

ANDRZEJ KOBRYŃ<sup>1)</sup>

## GENERAL TRANSITION CURVES AS AN ALTERNATIVE TO TRADITIONAL HORIZONTAL CURVES IN ROAD ALIGNMENT

### OGÓLNE KRZYWE PRZEJŚCIOWE JAKO ALTERNATYWA DLA TRADYCYJNYCH ŁUKÓW POZIOMYCH W TRASOWANIU DRÓG

**STRESZCZENIE.** W artykule przeanalizowano wybrane rozwiązania tzw. ogólnych krzywych przejściowych jako alternatywę dla tradycyjnych łuków poziomych. Krzywe te umożliwiają opis całego przejścia krzywoliniowego między dwoma kierunkami prostoliniowymi za pomocą tylko jednego równania. Przedmiotem analiz opisanych w niniejszym artykule był szczególny przypadek w postaci łuków symetrycznych. Porównano podstawowe parametry geometryczne łuków tradycyjnych i ogólnych krzywych przejściowych, opartych na cięciwie o tej samej długości. Tymi parametrami są: promień minimalny oraz rzędna środka łuku odpowiadające tej samej długości cięciwy, jak też długość cięciwy odpowiadająca tej samej wartości promienia. Przeprowadzone analizy wykazały, że geometria łuków utworzonych przez ogólne krzywe przejściowe różni się od geometrii łuków tradycyjnych tym bardziej, im większy jest kąt zwrotu trasy. W rezultacie, użycie ogólnych krzywych przejściowych daje swobodę kształtowania geometrii łuków poziomych, co może mieć znaczenie w warunkach ograniczeń terenowych.

**SŁOWA KLUCZOWE:** łuki poziome; ogólne krzywe przejściowe; trasowanie dróg.

**ABSTRACT.** The article presents selected solutions of the so-called general transition curves, used as an alternative to traditional horizontal curves. General transition curves enable description of the entire curvilinear transition between the two straight-line sections by means of only one equation. Analysis presented in this paper pertained to the specific case of symmetrical curves. It encompassed comparison of the basic geometric parameters of conventional curves and general transition curves based on a chord of the same length. The compared parameters included minimum radius values and middle ordinates for various curves with the same chord length, as well as chord lengths corresponding to various curves with the same radius. The analyses indicated that the greater the central angle of the entire curve, the greater the difference in geometry between traditional curves and those created using general transition curves. Consequently, use of general transition curves provides greater flexibility in shaping of horizontal alignment, which may prove advantageous in difficult terrain conditions.

**KEYWORDS:** general transition curves; horizontal curves; road alignment.

DOI: 10.7409/rabdim.024.005

<sup>1)</sup> Politechnika Białostocka, Wydział Budownictwa i Nauk o Środowisku, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok; a.kobryn@pb.edu.pl

## 1. WPROWADZENIE

W trasowaniu dróg generalnie stosuje się układy geometryczne w postaci [1-7]:

- prosta – łuk kołowy – prosta,
- prosta – 1. krzywa przejściowa – łuk kołowy – 2. krzywa przejściowa – prosta,
- prosta – 1. krzywa przejściowa – 2. krzywa przejściowa – prosta.

Pierwszy typ, tzn. układ „prosta – łuk kołowy – prosta” może być stosowany w przypadku odpowiednio dużych promieni łuków. Przy niewystarczająco dużych wartościach promieni konieczne jest wprowadzenie krzywych przejściowych, przy czym z reguły stosowana jest kłotoida [1-7]. Należy dodać, że powyższe układy geometryczne nie wyczerpują szerszego spektrum możliwych zastosowań kłotoidy w innych układach geometrycznych, jak np. krzywa esowa czy krzywa owalna [7]. Wybrane problemy obliczeniowe, związane z użyciem kłotoidy w różnych układach geometrycznych, były ostatnio analizowane m.in. w pracach [8-10]. Niezależnie od dominacji kłotoidy jako krzywej przejściowej najpowszechniej stosowanej w projektowaniu ww. układów geometrycznych, w literaturze proponowane są inne rozwiązania krzywych przejściowych, które również mogą znaleźć zastosowanie w trasowaniu krzywoliniowych odcinków dróg. Można tu wymienić m.in. propozycje przedstawione w pracach [11-17].

Z literatury znane są również inne rozwiązania geometryczne, które mogą stanowić alternatywę dla wyżej wymienionych układów geometrycznych. Chodzi o tzw. ogólne krzywe przejściowe, które całe przejście krzywoliniowe między dwiema prostymi opisują za pomocą jednego równania [18, 19]. W obrębie ogólnych krzywych przejściowych krzywizna rośnie od zera w punkcie początkowym do określonej wartości maksymalnej, po czym ponownie maleje do zera w punkcie końcowym. Wśród ogólnych krzywych przejściowych znane są rozwiązania określone za pomocą funkcji krzywizny  $k = k(l)$  oraz rozwiązania w postaci funkcji  $y = f(x)$ . Należy dodać, że w obydwu przypadkach chodzi o odpowiednie rodziny krzywych. Przedmiotem analiz w niniejszym artykule są znane z literatury, w tym z wcześniejszych prac autora, wybrane rozwiązania ogólnych krzywych przejściowych.

Celem artykułu jest weryfikacja użyteczności tych krzywych w geometrycznym kształtowaniu łuków poziomych. W związku z tym dokonano porównania podstawowych parametrów geometrycznych łuków tradycyjnych i odpowiednich łuków utworzonych przez ogólne krzywe przejściowe, aby zidentyfikować różnice i podobieństwa między nimi. Zdaniem autora, pozytywna weryfikacja mogłaby stanowić przesłankę do

## 1. INTRODUCTION

Road alignment design is typically based on the use of the following geometric systems [1-7]:

- tangent – circular arc – tangent,
- tangent – 1st transition curve – circular arc – 2nd transition curve – tangent,
- tangent – 1st transition curve – 2nd transition curve – tangent.

The first type, i.e. the “tangent – circular arc – tangent” system, may be used in the case of sufficiently large arc radius values. With smaller radius values it is necessary to introduce transition curves; clothoid is the most commonly used [1-7]. Importantly, the above list does not exhaust all the possibilities; clothoid may be applied in a wider range of geometric systems, including reverse transition curves and oval curves [7]. Selected calculation problems pertaining to the use of clothoids in various geometric systems were analyzed lately, including works [8-10]. Despite the domination of the clothoid as the most popular transition in the mentioned geometric systems, there are also other transition curve solutions proposed in the literature that may prove useful in road alignment design, including propositions presented in [11-17].

The literature also describes other geometric solutions that may serve as an alternative to the geometric systems mentioned above – the so-called general transition curves enable description of the whole curvilinear transition between the two straight-line sections by means of only one equation [18, 19]. Over a given general transition curve, the value of curvature increases from zero in the point of curvature, reaches a determined maximum value and then decreases, reaching zero again in the point of tangency. Among the known general transition curves, some solutions are defined in the form of a curvature function and some in the form of an  $y = f(x)$  function. In both cases, appropriate families of curves are defined. The analyses presented herein will be focused on chosen general transition curve solutions known from the literature, including those presented in previous works by the author.

The aim of this article is to verify the usability of such transition curves in shaping of horizontal curve geometry. To this end, basic geometric parameters of traditional curves and corresponding general transition curves were compared. In the opinion of the author, positive verification of such transition curves may support their inclusion in the set of available design tools, especially for potential use in horizontal alignment design.

ewentualnego włączenia ogólnych krzywych przejściowych do zbioru dostępnych narzędzi projektowych, ze szczególnym uwzględnieniem ich potencjalnych zastosowań w projektowaniu łuków poziomych.

## 2. ZNANE ROZWIĄZANIA OGÓLNYCH KRZYWYCH PRZEJŚCIOWYCH

Ogólne krzywe przejściowe, rozumiane w sposób opisany powyżej i opisane funkcją krzywizny  $k = k(l)$ , po raz pierwszy zostały przedstawione przez Grabowskiego [18, 20]. Później również Baykal i Tari [11-14] przedstawili odpowiednie rozwiązania ogólnych krzywych przejściowych, opisanych funkcją krzywizny. Równania niektórych spośród krzywych przedstawionych w powyższych pracach zawiera również opracowanie autora [21]. Należy dodać, że istotnym mankamentem wszystkich krzywych opisanych funkcją krzywizny  $k = k(l)$  jest sposób wyznaczania współrzędnych prostokątnych. Wyznacza się je na podstawie wzorów ogólnych w postaci:

$$x = \int_0^l \cos u dl, \quad (1)$$

$$y = \int_0^l \sin u dl. \quad (2)$$

Konieczne jest przy tym rozwinięcie funkcji  $\cos u$  i  $\sin u$  w szeregi potęgowe, przy czym dla kąta zwrotu stycznej do krzywej ( $u$ ) obowiązuje równanie:

$$u = \int_0^l k(l) dl. \quad (3)$$

Prowadzi to do wzorów, które z reguły są znacząco bardziej rozbudowane niż w przypadku kłotoidy. Przykładem na to mogą być wzory opisujące współrzędne prostokątne wybranych krzywych tego typu, które przedstawiono w pracy [22]. Dlatego do obliczania współrzędnych opisanych wzorami ogólnymi (1) i (2) proponuje się całkowanie metodą Romberga [23-26].

W przypadku komputerowego projektowania dróg, ta forma opisu krzywych przejściowych nie jest jednak najkorzystniejsza. Należy zauważyć, że nawet dla relatywnie nieskomplikowanych wzorów na współrzędne prostokątne kłotoidy rozważa się możliwości aproksymacji za pomocą odpowiednich wielomianów (m.in. [27-34]). Z tego powodu godne polecenia są rozwiązania ogólnych krzywych przejściowych, które są oparte na funkcji wielomianowej. Odpowiednie rozwiązania zostały przedstawione przez Grabowskiego [18] i Kobrynia [19]. W monografii [35] autor niniejszej publikacji zaproponował metodykę wielomianowego kształtowania różnych rozwiązań krzywych przejściowych, w tym ogólnych krzywych przejściowych. Prace [36, 37] zawierają zaś ich szczegółowy

## 2. KNOWN SOLUTIONS OF GENERAL TRANSITION CURVES

General transition curves, understood as stated above and described in terms of a curvature function  $k = k(l)$ , were presented for the first time by Grabowski [18, 20]. Subsequently, also Baykal and Tari [11-14] presented general transition curve solutions defined using curvature functions. Equations of certain curves presented in the above works were also included in a work by the author [21]. It is worth mentioning that the manner of determining rectangular coordinates is a significant drawback of curves defined in terms of a curvature function  $k = k(l)$ . Coordinates are obtained from general equations in the form:

$$x = \int_0^l \cos u dl, \quad (1)$$

$$y = \int_0^l \sin u dl. \quad (2)$$

It is necessary to expand the functions  $\cos u$  and  $\sin u$  in power series, whereas the angle of deflection of the curve from the tangent is given by:

$$u = \int_0^l k(l) dl. \quad (3)$$

This leads to equations that are usually much more complex than in the case of clothoid; for example, formulas for rectangular coordinates of chosen general transition curves presented [22]. Therefore, in order to calculate coordinates given by the general equations (1) and (2), Romberg's method is proposed [23-26].

