

SZYMON IMIEŁOWSKI<sup>1)</sup>

## SUBCRITICAL DEFORMATION OF THE BRIDGE STRUCTURE COMPRESSED MEMBERS

### DEFORMACJE SMUKŁYCH ELEMENTÓW KONSTRUKCJI MOSTOWEJ W ZAKRESIE DOKRYTYCZNYM

**STRESZCZENIE.** W pracy przedstawiono oryginalny model deformacji ściskanych prętów pryzmatycznych w zakresie dokrytycznym. Uwzględniono trzy pojawiające się sekwencyjnie etapy deformacji: skrócenie pręta o osi prostoliniowej, etap przejściowy (równoczesne odkształcenie postaciowe i wyboczenie pręta ściśliwego) oraz etap wyboczenia pręta o osi nieściśliwej. Kolejne etapy deformacji wyodrębniono na podstawie analizy wyników przeprowadzonego eksperymentu stateczności, w postaci wykresów zmian siły oraz składowych przemieszczenia, naprężenia i odkształcenia. Pojawienie się przemieszczenia poprzecznego pręta wyjaśniono jako skutek odkształcenia powstałego po osiągnięciu maksymalnej wartości energii odkształcenia postaciowego. Zweryfikowano kryterium utraty stateczności opisaną warunkiem maksymalnej energii odkształcenia sprężystego. Omówiono przypadek utraty stateczności prętów smukłych, które przenoszą siłę krytyczną, jak również prętów średnich smukłości, dla których stan graniczny jest określony warunkami przejścia do trzeciego etapu deformacji. W drugim z wymienionych przypadków utraty stateczności wyodrębniono smukłości, przy których występuje przeskok konfiguracji pręta oraz smukłości, przy których stan graniczny określony jest niestatecznością materiałową.

**ABSTRACT.** An original model of subcritical deformations of compressed prismatic bars is considered. The model includes three successive stages of deformation: axial shortening without any deviation from straightness, the transitional stage (shear strain and buckling of a compressible member occurring simultaneously) and buckling of the bar of an incompressible axis. The presented model follows results of experimental investigations on metal bar stability, representing the changes of load, displacement, stress and strain components during compression process. Herein, an appearance of the column lateral displacement is explained as a result of deformation occurring when strain energy reach the maximum value. The criterion of stability loss in the form of the maximum strain energy condition is verified as well. In the article cases of stability loss are discussed for both slender columns carrying the critical load and medium slenderness columns, for which the limit state is defined by the conditions at which transition to the third deformation stage occurs. In the latter case two groups of slenderness were identified: the one for which a snap-through to a new equilibrium configuration occurs and the other for which the limit state is defined by the material instability.

**SŁOWA KLUCZOWE:** deformacje prętów ściskanych, stateczność prętów pryzmatycznych, wyboczenie prętów.

**KEYWORDS:** deformations of compressed members, stability of prismatic bars, buckling of columns.

DOI: 10.7409/rabdim.021.002

<sup>1)</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Instalacji Budowlanych, Hydrotechniki i Inżynierii Środowiska, ul. Nowowiejska 20, 00-653 Warszawa; szymon.imielowski@is.pw.edu.pl

## 1. WSTĘP

Bezpieczna eksploatacja konstrukcji mostowej zależy od nośności szczególnie narażonych na zniszczenie elementów, którymi są ściskane smukłe podpory i pręty kratownic. Sprawą zasadniczą jest przyjęcie prawidłowego opisu występujących podczas ich eksploatacji zjawisk. Zaproponowany stopień uproszczenia konstrukcji i warunków jej pracy musi zapewniać możliwość uwzględnienia wszystkich znaczących zjawisk, które mają wpływ na jej bezpieczną eksploatację. Jako że wiele katastrof mostów było spowodowanych niedośkonałościami metod obliczeniowych stosowanych w projektowaniu konstrukcji mostowej [1], stały się one przyczyną rozwoju metod projektowania, w tym badań nad statecznością konstrukcji.

