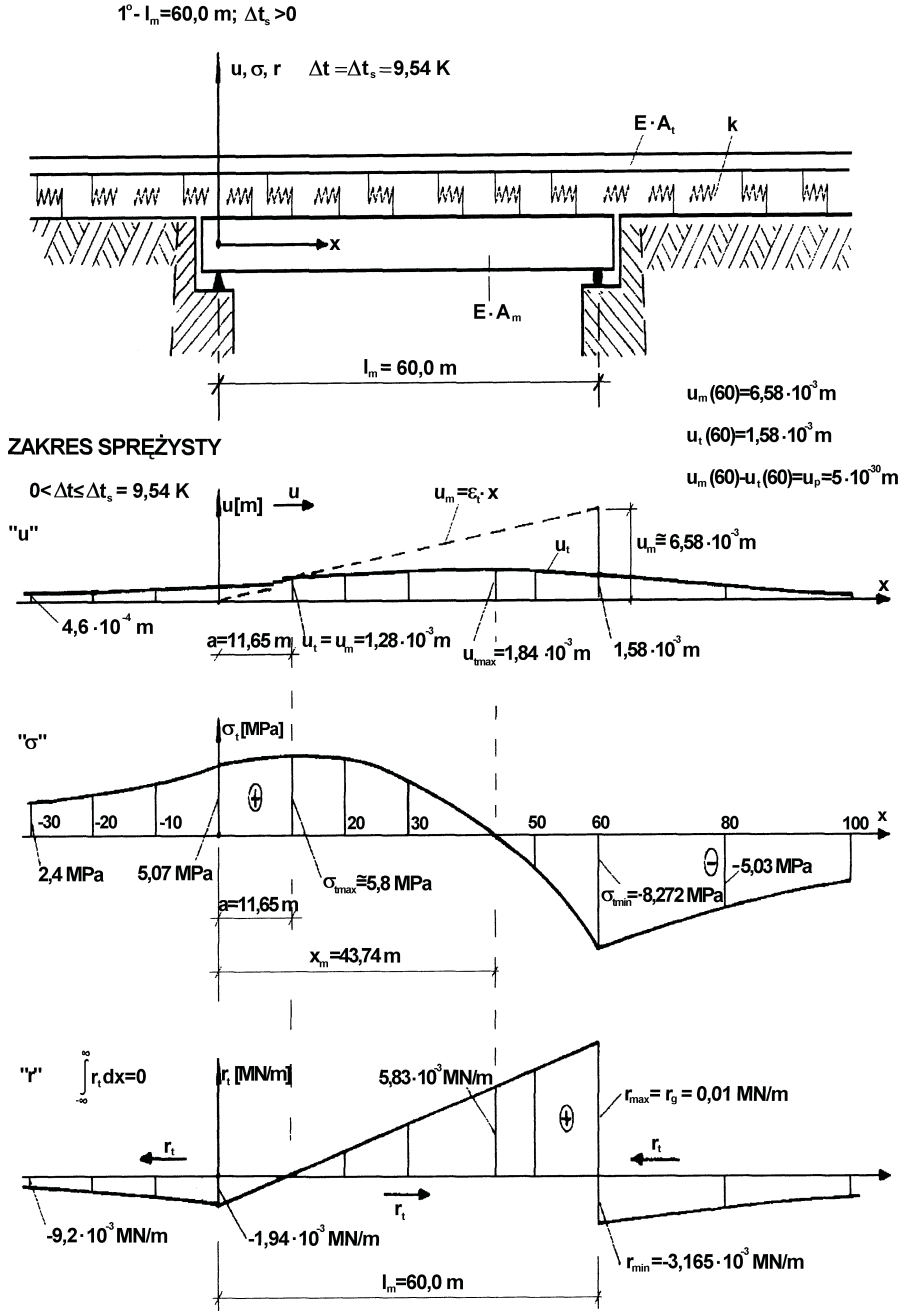
Dla  $\Delta t_g = 9,54$  K przyrost ten osiąga już wartość  $\sigma_{t \min} = -8,272$  MPa, co odpowiada 49,4 % wartości przyrostu tych naprężeń obliczonych dla  $\Delta t = 45$  K w stadium sprężysto-plastycznym ( $\sigma_{t \min} = -16,752$  MPa).

Jak widać wystąpienie stanu granicznego pracy podsypki w drugim zakresie jest reakcją toru przed nadmiernym wzrostem dodatkowych naprężeń osiowych w szynach. Ponadto, co przedstawiono na rysunku 4, w przypadku przęsła  $l_m = 60$  m pojawia się tylko jedna strefa oddziaływań granicznych  $r_g$ , która występuje na samym przęsle. Natomiast w strefach tzw. "kotwienia" toru, poza przęsłem, oddziaływania  $r$  nie osiągają wartości  $r_g = 0,01$  MN/m i występuje tam stan sprężysty, nawet przy bardzo dużych różnicach  $\Delta t$ , np. dla odciętej  $x = 60^+$  m (strona prawa przekroju) mamy:  $\Delta t = 45$  K,  $r = -6,872 \cdot 10^{-3}$  MN/m.