However, such form of description of transition curves is not the most advantageous in computer-aided road design. Even in the case of relatively uncomplicated equations for coordinates of clothoids, approximations with appropriate polynomials are considered (e.g. [27-34]). Consequently, it is advisable to use transition curve solutions that are based on polynomial functions. Such solutions were presented by Grabowski [18] and Kobryń [19]. In the book [35] the author of this article proposed a method for polynomial-based shaping of various transition curves, including general transition curves. Its detailed mathematical description and geometric characteristics are given in the works [36, 37]. A noteworthy expansion on the polynomial approach to shaping of various transition curves was presented in [38], in which nonparametric representation of polynomial transition curves using Bézier curves was described.

opis matematyczny i charakterystykę geometryczną. Warto dodać, że interesujące rozwinięcie wielomianowego podejścia do kształtowania różnych rozwiązań krzywych przejściowych zawiera praca [38], gdzie autorzy zaprezentowali nieparametryczną reprezentację wielomianowych krzywych przejściowych z użyciem krzywych Béziera.

W Polsce kwestie dotyczące geometrycznego kształtowania krzywoliniowych odcinków dróg zamiejskich są aktualnie uregulowane w wytycznych WR-D-22-2 [39]. Wytyczne te dopuszczają stosowanie w praktyce projektowej różnych rodzajów krzywych. W opinii autora, wśród tych krzywych mogą znaleźć miejsce również ogólne krzywe przejściowe. Potwierdzeniu tego służą analizy przedstawione w dalszej części artykułu. Zdaniem autora, ogólne krzywe przejściowe mogą być też bardzo użyteczne w trasowaniu dróg, jeśli wziąć pod uwagę problemy związane z wariantowaniem przebiegu inwestycji drogowej w fazie planistycznej [40].

Ogólna krzywa przejściowa o gładkim wykresie krzywizny zaproponowana przez Grabowskiego ma postać:

$$y = x_Q (G_1 \tan u_p + G_2 \tan u_Q), \quad (4)$$

przy czym:

$$G_1 = t - 20t^4 + 45t^5 - 36t^6 + 10t^7,$$

$$G_2 = -15t^4 + 39t^5 - 34t^6 + 10t^7.$$

oraz zgodnie z Rys. 1:

$x_Q$  – odcięta punktu końcowego,  
 $u_p, u_Q$  – kąty pochylenia stycznych w punktach P i Q,  
 $t = x / x_p, t \in < 0; 1 >$ .

Między punktami P i Q o krzywiznie zerowej istnieje tylko jedno maksimum krzywizny. Zgodnie z pracą [18], występuje ono w punkcie E o odciętej  $x_E \in \left\langle \frac{2}{5}x_Q; \frac{3}{5}x_Q \right\rangle$ . Warunkiem koniecznym na to jest:

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{\tan u_p}{\tan u_Q} \leq -\frac{3}{4}. \quad (5)$$

Równanie zaproponowanej przez Grabowskiego ogólnej krzywej przejściowej o niegładkim wykresie krzywizny ma postać:

$$y = x_Q (M_1 \tan u_p + M_2 \tan u_Q), \quad (6)$$

przy czym:

$$M_1 = t - 6t^3 + 8t^4 - 3t^5,$$

$$M_2 = -4t^3 + 7t^4 - 3t^5.$$

Warunek istnienia tylko jednego maksimum krzywizny w obrębie całej krzywej ma postać nierówności:

In Poland, geometric shaping of curvilinear sections of non-urban roads is currently regulated by the WR-D-22-2 guidelines [39], which allow usage of various types of curves in design. In the opinion of the author, general transition curves may also be included in this set. This opinion is supported by the analyses that will be presented below. General transition curves may prove very useful in road alignment design, taking into consideration the problems of analyzing alignment variants in the planning phase [40].

General transition curve with smooth curvature function, as proposed by Grabowski, has the following form:

$$y = x_Q (G_1 \tan u_p + G_2 \tan u_Q), \quad (4)$$

where:

$$G_1 = t - 20t^4 + 45t^5 - 36t^6 + 10t^7,$$

$$G_2 = -15t^4 + 39t^5 - 34t^6 + 10t^7.$$

and, according to Fig. 1:

$x_Q$  –  $x$ -coordinate of the point of tangency,  
 $u_p, u_Q$  – slopes of tangents at the points P and Q,  
 $t = x / x_p, t \in < 0; 1 >$ .

Between the points P and Q, at which the curvature is zero, there is only one maximum of curvature. According to [18], the maximum occurs at the point E, whose  $x$ -coordinate:  $x_E \in \left\langle \frac{2}{5}x_Q; \frac{3}{5}x_Q \right\rangle$ . Necessary condition is as follows:

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{\tan u_p}{\tan u_Q} \leq -\frac{3}{4}. \quad (5)$$

General transition curve with non-smooth curvature function, as proposed by Grabowski, has the following form:

$$y = x_Q (M_1 \tan u_p + M_2 \tan u_Q), \quad (6)$$

where:

$$M_1 = t - 6t^3 + 8t^4 - 3t^5,$$

$$M_2 = -4t^3 + 7t^4 - 3t^5.$$

The condition of existence of only one curvature maximum over the entire curve assumes the form of the following inequality:

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{\tan u_p}{\tan u_Q} \leq -\frac{2}{3}. \quad (7)$$

The corresponding  $x$ -coordinates are in the range of  $x_E \in \left\langle \frac{1}{3}x_Q; \frac{2}{3}x_Q \right\rangle$ .

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{\tan u_p}{\tan u_Q} \leq -\frac{2}{3}. \quad (7)$$

Odpowiadają temu wartości odciętej z zakresu:

$$x_E \in \left\langle \frac{1}{3}x_Q; \frac{2}{3}x_Q \right\rangle.$$

W pracy [19] przedstawiono modyfikacje krzywych (4) i (6) pod kątem ich użycia do projektowania łuków pionowych. Modyfikacja krzywej (4) ma postać:

$$y = x_Q (G_0 \tan \alpha + G_1 \tan u_p + G_2 \tan u_Q), \quad (8)$$

przy czym:

$\alpha$  – kąt pochylenia cięciwy łączącej punkty  
P( $x=0, y=0$ ) i Q( $x=x_Q, y=y_Q$ ),

$G_1, G_2$  – jak dla krzywej (4), natomiast

$$G_0 = 35t^4 - 84t^5 + 70t^6 - 20t^7.$$

Zgodnie z [2], odpowiednia modyfikacja krzywej (6) ma postać:

$$y = x_Q (M_0 \tan \alpha + M_1 \tan u_p + M_2 \tan u_Q), \quad (9)$$

przy czym:

$M_1, M_2$  – jak dla krzywej (6), natomiast

$$M_0 = 10t^3 - 15t^4 + 6t^5.$$

Człony  $M_0 \tan \alpha$  i  $G_0 \tan \alpha$  mają na celu ułatwienie projektowania łuków pionowych. Ich obecność w równaniach krzywych wynika bowiem z przyjętego położenia punktu Q na dowolnej wysokości względem osi odciętych, która – jak wynika z (8) lub (9) – wynosi  $y_Q = x_Q \tan \alpha$ . Dzięki temu, po wpisaniu krzywych (8) lub (9) między dwa prostoliniowe odcinki niwelety o dowolnych pochyleniach, wysokości poszczególnych punktów łuku w nadrzędnym układzie profilu podłużnego uzyskamy jako sumę wysokości punktu P oraz rzędnej  $y$  wynikającej z odpowiedniego równania krzywej. W odniesieniu do łuków poziomych modyfikacja ta ma mniejsze znaczenie. Z tego powodu w dalszym ciągu będziemy rozważać jedynie krzywe (4) i (6).

### 3. OGÓLNE KRZYWE PRZEJŚCIOWE Z SYMETRYCZNYM ROZKŁADEM KRZYWIZNY

Tradycyjne układy geometryczne w postaci „1. krzywa przejściowa – łuk kołowy – 2. krzywa przejściowa” lub „1. krzywa przejściowa – 2. krzywa przejściowa” mogą mieć symetryczny lub niesymetryczny rozkład krzywizny względem środka łuku. Częściej stosowane są układy symetryczne. W dalszych analizach będą więc rozpatrywane ogólne krzywe przejściowe z symetrycznym rozkładem krzywizny. Maksimum krzywizny

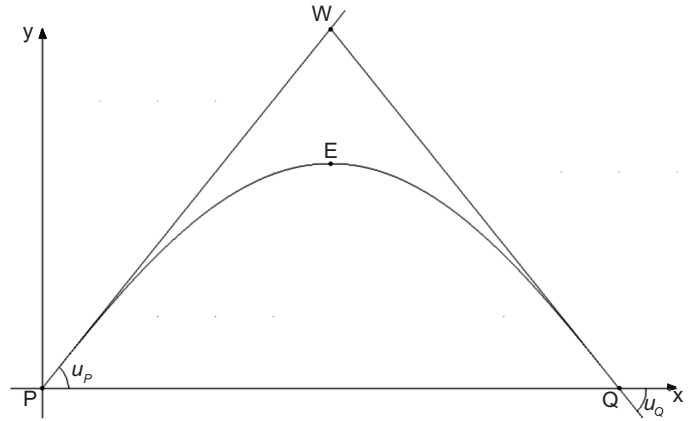


Fig. 1. General transition curve in a rectangular coordinate system

Rys. 1. Ogólna krzywa przejściowa w układzie współrzędnych prostokątnych

Modifications of the curves (4) and (6) intended for vertical curve design were given in the work [19]. Modification of the curve (4) has the form:

$$y = x_Q (G_0 \tan \alpha + G_1 \tan u_p + G_2 \tan u_Q), \quad (8)$$

where:

$\alpha$  – slope of the chord connecting the points  
P( $x=0, y=0$ ) and Q( $x=x_Q, y=y_Q$ ),

$G_1, G_2$  – as in (4), whereas

$$G_0 = 35t^4 - 84t^5 + 70t^6 - 20t^7.$$

According to [2], respective modification of (6) has the form:

$$y = x_Q (M_0 \tan \alpha + M_1 \tan u_p + M_2 \tan u_Q), \quad (9)$$

where:

$M_1, M_2$  – as in (6), whereas  $M_0 = 10t^3 - 15t^4 + 6t^5$ .