Szczególnie ważny jest prawidłowy opis deformacji ściskanych prętów w zakresie dokrytycznym. Model ewolucji deformacji ściskanych prętów pryzmatycznych w zakresie dokrytycznym zaproponowano w monografii [2]. Model powstał na podstawie analizy wyników eksperymentu stateczności, w postaci relacji pomiędzy wielkościami bezpośrednio pomierzonymi podczas realizacji eksperymentu,  $P = P(f)$ ,  $P = P(u)$ ,  $u = u(f)$ ,  $f = f(u)$ , gdzie  $P$  to siła,  $f$  maksymalne przemieszczenie poprzeczne, zaś  $u$  przemieszczenie w kierunku działającej siły. W analizie uwzględniono również wykresy odkształcenia podłużnego  $\varepsilon$  i naprężenia normalnego  $\sigma$  jako funkcji składowych przemieszczenia  $u$  i  $f$ . Niniejsza praca zawiera rozwinięcie przedstawionego w monografii modelu – zwrócono uwagę na opis zjawisk, które są bezpośrednią przyczyną pojawienia się przemieszczenia poprzecznego pręta.

Aktualny stan badań nad statecznością prętów omówiono m.in. w monografiach [3, 4]. W pracach [5, 6] zamieszczono opis badań stateczności prętów stalowych o przekroju kołowym pełnym i zaproponowano opis ewolucji deformacji, w którym uwzględniono dwa etapy: odkształcalny pręt prostoliniowy i wyboczony pręt o osi nieściśliwej. Wykazano, że stan krytyczny występuje przy statecznej ugiętej postaci. W monografii [2] ten model uzupełniono o etap przejściowy deformacji, w którym uwzględniono odkształcenie postaciowe. Zaproponowano klasyfikację smukłości, w której wyodrębniono następujące grupy smukłości: pręty krępe (uplastycznienie pręta prostego), średnie smukłości (dwa zakresy: wyboczenie plastyczne, sprężyste przeskoki), pręty smukłe (wyboczenie sprężysto-plastyczne), duże smukłości (wyboczenie sprężyste). W nawiasach określono warunki, jakie towarzyszą zniszczeniu pręta lub utracie stateczności. W zaproponowanej klasyfikacji uwzględniono stateczną ugiętą postać pręta w warunkach stanu krytycznego. Graniczna smukłość prętów w zakresie średnich smukłości jest określona wartością

## 1. INTRODUCTION

Structural safety during operation of bridges depends on the strength of those components which are particularly prone to failure, namely slender supports and truss rods loaded in compression. It is essential to use a correct description of the phenomena occurring during their operation. All the phenomena related to operational safety must be taken into account in a proposed simplified description of the structure and the conditions of operation. Numerous collapses of bridges that were caused by deficiencies of design methods [1] has initiated a development of more appropriate design approaches and the associated studies on the stability of structures.

It is particularly important to obtain a correct description of the subcritical deformations of compressed columns. A model representing the evolution of subcritical deformations of compressed prismatic columns was proposed in the monograph [2]. In the process of building this model, a stability experiment was carried out, yielding the following relationships between directly measured values:  $P = P(f)$ ,  $P = P(u)$ ,  $u = u(f)$ ,  $f = f(u)$ , where  $P$  is the force,  $f$  is the maximum transverse displacement, and  $u$  is the displacement in the direction of the applied force. Also the curves representing the longitudinal strain  $\varepsilon$  and normal stress  $\sigma$  vs. displacements  $u$  and  $f$  were considered in the analysis. The model presented in the monograph is further elaborated in this article with attention paid to appropriate description of the phenomena which directly cause lateral displacement of the column.