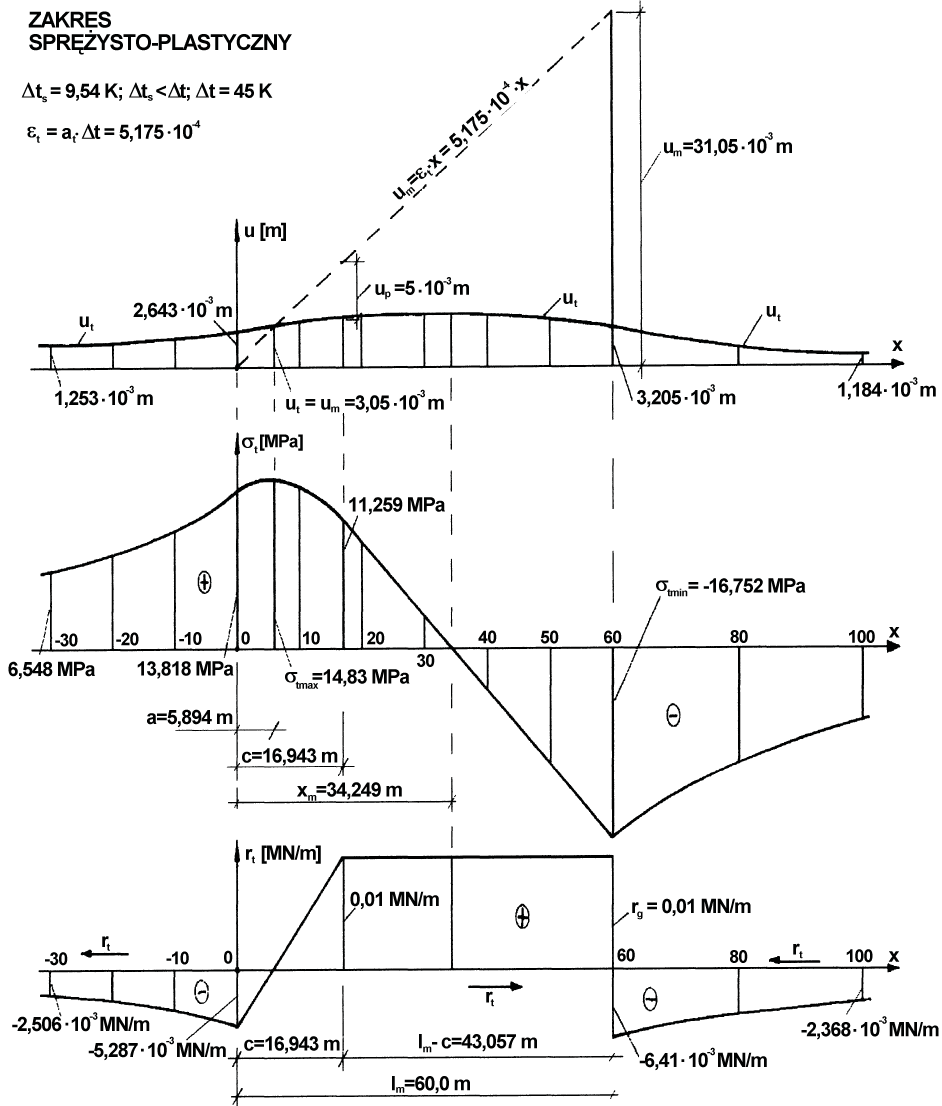
W przypadku przęsła o długości  $l_m = 91,0$  m i  $\Delta t = 45$  K stan graniczny pracy podsypki początkowo pojawia się jednocześnie na długości przęsła i w przekroju  $x = 91$  m (rys. 5), by następnie, dla  $\Delta t > 45$  K, rozwinąć się w dodatkowe dwie strefy skrajne  $r = r_g$  poza przęsłem, pierwsza o długości  $d_1$  od strony łożyska ruchomego i druga o długości  $d_2$  od strony łożyska stałego, przy czym  $d_2 < d_1$ . Obie strefy na rysunku 5 oznaczono liniami przerywanymi. Podobnie dla  $l_m > 91,0$  m i  $\Delta t = 45$  K mogą pojawiać się również trzy strefy oddziaływań granicznych  $r = r_g$  ( $l_m = 91,0$  m jako wielkość charakterystyczna odpowiada wartościom parametrów przyjętego modelu podłoża).