The terms  $M_0 \tan \alpha$  and  $G_0 \tan \alpha$  are meant to facilitate the design of vertical curves. Their use in the equations enables adoption of the location of the point Q at any chosen “elevation” above the x-axis, which – as visible in (8) and (9) – equals  $y_Q = x_Q \tan \alpha$ . Owing to this modification, after introducing curve (8) or (9) between two straight grade lines of any given slope, elevations of individual points on the curve expressed in the global coordinate system adopted for the entire profile will be obtained as the sum of the elevation of the point P and the y ordinate resulting from respective curve equation. However, this modification is of minor significance in the context of horizontal curves. Consequently, further analyses will be based on equations (4) and (6).

powinno więc wystąpić dla  $t=1/2$ . Niezbędnym warunkiem na to jest  $\tan u_p = \tan u_Q = \tan u$ . W tym przypadku równanie (4) przyjmie postać:

$$y = x_Q G \cdot \tan u, \quad (10)$$

gdzie:

$$G = t - 5t^4 + 6t^5 - 2t^6.$$

Na podstawie równania (6) otrzymamy natomiast:

$$y = x_Q M \cdot \tan u, \quad (11)$$

gdzie:

$$M = t - 2t^3 + t^4.$$

Ze znanego wzoru opisującego krzywiznę:

$$k(x) = \frac{1}{r} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad (12)$$

wynika, że warunek konieczny istnienia ekstremum krzywizny ma postać:

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0. \quad (13)$$

Pochodne  $y'$ ,  $y''$ , i  $y'''$  w przypadku równań (10) i (11) mają postaci podane w Tabl. 1.

Table 1. Derivatives of functions (10) and (11)  
Tablica 1. Pochodne funkcji (10) i (11)

Function Funkcja	Derivatives Pochodne
(10)	$y' = G' \tan u, \quad G' = 1 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5$
	$y'' = \frac{1}{x_Q} G'' \tan u, \quad G'' = -60t^2 + 120t^3 - 60t^4$
	$y''' = \frac{1}{x_Q^2} G''' \tan u, \quad G''' = -120t + 360t^2 - 120t^3$
(11)	$y' = M' \tan u, \quad M' = 1 - 6t^2 + 4t^3$
	$y'' = \frac{1}{x_Q} M'' \tan u, \quad M'' = -12t + 12t^2$
	$y''' = \frac{1}{x_Q^2} M''' \tan u, \quad M''' = -12 + 24t$

Zarówno w przypadku funkcji (10), jak i (11), dla  $t=1/2$  zachodzi  $y' = 0$  i  $y''' = 0$ . Z (13) wynika więc, że mamy do czynienia z ekstremum krzywizny.

Minimalny promień krzywizny dla  $t=1/2$  oznaczymy jako  $R_E$ . Na podstawie (12) możemy więc dla krzywych (10) i (11) zapisać odpowiednio:

$$\frac{1}{R_E^{(10)}} = \frac{1}{x_Q} |G''(t=1/2)| \tan u \quad (14)$$

### 3. GENERAL TRANSITION CURVES WITH SYMMETRICAL CURVATURE DISTRIBUTION

Traditional geometric systems in the form “1st transition curve – circular arc – 2nd transition curve” and “1st transition curve – 2nd transition curve” may have symmetrical or asymmetrical curvature distribution relative to curve mid-point. As symmetrical systems are used more frequently, further analyses will be focused on general transition curves with symmetrical curvature distribution. Hence, curvature maximum should occur at  $t=1/2$ , the necessary condition being:  $\tan u_p = \tan u_Q = \tan u$ . In this case, equation (4) assumes the form:

$$y = x_Q G \cdot \tan u, \quad (10)$$

where:

$$G = t - 5t^4 + 6t^5 - 2t^6.$$

Based on equation (6) we obtain:

$$y = x_Q M \cdot \tan u \quad (11)$$

where:

$$M = t - 2t^3 + t^4.$$

Taking into account the following generally known formula describing curvature

$$k(x) = \frac{1}{r} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad (12)$$

necessary condition for existence of an extremum of curvature assumes the form:

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0. \quad (13)$$

The  $y'$ ,  $y''$ , and  $y'''$  derivatives in the case of equations (10) and (11) have the forms given in Table 1.

Both in the case of function (10) and function (11),  $y' = 0$  and  $y''' = 0$  is true for  $t=1/2$ . It follows from (13) that it is an extremum of curvature.

The minimum radius of curvature at  $t=1/2$  will be designated as  $R_E$ . Based on (12), we obtain the following for curves (10) and (11), respectively:

$$\frac{1}{R_E^{(10)}} = \frac{1}{x_Q} |G''(t=1/2)| \tan u \quad (14)$$

and

$$\frac{1}{R_E^{(11)}} = \frac{1}{x_Q} |M''(t=1/2)| \tan u. \quad (15)$$

Since  $|G''(t=1/2)| = 15/4$  and  $|M''(t=1/2)| = 3$ :

oraz

$$\frac{1}{R_E^{(11)}} = \frac{1}{x_Q} |M''(t=1/2)| \tan u. \quad (15)$$

Ponieważ  $|G''(t=1/2)| = 15/4$  i  $|M''(t=1/2)| = 3$ , więc otrzymamy:

$$R_E^{(10)} = \frac{4}{15} x_Q \frac{1}{\tan u} \quad (16)$$

oraz

$$R_E^{(11)} = \frac{1}{3} x_Q \frac{1}{\tan u}. \quad (17)$$

Z wzorów (10) i (11) dla  $t = 1/2$  wynika też rzędna  $y_E$  punktu E:

$$y_E^{(10)} = \frac{11}{32} x_Q \tan u \quad (18)$$

oraz

$$y_E^{(11)} = \frac{5}{16} x_Q \tan u. \quad (19)$$

#### 4. PORÓWNANIE WYBRANYCH PARAMETRÓW ŁUKÓW TRADYCYJNYCH I OGÓLNYCH KRZYWYCH PRZEJŚCIOWYCH

Użycie ogólnych krzywych przejściowych może zapewnić większe możliwości dopasowania przebiegu łuku do ograniczeń terenowych. Aby to ocenić, porównamy rzędne  $y_E^{(10)}$  i  $y_E^{(11)}$  z odpowiednią rzędną  $y_E$  środka łuku w postaci tradycyjnej, tj. układu „1. krzywa przejściowa – łuk kołowy – 2. krzywa przejściowa”. Dodatkowo porównamy też promienie krzywizny poszczególnych łuków:  $R_E^{(10)}$ ,  $R_E^{(11)}$  i  $R_E$ . Przyjmujemy, że cięciwa wszystkich porównywanych łuków jest jednakowa i wynosi  $x_Q$ . Przy takim założeniu wyprowadzimy wzory opisujące  $y_E$  oraz  $R_E$ .

W przypadku łuków tradycyjnych rzędna  $y_E$  wynosi (Rys. 2):

$$y_E = \bar{Y} + \hat{Y}, \quad (20)$$

przy czym:

$\bar{Y}$  – rzędna końca kłotoidy w lokalnym układzie współrzędnych ogólnej krzywej przejściowej,

$\hat{Y}$  – rzędna środka łuku kołowego w lokalnym układzie współrzędnych łuku kołowego.

Podobne równanie obowiązuje dla kąta  $u$ :

$$u = \bar{u} + \hat{u}, \quad (21)$$

przy czym:

$\bar{u}$  – kąt zwrotu stycznej w końcowym punkcie kłotoidy,

$\hat{u}$  – kąt przypadający na połowę łuku kołowego.

Rzędną  $\hat{Y}$  wyrazimy jako:

$$R_E^{(10)} = \frac{4}{15} x_Q \frac{1}{\tan u} \quad (16)$$

and

$$R_E^{(11)} = \frac{1}{3} x_Q \frac{1}{\tan u}. \quad (17)$$

By substituting  $t = 1/2$  into equations (10) and (11) we also obtain the ordinate  $y_E$  of the point E:

$$y_E^{(10)} = \frac{11}{32} x_Q \tan u \quad (18)$$

and

$$y_E^{(11)} = \frac{5}{16} x_Q \tan u. \quad (19)$$

#### 4. COMPARISON OF SELECTED PARAMETERS OF TRADITIONAL CURVES AND GENERAL TRANSITION CURVES

Use of general transition curves may provide greater flexibility in adjusting horizontal alignment to difficult terrain conditions. In order to evaluate this flexibility, the  $y_E^{(10)}$  and  $y_E^{(11)}$  ordinates will be compared with corresponding middle ordinate  $y_E$  of a traditional horizontal curve in the form of “1st transition curve – circular arc – 2nd transition curve”. Additionally, the  $R_E^{(10)}$ ,  $R_E^{(11)}$  and  $R_E$  radii of curvature will be compared. Comparisons will be founded on the assumption that the chords of all the curves are identical and equal  $x_Q$ . Let us derive equations for  $y_E$  and  $R_E$  based on this assumption.

In the case of traditional curves, the  $y_E$  ordinate equals (Fig. 2):

$$y_E = \bar{Y} + \hat{Y}, \quad (20)$$

where:

$\bar{Y}$  – ordinate of the end point of the clothoid in the local coordinate system of the general transition curve,

$\hat{Y}$  – ordinate of the circular arc mid-point in the local coordinate system of the circular arc.