The current state of research on the bar stability was discussed, for example in monographs [3, 4]. Stability study on steel solid members of circular cross-section is reported in [5, 6]. A description of the evolution of deformation, split in two phases: unbuckled compression of a straight column and buckled column of an incompressible axis, is also proposed there. It was showed that the column preserve the stable bent shape at the critical state. In monograph [2] this model was supplemented by a transitional stage of deformation, which includes also shear strain. In addition, a classification of slenderness was proposed. The following groups of columns were distinguished depending on slenderness: short columns (yielding without deflection), medium slenderness columns (with both plastic buckling and elastic snapping), slender columns (elastic-plastic buckling), very slender columns (elastic buckling). The conditions of the column material failure or stability loss are given in parentheses. This classification takes into account, that the column preserve a stable bent

naprężenia równego granicy proporcjonalności  $R_H$  lub granicy umownej  $R_{0,01}$  w skrajnych włóknach pręta ugiętego, nie zaś pręta prostego, jak zakłada model Eulera. W grupie średnich smukłości wyodrębniono zakres smukłości wyboczenia plastycznego, który charakteryzuje się występowaniem niestateczności materiałowej (w zakresie pokrytym oś pręta ściskanego ulega skróceniu pomimo malejącej wartości siły), jak również zakres niestateczności geometrycznej (skokowy spadek siły przy obciążeniu siłą niszczącą, któremu towarzyszy wzrost strzałki ugięcia i wydłużenie osi pręta). Zjawisko zostało zaobserwowane po raz pierwszy przez autorów pracy [7], jest również opisane w niniejszej pracy.

Na Rys. 1 przedstawiono przykłady krzywych obciążenie-strzałka ugięcia ściskanych prętów o wybranych smukłościach. Na wykresie uwzględniono bezwymiarową siłę  $p = P / P_k$  oraz strzałkę ugięcia  $w / L$ , gdzie  $P_k = \pi^2 EJ / L^2$  jest siłą krytyczną, zaś  $L$  długością wyboczeniową pręta. Już wstępna analiza wykresów widocznych na Rys. 1 pozwala wysnuć wnioski, które przedstawiono poniżej. Niezależnie od smukłości, obciążany pręt początkowo zachowuje postać prostoliniową, wykres pokrywa się z osią rzędnych. Przy obciążeniu, które oznaczono jako  $P^*$ , pojawia się przemieszczenie poprzeczne, które przy dalszym obciążaniu początkowo nieznacznie zwiększa swoją wartość, a przy obciążeniu bliskim sile niszczącej  $P_n$  lub sile krytycznej  $P_k$  gwałtownie wzrasta. Stan graniczny lub krytyczny występuje przy ugiętej osi pręta, a wartość strzałki ugięcia  $w / L$  przy obciążeniu siłą graniczną lub krytyczną zależy wprost proporcjonalnie od smukłości pręta. Na Rys. 1 zaznaczono punkty  $p^* = P^* / P_k$ ,  $p_k = 1$  i  $p_n = P_n / P_k$ , które na oryginalnych rysunkach w monografii [3] nie były uwzględnione. Na podstawie analizy kształtu ścieżek równowagi przedstawionych na Rys. 1 można wyodrębnić kilka etapów zakresu dokrytycznego pręta ściskanego: zachowanie kształtu prostoliniowego, nieznaczne przemieszczenie poprzeczne i następnie gwałtowny wzrost strzałki ugięcia przy obciążeniu  $p \rightarrow p_k$  lub  $p \rightarrow p_n$ .

shape at the critical state. The limit of slenderness ratio of medium slenderness is defined by a stress value equal to proportionality limit  $R_H$  or offset elasticity point of  $R_{0,01}$  in the outer fibres of a bent column and not in a straight column as in the Euler model. Two groups inside the column of medium slenderness are distinguished. The first one is characterised by material instability (in the postcritical range the axis of compressed column shortens despite a decreasing applied force), and the second one in which geometric instability appears (a rapid drop of the force value at the limit point, accompanied by an increase of deflection and elongation of the column axis). This phenomenon was first reported in [7] and is described also in the following part of this article.