Należy podkreślić, że w przypadku tylko jednej strefy oddziaływań granicznych, pojawiającej się na przęsle mostu, obliczenia  $u_t(t)$ ,  $\sigma_t(t)$ ,  $r_t(t)$  można przeprowadzić dla podanego w pracy modelu (funkcje czteroprzędziałowe rozkładów). Natomiast dla przypadku trzech stref oddziaływań  $r = r_g$  zachodzi już potrzeba stosowania bardziej złożonego modelu, z sześcioprzędziałowymi funkcjami rozkładu  $u_t(t)$ ,  $\sigma_t(t)$ ,  $r_t(t)$  przedstawienie których nie mieściło się w ramach niniejszej pracy.





Rys.4a. Wykresy funkcji:  $u_t(t)$ ,  $\sigma_t(t)$ ,  $r_t(t)$  dla przęsła o długości 60 m (zakres sprężysty)  
 Fig.4a. Graphs of function:  $u_t(t)$ ,  $\sigma_t(t)$ ,  $r_t(t)$  for the span of length 60 m (the elastic range)



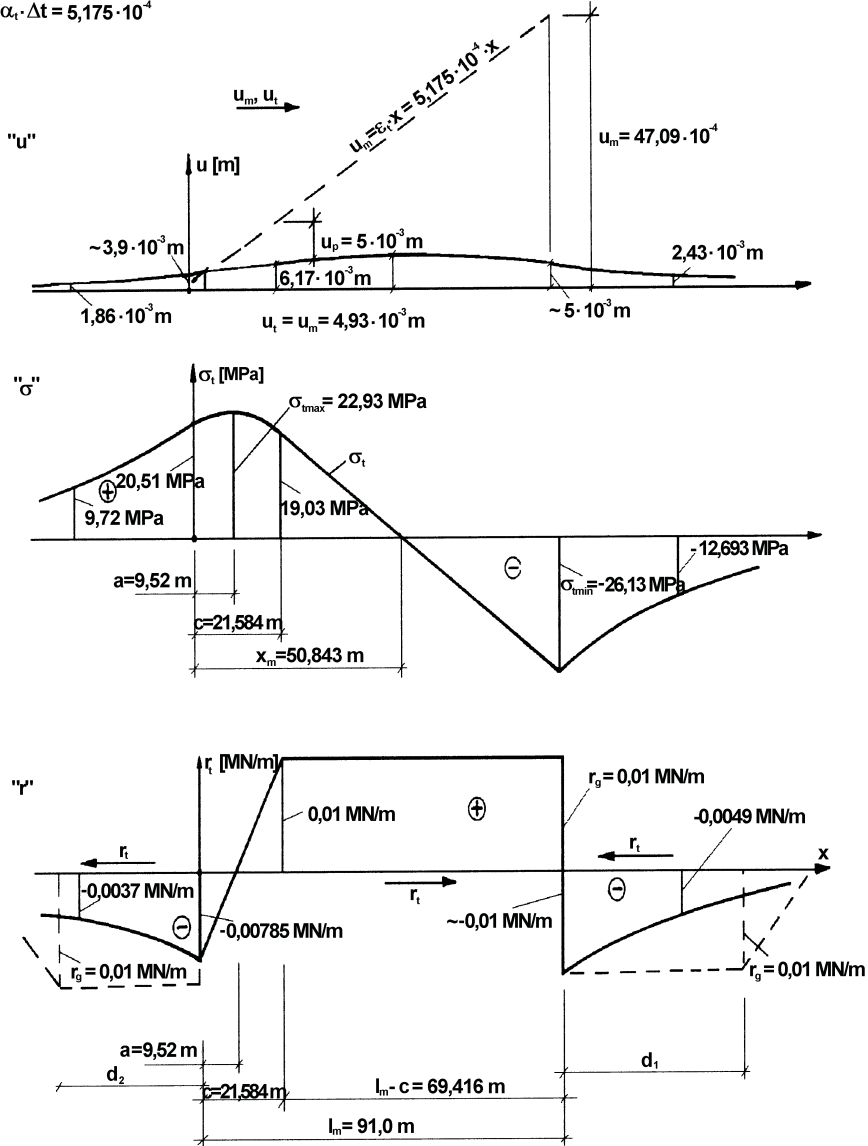
Rys.4b. Wykresy funkcji:  $u_i(t)$ ,  $\sigma_i(t)$ ,  $r_i(t)$  dla przęsła o długości 60 m (zakres sprężysto-plastyczny)

Fig.4b. Graphs of function:  $u_i(t)$ ,  $\sigma_i(t)$ ,  $r_i(t)$  for the span of length 60 m (the elastic-plastic range)