Similar equation is valid for the angle  $u$ :

$$u = \bar{u} + \hat{u}, \quad (21)$$

where:

$\bar{u}$  – deflection angle of tangent at the end point of the clothoid,

$\hat{u}$  – deflection angle corresponding to half of the circular arc.

The  $\hat{Y}$  ordinate will be expressed as:

$$\hat{Y} = R_E (1 - \cos \hat{u}). \quad (22)$$

Rzędną  $\bar{Y}$  końca klotoidy zapiszemy jako:

$$\bar{Y} = X_K \sin u - Y_K \cos u, \quad (23)$$

przy czym:

$X_K, Y_K$  – współrzędne końca klotoidy w lokalnym układzie współrzędnych klotoidy.

$$\hat{Y} = R_E (1 - \cos \hat{u}). \quad (22)$$

The ordinate of the end of the clothoid  $\bar{Y}$  will be expressed as:

$$\bar{Y} = X_K \sin u - Y_K \cos u, \quad (23)$$

where:

$X_K, Y_K$  – coordinates of the end point of the clothoid in the local coordinate system of the clothoid.

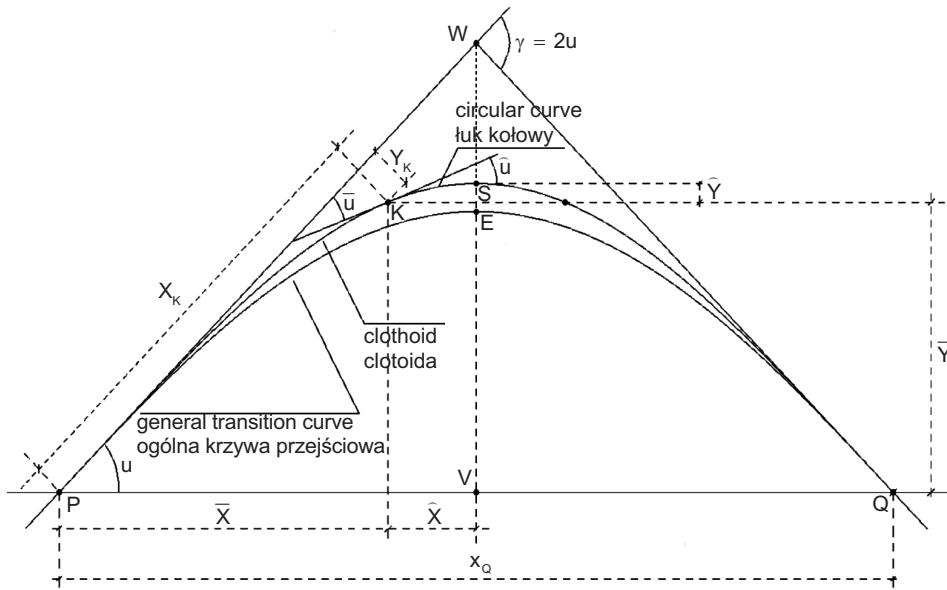


Fig. 2. Comparison of the general transition curve with the traditional curve (clothoid – circular curve – clothoid)  
Rys. 2. Porównanie ogólnej krzywej przejściowej z łukiem tradycyjnym (klotoida – łuk kołowy – klotoida)

Klotoida należy do rodziny krzywych, których krzywiznę można opisać następującym równaniem zaproponowanym w [36, 37]:

$$k(l) = \frac{1}{R} t^n, \quad (24)$$

gdzie:  $t = l / L$ ,

$L$  – całkowita długość krzywej,

$l \leq L$  – parametr naturalny,

$R$  – promień krzywizny w końcowym punkcie krzywej.

Przy  $n=1$  równanie (24) opisuje klotoidę o parametrze  $a = \sqrt{RL}$ . Zgodnie z [36, 37], współrzędne prostokątne krzywych (24) wynikają ze wzorów:

$$X = L \cdot \left\{ \begin{aligned} &t - \frac{1}{2!(n+1)^2(2n+3)} k^2 t^{2n+3} + \\ &+ \frac{1}{4!(n+1)^4(4n+5)} k^4 t^{4n+5} + \\ &- \frac{1}{6!(n+1)^6(6n+7)} k^6 t^{6n+7} + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$

Clothoid belongs to the family of curves whose curvature may be described by the following equation proposed in [36, 37]:

$$k(l) = \frac{1}{R} t^n, \quad (24)$$

where:  $t = l / L$ ,

$L$  – total length of the curve,

$l \leq L$  – natural parameter,

$R$  – radius of curvature at the end point.

For  $n=1$ , equation (24) describes a clothoid with  $a = \sqrt{RL}$ . According to [36, 37], rectangular coordinates of the family of curves based on equation (24) are expressed by the following equations:

$$X = L \cdot \left\{ \begin{aligned} &t - \frac{1}{2!(n+1)^2(2n+3)} k^2 t^{2n+3} + \\ &+ \frac{1}{4!(n+1)^4(4n+5)} k^4 t^{4n+5} + \\ &- \frac{1}{6!(n+1)^6(6n+7)} k^6 t^{6n+7} + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$



$$Y = L \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1!(n+1)(n+2)} kt^{n+2} + \\ - \frac{1}{3!(n+1)^3(3n+4)} k^3 t^{3n+4} + \\ + \frac{1}{5!(n+1)^5(5n+6)} k^5 t^{5n+6} + \\ - \frac{1}{7!(n+1)^7(7n+8)} k^7 t^{7n+8} + \dots \end{array} \right\}, \quad (26)$$

przy czym:  $k = L / R$ .

Dla kąta zwrotu stycznej obowiązuje równanie:

$$u = \frac{1}{n+1} kt^n. \quad (27)$$

Dla punktu końcowego, tj. dla  $t = l / L$ , z (27) wynika:

$$\bar{u} = \frac{L}{2R}. \quad (28)$$

Jeśli przyjmijemy  $n = 1$ ,  $t = 1$  i uwzględnimy (28), wówczas na podstawie (25) i (26) otrzymamy:

$$X_K = 2R\bar{u} \cdot A, \quad (29)$$

$$Y_K = 2R\bar{u} \cdot B, \quad (30)$$

przy czym:

$$A = 1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} \bar{u}^2 + \frac{1}{9 \cdot 4!} \bar{u}^4 - \frac{1}{13 \cdot 6!} \bar{u}^6 + \dots,$$

$$B = \frac{1}{3 \cdot 1!} \bar{u} - \frac{1}{7 \cdot 3!} \bar{u}^3 + \frac{1}{11 \cdot 5!} \bar{u}^5 - \frac{1}{15 \cdot 7!} \bar{u}^7 + \dots$$

Zgodnie z Rys. 2, odcięta środka łuku w układzie tradycyjnym powinna spełniać zależność:

$$\bar{X} + \hat{X} = \frac{1}{2} x_{\varrho}, \quad (31)$$

przy czym:

$\bar{X}$  – odcięta końca klotoidy w lokalnym układzie współrzędnych ogólnej krzywej przejściowej,

$\hat{X}$  – odcięta środka łuku kołowego w lokalnym układzie współrzędnych łuku kołowego.

Odcięte  $\bar{X}$  i  $\hat{X}$  możemy wyrazić następująco:

$$\bar{X} = X_K \cos u + Y_K \sin u, \quad (32)$$

$$\hat{X} = R_E \sin \hat{u}. \quad (33)$$

Jeśli uwzględnimy (29) i (30), to na podstawie (31) otrzymamy:

$$2R_E \bar{u} A \cos u + 2R_E \bar{u} B \sin u + R_E \sin \hat{u} = \frac{1}{2} x_{\varrho}. \quad (34)$$

$$Y = L \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1!(n+1)(n+2)} kt^{n+2} + \\ - \frac{1}{3!(n+1)^3(3n+4)} k^3 t^{3n+4} + \\ + \frac{1}{5!(n+1)^5(5n+6)} k^5 t^{5n+6} + \\ - \frac{1}{7!(n+1)^7(7n+8)} k^7 t^{7n+8} + \dots \end{array} \right\}, \quad (26)$$

whereas:  $k = L / R$ .

Deflection angle of tangent is expressed by:

$$u = \frac{1}{n+1} kt^n. \quad (27)$$

It follows from (27) that for the end point of clothoid, i.e. for  $t = l / L$ :

$$\bar{u} = \frac{L}{2R}. \quad (28)$$

Assuming  $n = 1$ ,  $t = 1$  and considering (28), we obtain the following equations from (25) and (26):

$$X_K = 2R\bar{u} \cdot A, \quad (29)$$

$$Y_K = 2R\bar{u} \cdot B, \quad (30)$$

where:

$$A = 1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} \bar{u}^2 + \frac{1}{9 \cdot 4!} \bar{u}^4 - \frac{1}{13 \cdot 6!} \bar{u}^6 + \dots,$$

$$B = \frac{1}{3 \cdot 1!} \bar{u} - \frac{1}{7 \cdot 3!} \bar{u}^3 + \frac{1}{11 \cdot 5!} \bar{u}^5 - \frac{1}{15 \cdot 7!} \bar{u}^7 + \dots$$

According to Fig. 2, mid-ordinate of the arc in the traditional geometric system should satisfy the relationship:

$$\bar{X} + \hat{X} = \frac{1}{2} x_{\varrho}, \quad (31)$$

where:

$\bar{X}$  –  $x$ -coordinate of the end point of the clothoid in the local coordinate system of the general transition curve,

$\hat{X}$  –  $x$ -coordinate of the circular arc mid-point in the local coordinate system of the circular arc.

The  $\bar{X}$  and  $\hat{X}$  coordinates may be expressed as:

$$\bar{X} = X_K \cos u + Y_K \sin u, \quad (32)$$

$$\hat{X} = R_E \sin \hat{u}. \quad (33)$$

Considering (29) and (30), we obtain the following from (31):

$$2R_E \bar{u} A \cos u + 2R_E \bar{u} B \sin u + R_E \sin \hat{u} = \frac{1}{2} x_{\varrho}. \quad (34)$$

Stąd wynika:

$$R_E = \frac{1}{2} \frac{x_Q}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \bar{u}}. \quad (35)$$

Dla  $\bar{u} = 0$  otrzymuje się więc:

$$R_E = \frac{x_Q}{2 \sin \bar{u}}. \quad (36)$$

W Tabl. 2 zestawiono wartości promieni  $R_E^{(10)}$ ,  $R_E^{(11)}$  i  $R_E$  wynikające z (16), (17) i (35). Z równań tych wynika, że poszczególne wartości promieni są proporcjonalne do  $x_Q$ . Zmiana  $x_Q$  powoduje odpowiednią, proporcjonalną zmianę promienia krzywizny. W związku z tym wszystkie obliczenia zostały wykonane przy założeniu, że  $x_Q = 1$ .