Examples of load-deflection curves of compressed columns of selected slenderness ratios are shown in Fig. 1. The non-dimensional force  $p = P / P_k$  and deflection  $w / L$ , where  $P_k = \pi^2 EJ / L^2$  is the critical load and  $L$  is the buckling length of the column are used as description. Even a brief analysis of the curves in Fig. 1 allowed us to draw the conclusions presented below. Regardless of the slenderness, the compressed column initially remains straight and the curve on the graph coincides with the  $y$ -axis. At the load value designated  $P^*$  transverse displacement occurs, increasing with the rise of load. This increase is initially slight but grows considerably when the load has come close to the limit load  $P_n$  or the critical load  $P_k$ . The limit state or critical condition occur at the column bent shape, and the value of deflection  $w / L$  at the limit or critical load is directly proportional to the slenderness ratio of the column. The points plotted on the graph in Fig. 1, namely  $p^* = P^* / P_k$ ,  $p_k = 1$  and  $p_n = P_n / P_k$  has not appeared on the original graphs included in the monograph [3]. Notice, that based on the equilibrium paths shown in Fig. 1 inside the subcritical deformations one can distinguish the following stages: axial shortening without any deviation from straightness, slight lateral displacement, followed by rapid deflection for the load approaching the value of  $p \rightarrow p_k$  or  $p \rightarrow p_n$ .

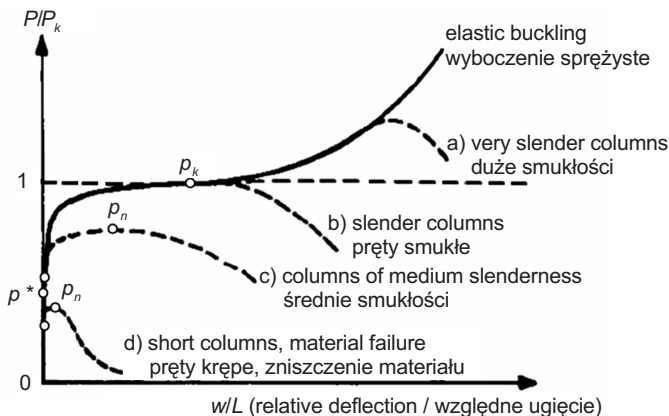


Fig. 1. Examples of load-deflection curves for selected slenderness ratios of compressed prismatic columns according to [3]  
Rys. 1. Przykłady krzywych obciążenie-strzałka ugięcia dla wybranych smukłości ściskanych prętów przyrównanych wg [3]

Zakrzywienie osi pręta ściskanego w zakresie dokrytycznym jest zwykle tłumaczone obecnością imperfekcji [3, 4, 8-11]. W modelu Ayrtona-Perry'ego [8-11] możliwe jest wyznaczenie maksymalnej wartości naprężenia w pręcie ściskanym z imperfekcjami. Specyfika przekroju i materiału jest tu uwzględniana w postaci współczynników empirycznych. Modele uwzględniające imperfekcje nie opisują jednak wszystkich zjawisk towarzyszących ściskaniu prętów pryzmatycznych, jak na przykład zachowania postaci prostoliniowej pręta w początkowym etapie obciążania.