$2^\circ - l_m = 91,0 \text{ m}; \Delta t_s < \Delta t$   
 $\Delta t_s = 6,85 \text{ K}; \Delta t = 45 \text{ K},$   
 $\alpha_t = 1,15 \cdot 10^{-5} / \text{K}$   
 $\varepsilon_t = \alpha_t \cdot \Delta t = 5,175 \cdot 10^{-4}$

**ZAKRES  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY**

$\varepsilon_t \approx \alpha_t \cdot \Delta t \approx 5,175 \cdot 10^{-4}$



Rys.5. Wykresy funkcji:  $u_t(t)$ ,  $\sigma_t(t)$ ,  $r_t(t)$  dla przęsła o długości 91 m  
 Fig.5. Graphs of function:  $u_t(t)$ ,  $\sigma_t(t)$ ,  $r_t(t)$  for the span of length 91 m

## 4. WNIOSKI

Na podstawie opracowanego modelu współdziałania toru bezстыkowego z mostem w warunkach równomiernego oddziaływania temperatury otrzymano wzory na obliczenie przyrostów naprężeń i przemieszczeń wzdłużnych w torze bezстыkowym jako funkcji poziomych przemieszczeń termicznych przęsła mostowego.

Wprawdzie przedstawiony model nie odwzorowuje w pełni rzeczywistych warunków współpracy toru z mostem, to jednak jego stosowanie w praktyce może już dać wyniki, których wartości liczbowe będą tego samego rzędu, co odpowiednie wartości przyrostów doraźnych przemieszczeń i naprężeń osiowych pojawiających się w torze bezстыkowym od przemieszczeń termicznych przęsła.

Analiza była ograniczona do statycznych warunków współdziałania toru bezстыkowego z mostem. W rzeczywistych warunkach dynamiczne wstrząsy toru wywołane ruchem pociągów prowadzą do częściowego rozładowania powstałych napięć między rusztem torowym a podsypką, efektem których będzie pewna redukcja obliczonych, na podstawie podanych zależności, wartości przemieszczeń i naprężeń normalnych toru. Zjawisko to, z uwagi na swoją złożoność i specyfikę, wymaga odrębnego opisu analitycznego.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] *Huber M. T.*: Pisma. Zagadnienia kolejowe. PWN, tom III, dział VIII, Warszawa 1957
- [2] *Łoś M.*: Wpływ temperatury na pracę toru kolejowego. WKiŁ, Warszawa 1974
- [3] *Czyczuła W.*: Tor bezстыkowy. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2002, 134–149
- [4] *Fryba L.*: Distribution “quasi-statique” des forces de démarrage et de freinage dans les rails et les ponts. Rail International, Février 1975
- [5] *Bednarek W.*: Analiza stateczności eksploatowanego toru bezстыkowego w warunkach utraty jego kontaktu z podłożem. Praca Doktorska, Instytut Inżynierii Lądowej, Zakład Dróg Kolejowych Politechniki Poznańskiej, Poznań 2001
- [6] *Szumierz W.*: Stateczność prostego toru bezстыkowego przy zmianach temperatury. Archiwum Inżynierii Lądowej, tom XVII, z. 2/1971, 373-389
- [7] *Stefanek J., Szumierz W.*: Wpływ zmian temperatury na zjawisko współdziałania mostu z torem bezстыkowym. II Symposium “Badania i diagnostyka mostów”, Opole, 9-11 kwietnia 2003, 505-520
- [8] *Szumierz W.*: Wpływ poziomych deformacji górniczych podłoża na pracę budowli liniowych. Archiwum Inżynierii Lądowej, tom XXII, z.4/1976, 647-663

- 
- [9] *Szumierz W.*: Analiza utraty kontaktu prostego toru bezstykowego z podłożem. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, tom XIX, z. 2/1973, 345-369
- [10] *Stefanek J.*: Modelowy opis współdziałania mostu z torem bezstykowym od wpływu zmian temperatury. III Konferencja "Telematyka i Bezpieczeństwo Ruchu Drogowego", Katowice – Ustroń, 24–25 października 2003, 55–63

## MODEL OF BRIDGE INTERACTION WITH A CONTINUOUS RAIL TRACK SUBJECTED TO TEMPERATURE CHANGES

### Abstract

The paper presents the mathematical and mechanical model describing the phenomenon of a bridge interaction with continuous rail track under the influence of temperature changes. The considerations include the elastic stage and elastic–plastic stage of the foundation behavior. Results of the analysis are illustrated by means of numerical examples, presenting characteristics of the distributions of horizontal interactions, as well as additional displacements and axial stresses of the track, caused by bridge span thermal movements.