Table 2. Radii  $R_E$  for x-coordinate of  $x_Q = 1$   
Tablica 2. Promienie  $R_E$  dla odciętej  $x_Q = 1$

Angle / Kąt $u$ [°]	Curve / Krzywa (10)	Curve / Krzywa (11)	Clothoid + circular arc at the following values of $\bar{u}$ : Kłotoida + łuk kołowy przy następującej wartości $\bar{u}$ :							
			0	10	20	30	40	50	60	70
10	1.512	1.890	2.879	1.444	–	–	–	–	–	–
20	0.733	0.916	1.462	0.985	0.740	–	–	–	–	–
30	0.462	0.577	1.000	0.765	0.616	0.514	–	–	–	–
40	0.318	0.397	0.778	0.641	0.542	0.468	0.410	–	–	–
50	0.224	0.280	0.653	0.567	0.498	0.441	0.394	0.355	–	–
60	0.154	0.192	0.577	0.522	0.473	0.429	0.391	0.358	0.328	–
70	0.070	0.121	0.532	0.498	0.464	0.431	0.400	0.371	0.345	0.321

Podane wartości pokazują, że przy jednakowej wartości  $x_Q$  łuki tradycyjne (przy  $\bar{u} = 0$  tożsame z łukami kołowymi) charakteryzują się większym promieniem krzywizny niż ogólne krzywe przejściowe (10) i (11). Jeśli chodzi o bikłotoidę ( $u = \bar{u}$ ), większe promienie niż dla ogólnych krzywych przejściowych występują przy kątach  $u > 10^\circ$  dla krzywych (10) oraz kątach  $u > 30^\circ$  dla krzywych (11). Również w przypadku układów kłotoida – łuk kołowy – kłotoida ( $u > \bar{u}$ ), odpowiednie promienie krzywizny są większe niż dla ogólnych krzywych przejściowych.

Przyjmując  $R_E^{(10)} = R_E^{(11)} = R_E = 1$ , wyznaczono również wartości  $x_Q$ , które wynikają dla poszczególnych łuków z równań (16), (17) i (35). Zamieszczono je w Tabl. 3. Z podanych tam wartości wynika, że długości cięciwy  $x_Q$  ogólnych krzywych przejściowych są znacząco większe niż odpowiednie cięciwy łuków kołowych ( $\bar{u} = 0$ ) przy takim samym promieniu. W porównaniu z bikłotoidą ( $u = \bar{u}$ ) cięciwy  $x_Q$  ogólnych krzywych przejściowych również są generalnie dłuższe: przy  $u > 10^\circ$  dla krzywych (10) i  $u > 30^\circ$  dla krzywych (11). Dłuższe cięciwy ogólnych krzywych przejściowych (10) i (11) występują również w porównaniu z układami kłotoida – łuk kołowy – kłotoida ( $u > \bar{u}$ ).

Consequently:

$$R_E = \frac{1}{2} \frac{x_Q}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \bar{u}}. \quad (35)$$

Therefore, for  $\bar{u} = 0$ , equation (35) yields:

$$R_E = \frac{x_Q}{2 \sin \bar{u}}. \quad (36)$$

Table 2 presents a comparison of the  $R_E^{(10)}$ ,  $R_E^{(11)}$  and  $R_E$  radii resulting from (16), (17) and (35). As the equations imply, individual radius values are proportional to  $x_Q$ . A change in  $x_Q$  causes a proportional change in the radius of curvature. Therefore, all the calculations were performed for  $x_Q = 1$ .

The given values indicate that for identical  $x_Q$  the traditional curves (which comprise only a circular arc when  $\bar{u} = 0$ ) are characterized by greater radius of curvature than general transition curves (10) and (11). For the case of a biclothoid ( $u = \bar{u}$ ), greater radii in comparison with general transition curves (10) and (11) may be noted when  $u > 10^\circ$  and  $u > 30^\circ$ , respectively. In the case of “clothoid – circular arc – clothoid” systems ( $u > \bar{u}$ ) corresponding radii of curvature are also greater than for general transition curves.

Assuming  $R_E^{(10)} = R_E^{(11)} = R_E = 1$  in turn, the resultant values of  $x_Q$  were calculated for individual curves using the equations (16), (17) and (35). The results are presented in Table 3. The values indicate that the length of the chord  $x_Q$  of a general transition curve is considerably greater than the corresponding length of the chord of a circular arc ( $\bar{u} = 0$ ) with the same radius. In comparison with a biclothoid ( $u = \bar{u}$ ), the chords  $x_Q$  of general transition curves are also generally longer: at  $u > 10^\circ$  for (10) and at  $u > 30^\circ$  for (11). Longer chords of the general transition curves (10) and (11) are also observed in comparisons with “clothoid – circular arc – clothoid” systems ( $u > \bar{u}$ ).

Table 3. Chords  $x_o$  for radius of curvature  $R_E = 1$   
 Tablica 3. Cięciwy  $x_o$  dla promienia krzywizny  $R_E = 1$

Angle / Kąt $u$ [°]	Curve / Krzywa (10)	Curve / Krzywa (11)	Clothoid + circular arc at the following values of $\bar{u}$ : Klotoida + łuk kołowy przy następującej wartości $\bar{u}$ :							
			0	10	20	30	40	50	60	70
10	0.661	0.529	0.347	0.692	–	–	–	–	–	–
20	1.365	1.092	0.684	1.015	1.351	–	–	–	–	–
30	2.165	1.732	1.000	1.307	1.622	1.944	–	–	–	–
40	3.146	2.517	1.286	1.559	1.844	2.139	2.441	–	–	–
50	4.469	3.575	1.632	1.764	2.010	2.268	2.537	2.815	–	–
60	6.495	5.196	1.732	1.915	2.115	2.329	2.557	2.797	3.046	–
70	10.303	8.242	1.879	2.008	2.155	2.319	2.499	2.694	2.900	3.117

Na podstawie (35), równania (29) i (30) zapiszemy odpowiednio jako:

$$X_K = \frac{x_o \bar{u} A}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}} \quad (37)$$

oraz

$$Y_K = \frac{x_o \bar{u} B}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}}. \quad (38)$$

Jeśli uwzględnimy (37) i (38), to na podstawie (23) wyrazimy rzędną  $\bar{Y}$  jako:

$$\bar{Y} = \frac{x_o \bar{u}}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}} (A \sin u - B \cos u). \quad (39)$$

Rzędną  $\hat{Y}$  łuku kołowego w lokalnym układzie współrzędnych łuku kołowego, która jest opisana równaniem (22), po uwzględnieniu (35) zapiszemy jako:

$$\hat{Y} = \frac{1}{2} \frac{x_o (1 - \cos \hat{u})}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}}. \quad (40)$$

Na podstawie (20), (39) i (40) otrzymamy ostatecznie:

$$y_E = x_o \frac{1}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}} \cdot \left[ \bar{u}(A \sin u - B \cos u) - \frac{1}{2}(1 - \cos \hat{u}) \right]. \quad (41)$$

Porównanie wartości  $y_E^{(10)}$ ,  $y_E^{(11)}$  i  $y_E$  wynikających ze wzorów (18), (19) i (41) przy  $x_o = 1$  przedstawiono w Tabl. 4. Z uwagi na mniejsze promienie ogólnych krzywych przejściowych w porównaniu z łukiem kołowym (Tabl. 1) przy takiej samej wartości  $x_o$ , można było przypuszczać, że w przypadku tych krzywych wystąpią odpowiednio większe wartości rzędnych w punkcie środkowym. Zostało to potwierdzone w Tabl. 4. Z podanych tam wartości wynika też, że rzędne w środku łuku krzywych (10) i (11) są większe lub znacząco większe (przy większych kątach  $u$ ) niż rzędne  $y_E$

Based on (35), equations (29) and (30) may be expressed as:

$$X_K = \frac{x_o \bar{u} A}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}} \quad (37)$$

and

$$Y_K = \frac{x_o \bar{u} B}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}}. \quad (38)$$

Considering (37) and (38), formula (23) for the  $\bar{Y}$  ordinate assumes the form:

$$\bar{Y} = \frac{x_o \bar{u}}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}} (A \sin u - B \cos u). \quad (39)$$

Considering (35), ordinate  $\hat{Y}$  of the circular arc in the local coordinate system of the circular arc, as given in equation (22), may be expressed as:

$$\hat{Y} = \frac{1}{2} \frac{x_o (1 - \cos \hat{u})}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}}. \quad (40)$$

Ultimately, based on (20), (39) and (40) we obtain:

$$y_E = x_o \frac{1}{2\bar{u}(A \cos u + B \sin u) + \sin \hat{u}} \cdot \left[ \bar{u}(A \sin u - B \cos u) - \frac{1}{2}(1 - \cos \hat{u}) \right]. \quad (41)$$

Table 4 presents a comparison of the  $y_E^{(10)}$ ,  $y_E^{(11)}$  and  $y_E$  ordinates resulting from equations (18), (19) and (41) for  $x_o = 1$ . It was expected that general transition curves should display greater values of mid-ordinates than circular arcs, since the values of their radius were less than those of circular arcs at identical  $x_o$  (Table 1). These expectations are confirmed by Table 4. The values given in the table also indicate that mid-ordinates of the curves (10) and (11) are also greater or considerably greater (at greater  $u$  angles) than  $y_E$  ordinates of a curve in the form of

łuku w postaci kłotoida – łuk kołowy – kłotoida ( $u > \bar{u}$ ). W porównaniu z bikłotoidą ( $u = \bar{u}$ ) rzędne  $y_E^{(10)}$  są większe przy kątach  $u > 10^\circ$ , a rzędne  $y_E^{(11)}$  przy  $u > 30^\circ$ .

a “clothoid – circular arc – clothoid” system ( $u > \bar{u}$ ). In the case of a biclothoid ( $u = \bar{u}$ ), the  $y_E^{(10)}$  ordinates are greater for  $u > 10^\circ$  and  $y_E^{(11)}$  ordinates are greater for  $u > 30^\circ$ .

Table 4. Ordinates of the point E for x-coordinate of  $x_Q = 1$   
Tablica 4. Rzędne punktu E dla odciętej  $x_Q = 1$

Angle / Kąt $u$ [°]	Curve / Krzywa (10)	Curve / Krzywa (11)	Clothoid + circular arc at the following values of $\bar{u}$ : Kłotoida + łuk kołowy przy następującej wartości $\bar{u}$ :							
			0	10	20	30	40	50	60	70
10	0.040	0.029	0.015	0.040	–	–	–	–	–	–
20	0.171	0.124	0.060	0.115	0.160	–	–	–	–	–
30	0.430	0.313	0.134	0.217	0.290	0.354	–	–	–	–
40	0.908	0.660	0.234	0.342	0.442	0.533	0.614	–	–	–
50	1.831	1.332	0.357	0.488	0.611	0.726	0.832	0.930	–	–
60	3.867	2.813	0.500	0.648	0.791	0.927	1.055	1.175	1.287	–
70	9.731	7.077	0.658	0.820	0.978	1.130	1.276	1.415	1.547	1.671

Powyższe analizy pokazują, że – zależnie od wartości kąta  $u$  – podstawowe parametry geometryczne ogólnych krzywych przejściowych mogą różnić się w istotny sposób od ich odpowiedników w przypadku łuków kołowych z kłotoidami. W rezultacie ogólne krzywe przejściowe poszerzają gamę narzędzi geometrycznych do ewentualnego użycia w projektowaniu krzywoliniowych odcinków tras, a wynikiem tego może być użyteczność tych krzywych w trasowaniu w określonych warunkowaniach lub ograniczeniach terenowych. Potencjalne korzyści związane z użyciem ogólnych krzywych przejściowych ilustruje poniższy przykład.

## 5. PRZYKŁAD – WYZNACZENIE PRZEJŚCIA KRZYWOLINIOWEGO MIĘDZY DWOMA KIERUNKAMI PROSTYMI Z UŻYCIEM OGÓLNYCH KRZYWYCH PRZEJŚCIOWYCH

Rozważmy problem wpisania przejścia krzywoliniowego między dwa kierunki proste trasy przecinające się w punkcie W (Rys. 3). Przyjmijmy następujące założenia:

- kąt zwrotu trasy  $\gamma = 2u = 40^\circ$ ,
- projektowany promień minimalny łuku  $R = 500,00$  m.

Jak wynika z układu warstw na Rys. 3, niezależnie od kierunku spadku terenu, w przypadku przebiegu niwelety zbliżonego do poziomego, wpisanie łuku poziomego między dwie proste przecinające się w punkcie W może wymagać mniejszych robót ziemnych, jeśli położenie środka łuku oddalałoby się od wierzchołka W. Dlatego zasadne jest użycie takich krzywych, które to zadanie ułatwią. Jak wynika z wcześniejszych analiz, mogą nimi być ogólne krzywe przejściowe.

The above analyses indicate that – depending on the value of the  $u$  angle – the basic geometric parameters of general transition curves may significantly differ from the corresponding parameters of circular arcs with clothoids. Consequently, general transition curves supplement the range of geometric tools for potential use in the design of curvilinear road sections. Therefore, they may be useful in road alignment design in set terrain conditions or constraints. Potential advantages of usage of general transition curves will be illustrated by the example given below.

## 5. EXAMPLE – DETERMINATION OF CURVILINEAR TRANSITION BETWEEN TWO TANGENTS USING GENERAL TRANSITION CURVES

Let us consider the problem of introduction of a curvilinear transition between two straight road sections, with tangents meeting at the point of intersection W (Fig. 3). Let us adopt the following assumptions:

- intersection angle  $\gamma = 2u = 40^\circ$ ,
- designed minimum radius of the curve  $R = 500.00$  m.

As shown by the contour lines visible in Fig. 3 (regardless of the direction of the slope), when the longitudinal grade of the road is approximately horizontal, introduction of a horizontal curve between two tangents intersecting at W will generate less earthworks if the apex distance of the curve is greater. Therefore, it is advisable to use curves that facilitate this task; as shown by the above analyses, such curves include general transition curves.

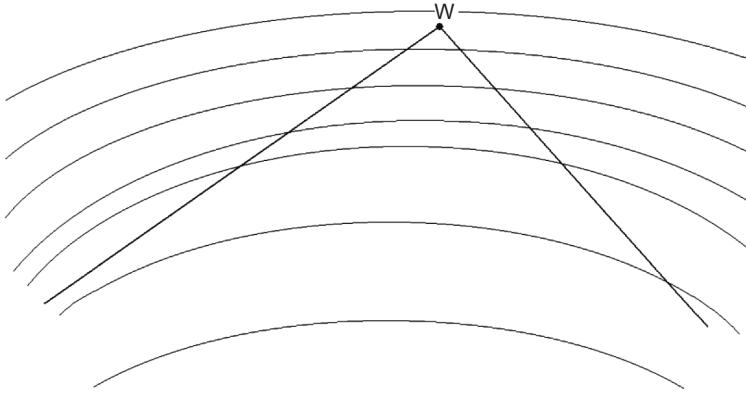


Fig. 3. Terrain conditions influencing the amount of earthworks  
Rys. 3. Uwarunkowania terenowe wpływające na ilość robót ziemnych

Wpisanie ogólnej krzywej przejściowej (10) lub (11) między dwa kierunki proste o znanym kącie zwrotu trasy wymaga określenia położenia początku (P) i końca (Q) łuku. Jest ono określone przez długość stycznej  $WP$  lub  $WQ$ , która – na podstawie Rys.2 – wynosi:

$$WP = WQ = \frac{1}{2} \frac{x_o}{\cos u}. \quad (42)$$

Z Rys.2 wynika też, że odległość wierzchołka trasy (W) od środka łuku ogólnej krzywej przejściowej (E) wynosi:

$$WE = WV - y_E. \quad (43)$$

Po wyznaczeniu położenia punktów P oraz Q współrzędne punktów pośrednich łuku w lokalnym układzie współrzędnych (z początkiem w punkcie P i osią odciętych przechodzącą przez punkt Q) wynikają z równań (10) i (11). Otrzymane wartości niezbędne do wyznaczenia krzywych (10) i (11) zamieszczono w Tabl. 5.

Table 5. Data for determination of general transition curves (10) and (11)

Tablica 5. Dane do wyznaczenia ogólnych krzywych przejściowych (10) i (11)

Curve / Krzywa (10)			Curve / Krzywa (11)		
Coordinate / Odcięta $x_o$ [m]	682.44		Coordinate / Odcięta $x_o$ [m]	545.96	
Tangent length / Długość stycznej $WP = WQ$ [m]	363.12		Tangent length / Długość stycznej $WP = WQ$ [m]	290.50	
Apex distance / Odległość wierzchołka $WE$ [m]	43.88		Apex distance / Odległość wierzchołka $WE$ [m]	41.32	
Coordinates / Współrzędne			Coordinates / Współrzędne		
$t$	$x$ [mm]	$y$ [m]	$t$	$x$ [mm]	$y$ [m]
0.1	68.24	24.73	0.1	54.60	19.49
0.2	136.49	48.14	0.2	109.19	36.88
0.3	204.73	67.72	0.3	163.79	50.49
0.4	272.98	80.79	0.4	218.38	59.14
0.5	341.22	85.38	0.5	272.98	62.10
0.6	409.47	80.79	0.6	327.57	59.14
0.7	477.71	67.72	0.7	382.17	50.49
0.8	545.96	48.14	0.8	436.76	36.88
0.9	614.20	24.73	0.9	491.36	19.49
1.0	682.44	0.00	1.0	545.96	0.00

In order to introduce a general transition curve given by equation (10) or (11) between two tangents with known intersection angle, one should determine the point of curvature (P) and the point of tangency (Q). Their location is determined by tangent length  $WP$  and  $WQ$ , which – based on Fig. 2 – equals:

$$WP = WQ = \frac{1}{2} \frac{x_o}{\cos u}. \quad (42)$$

It is also visible from Fig. 2 that the distance between the intersection point W and the mid-point of the curve E (the apex distance) equals:

$$WE = WV - y_E. \quad (43)$$

Upon determination of the points P and Q, coordinates of intermediate points of the curve in the local coordinate system (with origin in P and  $x$ -axis passing through Q) may be obtained from equations (10) and (11). The determined values that describe the curves (10) and (11) are presented in Table 5.

W celu porównania warto też wyznaczyć dane niezbędne do wyznaczenia układu w postaci łuku kołowego z symetrycznymi kłotoidami. W związku z tym przyjmiemy parametr kłotoidy  $a = 300,00$  m jako wartość z przedziału  $167 \leq a \leq 417$  określonego z zastosowaniem znanych zasad doboru parametru kłotoidy (przedstawionych np. w [37]).

Na wstępie można dodać, że – z uwagi na symetrię ww. układu geometrycznego względem punktu S – obliczenie niezbędnych danych można ograniczyć jedynie do połowy całego łuku. Stosując powszechnie znane wzory, otrzymuje się następujące dane do wyznaczenia kłotoidy:

- długość kłotoidy  $L = 180,00$  m,
- kąt zwrotu stycznej w punkcie końcowym kłotoidy  $\tau = 10,313^\circ$ ,
- współrzędne końca kłotoidy  $X = 179,42$  m oraz  $Y = 10,78$  m,
- odsunięcie koła krzywizny od stycznej głównej  $H = 2,70$  m,
- współrzędne środka koła krzywizny w punkcie końcowym krzywej  $X_S = 89,91$  m oraz  $Y_S = 502,70$  m,
- długość długiej stycznej  $T_d = 120,18$  m,
- długość krótkiej stycznej  $T_k = 60,21$  m,
- odległość wierzchołka kąta załamania trasy od rzutu środka koła krzywizny na ramię tego kąta  $T_s = 182,97$  m,
- długość stycznej całkowitej  $T_c = 272,88$  m.

Ponadto, ograniczając ilość punktów pośrednich do  $n = 9$  (na potrzeby ilustracji przykładu), otrzymamy wartości potrzebne do wyznaczenia kłotoidy metodą rzędnych od stycznej głównej (Tabl. 6).

Dane dotyczące łuku kołowego między kłotoidami są zaś następujące:

- kąt środkowy przypadający na łuk kołowy  $\alpha = 19,374^\circ$ ,
- odległość wierzchołka kąta zwrotu trasy od środka łuku kołowego  $Z = 34,96$  m,
- długość łuku kołowego między kłotoidami  $\widehat{L} = 169,07$  m.

Uzupełnienie stanowią dane do wytyczenia punktów pośrednich połowy łuku kołowego metodą rzędnych od stycznej w punkcie końcowym kłotoidy, przy czym na potrzeby ilustracji przykładu ograniczono ilość tych punktów do  $n = 4$  (Tabl. 6).

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na odległość wierzchołka, która wynosi 34,96 m i jest mniejsza odpowiednio o 8,92 m oraz 6,36 m niż odległość  $WE$  dla krzywych (10) i (11). Biorąc pod uwagę możliwość zmniejszenia w ten sposób ilości robót ziemnych, stanowi to potwierdzenie korzyści z użycia

For comparative purposes, it is also advisable to calculate data describing a system comprised of a circular arc with symmetrical clothoids. Therefore, let us assume clothoid parameter  $a = 300.00$  m, which is a value in the range of  $167 \leq a \leq 417$ , based on the known principles of clothoid parameter selection (presented in e.g. [37]).

Considering the fact that the analyzed geometric system is symmetrical, calculations may be limited to one half of the curve, up to its mid-point. Based on the generally known equations, the following data describing the clothoid was obtained:

- clothoid length  $L = 180.00$  m,
- tangent deflection angle at the end point of the clothoid  $\tau = 10.313^\circ$ ,
- coordinates of the end point of the clothoid  $X = 179.42$  m and  $Y = 10.78$  m,
- offset of the curvature circle from the principal tangent  $H = 2.70$  m,
- coordinates of the center of curvature for the end point of the transition curve  $X_S = 89.91$  m and  $Y_S = 502.70$  m,
- length of the long tangent of the clothoid  $T_d = 120.18$  m,
- length of the short tangent of the clothoid  $T_k = 60.21$  m,
- distance between the vertex of the deflection angle and the projection of the center of curvature on the ray of this angle  $T_s = 182.97$  m,
- length of the total tangent  $T_c = 272.88$  m.

Moreover, limiting the number of intermediate points to  $n = 9$  (for illustrative purposes), we obtain the values necessary for describing the clothoid with ordinates from the principal tangent (Table 6).

The data describing the circular arc section between clothoids is as follows:

- central angle corresponding to the circular arc  $\alpha = 19.374^\circ$ ,
- distance between the intersection of the tangents and the mid-point of the circular arc (apex distance)  $Z = 34.96$  m,
- length of circular arc between clothoids  $\widehat{L} = 169.07$  m.

The data are supplemented by values necessary for setting out intermediate points of the circular arc up to its mid-point, using ordinates from the tangent line drawn at the end of the clothoid. For illustrative purposes, the number of points was limited to  $n = 4$  (Table 6).

It is noteworthy that the apex distance of the circular arc equals 34.96 m, which is less by 8.92 m and 6.36 m than the  $WE$  distance of curves (10) and (11), respectively.

ogólnych krzywych przejściowych w uwarunkowaniach terenowych, jakie orientacyjnie ilustruje Rys. 3.

Ponadto, porównując zakres niezbędnych danych do wyznaczenia całego przejścia krzywoliniowego między dwiema prostymi, należy stwierdzić, że również pod tym względem ogólne krzywe przejściowe są korzystniejsze niż łuk kołowy z symetrycznymi kłotoidami. Wynika to z faktu, że ogólne krzywe przejściowe opisują całe przejście krzywoliniowe między dwiema prostymi za pomocą jednego równania.

Table 6. Data for determination of the circular arc with clothoids

Tablica 6. Dane do wyznaczenia łuku kołowego z kłotoidami

Data for the clothoid / Dane dla kłotoidy			Data for the circular arc / Dane dla łuku kołowego		
Point No. Nr punktu	X-coordinate [m] Odcięta	Ordinate [m] Rzędna	Point No. Nr punktu	X-coordinate [m] Odcięta	Ordinate [m] Rzędna
1	20.00	0.01	1	19.99	0.40
2	40.00	0.12	2	39.96	1.60
3	60.00	0.40	3	59.86	3.60
4	79.99	0.95	4	79.66	6.39
5	99.97	1.85			
6	119.92	3.20			
7	139.83	5.08			
8	159.68	7.57			
9	179.42	10.78			

## 6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W artykule przeanalizowano dwa rozwiązania ogólnych krzywych przejściowych na tle następujących tradycyjnych układów geometrycznych:

- łuk kołowy,
- 1. krzywa przejściowa – 2. krzywa przejściowa,
- 1. krzywa przejściowa – łuk kołowy – 2. krzywa przejściowa.

Celem artykułu była weryfikacja użyteczności ogólnych krzywych w trasowaniu przejść krzywoliniowych między dwoma kierunkami prostoliniowymi. Przeprowadzone analizy wykazały, że ogólne krzywe przejściowe mogą stanowić alternatywę dla ww. tradycyjnych układów geometrycznych.

Dużą zaletą praktyczną ogólnych krzywych przejściowych jest możliwość opisu całego przejścia krzywoliniowego między dwiema prostymi za pomocą jednego równania. W zauważalnym stopniu przyczynia się to do redukcji zakresu obliczeń i ilości danych niezbędnych do wyznaczenia przebiegu łuku w terenie.

Taking into account the possibility of reducing earthworks, it confirms the advantages of using general transition curves in terrain conditions schematically illustrated in Fig. 3.

Moreover, comparing the scope of data required to set out the entire curvilinear transition between two tangents, general transition curves are also more advantageous than the system comprising a circular arc with symmetrical clothoids. This is due to the fact that general transition curves describe the entire curvilinear transition between the two straight sections using a single equation.

## 6. SUMMARY AND CONCLUSIONS

The article presented an analysis of two general transition curve solutions and their comparison with the following traditional geometric systems:

- circular arc,
- 1st transition curve – circular arc – 2nd transition curve,
- 1st transition curve – 2nd transition curve.

The aim of the article was to verify the usability of general transition curves in shaping of horizontal curve geometry between two straight road sections. The analyses indicated that general transition curves may serve as an alternative to the above-mentioned traditional geometric systems.

A considerable practical advantage of general transition curves lies in the possibility of description of the entire curvilinear transition between two tangents using only a single equation. It notably reduces the scope of calculations and data required to set out the curve in field.

The performed comparative analyses indicated that – for an identical adopted minimum radius of curvature – the

Przeprowadzone analizy porównawcze wykazały, że – przy założeniu takiego samego minimalnego promienia krzywizny – przebieg łuku w przypadku ogólnych krzywych przejściowych różni się w istotny sposób od przebiegu łuków w postaci ww. tradycyjnych układów geometrycznych. Generalnie można stwierdzić, że geometria łuków utworzonych przez ogólne krzywe przejściowe różni się od geometrii łuków tradycyjnych tym bardziej, im większy jest kąt zwrotu trasy.

Wspomniane różnice geometrii analizowanych układów geometrycznych utworzonych przez ogólne krzywe przejściowe w porównaniu z łukami tradycyjnymi powodują, że w rezultacie uzyskuje się większą swobodę kształtowania przebiegu przejścia krzywoliniowego między dwoma kierunkami prostymi i jego dopasowania do określonych uwarunkowań lub ograniczeń terenowych. Możliwość wyboru jednego spośród dostępnych narzędzi projektowych o różnej geometrii ułatwia bowiem dopasowanie przebiegu trasy do wspomnianych ograniczeń.

Z uwagi na to, że na łukach o dużych promieniach nie ma potrzeby stosowania poszerzenia jezdni, a krawędzie jezdni mogą być trasowane przez odłożenie połowy szerokości na lewo i na prawo od osi opisanej równaniem użytej ogólnej krzywej przejściowej, również w tym kontekście ogólne krzywe przejściowe mogą stanowić użyteczną alternatywę dla tradycyjnych układów geometrycznych stosowanych w trasowaniu dróg.

W tym miejscu warto wspomnieć, że spotyka się opinie, zgodnie z którymi krzywe o zmiennej krzywiznie powinny być możliwie krótkie; przekonanie to opiera się na argumentcie, że długie krzywe są uciążliwe dla kierowców, gdyż wymagają ciągłej zmiany kąta skrętu kół, a jazda po łuku jest łatwiejsza ze stałym kątem skrętu kół. Wydaje się jednak, że może to mieć uzasadnienie jedynie teoretyczne. W praktyce nie ulega zaś wątpliwości, że podczas jazdy wymagana jest ciągła interakcja kierowca-układ kierowniczy, niezależnie od krzywizny toru pojazdu. Jest to szczególnie istotne w przypadku większych prędkości ruchu.

Potencjalnym polem zastosowań ogólnych krzywych przejściowych może być również trasowanie dróg szynowych. Można też nadmienić, że wątpliwości i dyskusyjne kwestie dotyczące percepcji i potencjalnych uciążliwości dla kierujących pojazdami nie odnoszą się do dróg szynowych, gdyż tutaj pojazd porusza się po torze wymuszonym.

## PRZYJĘTE OZNACZENIA

W artykule użyto następujących oznaczeń:

$k$  – krzywizna w dowolnym punkcie krzywej przejściowej,

shape of general transition curves differs significantly from the shape of traditional geometric systems. In general, the greater the central angle of the entire curve, the greater the difference in geometry between traditional curves and those created using general transition curves.

The mentioned differences in geometry provide greater flexibility in shaping of the curvilinear transition between two straight sections and its adjustment to terrain conditions and constraints. Selection from a wider range of available geometric design tools facilitates adjustment of road alignment to such spatial constraints.

On horizontal curves with large radius values there is no need to widen the road and road edges may be simply set out by offsetting half of the road width both left and right of the alignment axis described by the general transition used. Also in this context, general transition curves may serve as a valid alternative to traditional geometric systems used in road alignment design.

It seems worthwhile to address the opinions that are sometimes expressed; it is sometimes claimed that curves with variable curvature should be as short as possible. These opinions are based on the argument that long transition curves are inconvenient for the drivers, forcing them to gradually change the wheel angle over a longer road segment instead of performing the turn at a constant wheel angle. It seems, however, that such concerns may be justified only in theory. In practice it is obvious that the driver is always forced to actively interact with the steering system, regardless of the curvature of the road section. It is particularly important at greater vehicle speeds.

General transition curves may be potentially used in railroad alignment design as well. Obviously, in this case the doubts and concerns regarding the perception and convenience of the driver are not applicable, as the vehicle is guided by the rails along a forced path

## DESIGNATIONS USED

The following designations were used in the article:

$k$  – curvature at a given point of the transition curve,

$r$  – radius of curvature at a given point of the transition curve,

$R$  – the designed minimum radius of curvature,

$l$  – natural parameter,

$L$  – total length of the transition curve,

$u$  – deflection angle of the tangent to the curve / slope of the tangent to the curve,



- $r$  – promień krzywizny w dowolnym punkcie krzywej przejściowej,
- $R$  – projektowany minimalny promień krzywizny,
- $l$  – parametr naturalny,
- $L$  – całkowita długość krzywej przejściowej,
- $u$  – kąt zwrotu stycznej do krzywej / kąt nachylenia stycznej do krzywej,
- $u_P$  – kąt nachylenia stycznej w punkcie początkowym P ogólnej krzywej przejściowej,
- $u_Q$  – kąt nachylenia stycznej w punkcie końcowym Q ogólnej krzywej przejściowej,
- $\alpha$  – kąt nachylenia cięciwy łączącej punkty P i Q,
- $x_Q$  – odcięta końcowego punktu Q ogólnej krzywej przejściowej,
- $t = x / x_Q$  – parametr  $t \in < 0; 1 >$  opisujący położenie punktu na ogólnej krzywej przejściowej,
- $x_E$  – odcięta punktu E ogólnej krzywej przejściowej przy  $t = 0,5$ ,
- $y_E$  – rzędna punktu E ogólnej krzywej przejściowej o odciętej  $x_E$ ,
- $R_E$  – promień krzywizny w punkcie E ogólnej krzywej przejściowej o odciętej  $x_E$ .
- $u_P$  – slope of the tangent at the point of curvature P of the general transition curve,
- $u_Q$  – slope of the tangent at the point of tangency Q of the general transition curve,
- $\alpha$  – slope of the chord connecting the points P and Q,
- $x_Q$  – x-coordinate of the point of tangency Q of the general transition curve,
- $t = x / x_Q$  – parameter  $t \in < 0; 1 >$  describing the location of the point on the general transition curve,
- $x_E$  – x-coordinate of the point E of the general transition curve for  $t = 0.5$ ,
- $y_E$  – ordinate of the point E of the general transition curve for the x-coordinate  $x_E$ ,
- $R_E$  – radius of curvature at the point E of the general transition curve for the x-coordinate  $x_E$ .

## BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Lipiński M.*: Geometria i tyczenie tras drogowych, w: Geodezja inżynierska, tom 3, Polskie Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych im. Eugeniusza Romera, Warszawa-Wrocław, 1993
- [2] *Przewłocki S.*: Geodezja inżyniersko-drogowa. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000
- [3] *Rogers M.*: Highway engineering. Blackwell Publishing, Oxford, 2003
- [4] *Brockenbrough R.L.* (Ed.): Highway engineering handbook. McGraw-Hill, New York, 2009
- [5] *Wolhuter K.M.*: Geometric design of roads handbook. CRC Press, Taylor & Francis, London, 2015
- [6] *Rogers M., Enright B.*: Highway engineering. John Wiley & Sons Inc., New York, 2016
- [7] *Kobryń A.*: Krzywe przejściowe w trasowaniu dróg – teoria i praktyka. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2023
- [8] *Vázquez-Méndez M.E., Casal G.*: The clothoid computation: a simple efficient numerical algorithm. Journal of Surveying Engineering, **142**, 3, 2016, ID article: 04016005:1-9, DOI: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000177
- [9] *Casal G., Santamarina D., Vázquez-Méndez M.E.*: Optimization of horizontal alignment geometry in road design and reconstruction. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, **74**, 2017, 261-274, DOI: 10.1016/j.trc.2016.11.019
- [10] *Vázquez-Méndez M.E., Casal G., Ferreiro J.B.*: Numerical computation of egg and double-egg curves with clothoids. Journal of Surveying Engineering, **146**, 1, 2020, ID article: 04019021:1-8, DOI: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000299
- [11] *Baykal O., Tari E., Coskun Z., Sahin M.*: New transition curve joining two straight lines. Journal of Transportation Engineering **123**, 5, 1997, 132-141, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-947X(1997)123:5(337)
- [12] *Tari E., Baykal O.*: An alternative curve in the use of high speed transportation systems. ARI – An International Journal for Physical and Engineering Sciences, **51**, 1998, 126-135, DOI: 10.1007/s007770050044
- [13] *Tari E., Baykal O.*: The new generation transition curves. 5th International Congress on Advances in Civil Engineering, Istanbul, 2002

- [14] *Tari E., Baykal O.*: A new transition curve with enhanced properties. *Canadian Journal of Civil Engineering* **32**, 5, 2005, 913-923, DOI: 10.1139/105-051
- [15] *Bosurgi G., D'Andrea A.*: A Polynomial Parametric Curve (PPC-CURVE) for the design of horizontal geometry of highways. *Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering*, **27**, 4, 2012, 304-312, DOI: 10.1111/j.1467-8667.2011.00750.x
- [16] *Kisgyörgy L.*: Hyperbolic transition curve. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, **58**, 1, 2014, 63-69, DOI: 10.3311/PPci.7433
- [17] *Bosurgi G., D'Andrea A., Pellegrino O., Solazzo G.*: An algorithm based on the PPC (Polynomial Parametric Curve) for designing horizontal highway alignments. *Advances in Transportation Studies – An International Journal*, **36**, 2015, 5-20
- [18] *Grabowski R.J.*: Gładkie przejścia krzywoliniowe w drogach kołowych i kolejowych. *Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja nr 82*, Kraków, 1984
- [19] *Kobryń A.*: Wielomianowe krzywe przejściowe w projektowaniu niwelety tras drogowych. *Wydawnictwa Politechniki Białostockiej, Rozprawy Naukowe nr 100*, Białystok, 2002
- [20] *Grabowski R.J.*: Ogólne krzywe przejściowe. *Geodezja i Kartografia*, **20**, 3, 1975, 235-246
- [21] *Kobryń A.*: Nowe typy krzywych przejściowych do definiowania tras komunikacyjnych. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **7**, 3, 2008, 5-8
- [22] *Kobryń A.*: Allgemeine mathematische Übergangskurven als Trassierungselement. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, **93**, 5, 1993, 227-242
- [23] *Morlok E.K.*: Introduction to transportation engineering and planning. McGraw-Hill, New York, 1978
- [24] *Sharpe R.J., Thorne R.W.*: Numerical method for extracting an arc length parameterization from parametric curves. *Computer Aided Design*, **14**, 2, 1982, 79-81
- [25] *Shoup T.E.*: Applied numerical methods for the microcomputer, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984
- [26] *Ali J.M., Tookey R.M., Ball J.V., Ball A.A.*: The generalized Cornu spiral and its application to span generation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **102**, 1, 1999, 37-47
- [27] *Meek D.S., Thomas R.S.*: A guided clothoid spline. *Computer Aided Geometric Design*, **8**, 2, 1991, 163-174
- [28] *Meek D.S., Walton D.J.*: Clothoid spline transition spirals. *Mathematics of Computation*, **199**, 59, 1992, 117-133
- [29] *Meek D.S., Walton D.J.*: A note on finding clothoids. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **170**, 2, 2004, 433-453, DOI: 10.1016/j.cam.2003.12.047
- [30] *Walton D.J.*: Spiral spline curves for highway design. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, **4**, 2, 1989, 99-106, DOI: 10.1111/j.1467-8667.1989.tb00012.x
- [31] *Walton D.J., Meek D.S.*: Computer aided design for horizontal alignment. *Journal of Transportation Engineering*, **115**, 4, 1989, 411-424, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-947X(1989)115:4(411)
- [32] *Walton D.J., Meek D.S.*: Clothoidal splines. *Computers and Graphics*, **14**, 1, 1990, 95-100
- [33] *Walton D.J., Meek D.S.*: Curvature extrema of planar parametric polynomial cubic curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **134**, 1-2, 2001, 69-83, DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00529-X
- [34] *Wang L.Z., Miura K.T., Nakamae E., Yamamoto T., Wang T.J.*: An approximation approach of the clothoid curve defined in the interval  $[0, \sqrt{2}]$  and its offset by free-form curves. *Computer Aided Design*, **33**, 14, 2001, 1049-1058, DOI: 10.1016/S0010-4485(00)00142-1
- [35] *Kobryń A.*: Wielomianowe kształtowanie krzywych przejściowych. *Wydawnictwa Politechniki Białostockiej, Rozprawy Naukowe nr 167*, Białystok, 2009
- [36] *Kobryń A.*: Transition curves for highway geometric design. *Springer Tracts on Transportation and Traffic*, **14**, Springer International Publishing, Cham, 2017
- [37] *Kobryń A.*: Krzywe przejściowe w trasowaniu dróg. *Teoria i praktyka*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2023
- [38] *Sánchez-Reyes J., Chacón J.M.*: Nonparametric Bézier representation of polynomial transition curves. *Journal of Surveying Engineering*, **144**, 2, 2018, ID article: 04018001, DOI: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000251
- [39] *Brzeziński A., Cielecki A., Dąbkowski P., Jesionkiewicz-Niezdzińska K., Olszewski P., Osińska B., Sandecki T., Szagała P., Więckowski M., Włodarek P., Zieliński T.*: Wytyczne projektowania odcinków dróg zamiejsczych. Część 2: Kształtowanie geometryczne (WR-D-22-2). *Wzorce i standardy rekomendowane przez Ministra właściwego ds. transportu, Ministerstwo Infrastruktury*, Warszawa, 2023
- [40] *Kruszyna M., Suchy G.*: Propozycja metody oceny wariantów przebiegu inwestycji drogowej w fazie planistycznej. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **17**, 2, 2018, 159-176, DOI: 10.7409/rabdim.018.010