## 2. BADANIA EKSPERYMENTALNE. OPIS MODELU I STANOWISKA BADAWCZEGO

Przedstawiony w tej pracy model ewolucji deformacji pręta ściskanego powstał na podstawie analizy wyników eksperymentu stateczności przeprowadzonego w laboratoriach Zakładu Wytrzymałości Materiałów Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej (maszyna wytrzymałościowa Instron 8802, zakres 200 kN, dokładność pomiaru siły 1 kN, dokładność pomiaru przemieszczenia głowic 0,05 mm) oraz Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN (maszyna wytrzymałościowa MTS 810, zakres 250 kN, dokładność pomiaru siły 25 N, dokładność pomiaru przemieszczenia głowic 0,03 mm). W skład stanowiska badawczego wchodziły: maszyna wytrzymałościowa, oryginalne oprzyrządowanie umożliwiające pomiar strzałki ugięcia próbki (wykorzystano dalmierz optyczny Baumer OADM 2016460/14F o dokładności pomiaru 3  $\mu\text{m}$ ) oraz wyprowadzone kanały pomiarowe umożliwiające równoczesną rejestrację obciążenia  $P$ , przemieszczenia głowicy maszyny wytrzymałościowej  $u$  oraz strzałki ugięcia wyobczonego pręta  $f$  [2, 7, 12, 14-16]. Plan eksperymentu przewidywał badania ścieżek równowagi metalowych prętów o różnych smukłościach i przekrojach poprzecznych stosowanych w budownictwie.

Schematem statycznym próbki zamocowanej w szczękach maszyny wytrzymałościowej jest pręt obustronnie utwierdzony o długości  $L$  (Rys.2a). W obliczeniach uwzględniono statycznie równoważny schemat pręta swobodnie podpartego o długości efektywnej  $l_{ef} = 0,5 L$ . Położenie podpór przegubowych pręta swobodnie podpartego odpowiada lokalizacji węzłów linii ugięcia pręta obustronnie zamocowanego, w których moment zginający jest równy zeru (Rys. 2b). Obciążenie próbki w zakresie dokrytycznym realizowano w postaci przyrostów siły. Przy sile bliskiej wartości krytycznej (lub granicznej) i w zakresie pokrytycznym proces był sterowany przyrostami przemieszczenia. W przypadku, gdy obciążenie jest sterowane przemieszczeniem, wielkość siły jest tylko monitorowanym parametrem procesu, możliwa jest obserwacja deformacji stanu krytycznego i analiza zachowań pokrytycznych.

Curvature of the rod axis in the subcritical region is usually attributed to the column imperfections [3, 4, 8-11]. Using the Ayrton-Perry model [8-11] it is possible to determine the maximum stress in a compressed column with imperfections. Empirical factors are introduced to account for the specific cross-section and material characteristics. However, while taking account of imperfections, such models do not describe all the phenomena involved in compression of prismatic columns, such as retaining of straightness in the initial phase of loading.

## 2. EXPERIMENTAL STUDY. DESCRIPTION OF THE MODEL AND THE TEST BENCH

The model of evolution of deformation of a compressed column presented in this article is based on the results of a stability experiment conducted at the Laboratory of Strength of Materials, of the Faculty of Civil Engineering at the Warsaw University of Technology (Instron 8802 test frame, 200 kN maximum test force, 1 kN accuracy of force measurement, 0.05 mm displacement interval) and of the Institute of Fundamental Technological Research of the Polish Academy of Sciences (MTS 810 test frame, 250 kN maximum test force, 25 kN accuracy of force measurement, 0.03 mm crosshead displacement interval). The test system consisted of a testing machine, original deflection measuring equipment (based on Baumer OADM 2016460/14F optical distance sensor, 3  $\mu\text{m}$  measuring accuracy) and measuring channels for simultaneous recording of the load  $P$ , test frame crosshead displacement  $u$  and specimen lateral deflection  $f$  [2, 7, 12, 14-16]. The experiment program included recording of the equilibrium paths of columns of different slenderness ratios and cross-sections which are used in construction applications.

The specimen, after it has been attached in the grips of the test frame, can be represented by a column of length  $L$ , fixed at both ends (Fig. 2a). The calculations were done for an equivalent scheme of a simply supported column of effective length  $l_{ef} = 0.5 L$ . The positions of pin supports of the simply supported member correspond to the locations of the cross-sections at which bending moment is equal to zero (Fig. 2b). Inside subcritical region loading was controlled by an incrementally increasing force. With the force approaching the critical (or limit) value and in the postcritical region, the process was controlled by increments of displacement. In case of displacement-controlled loading, the force becomes a monitored process parameter and it is possible to observe buckling deformations and analyse postcritical behaviours.

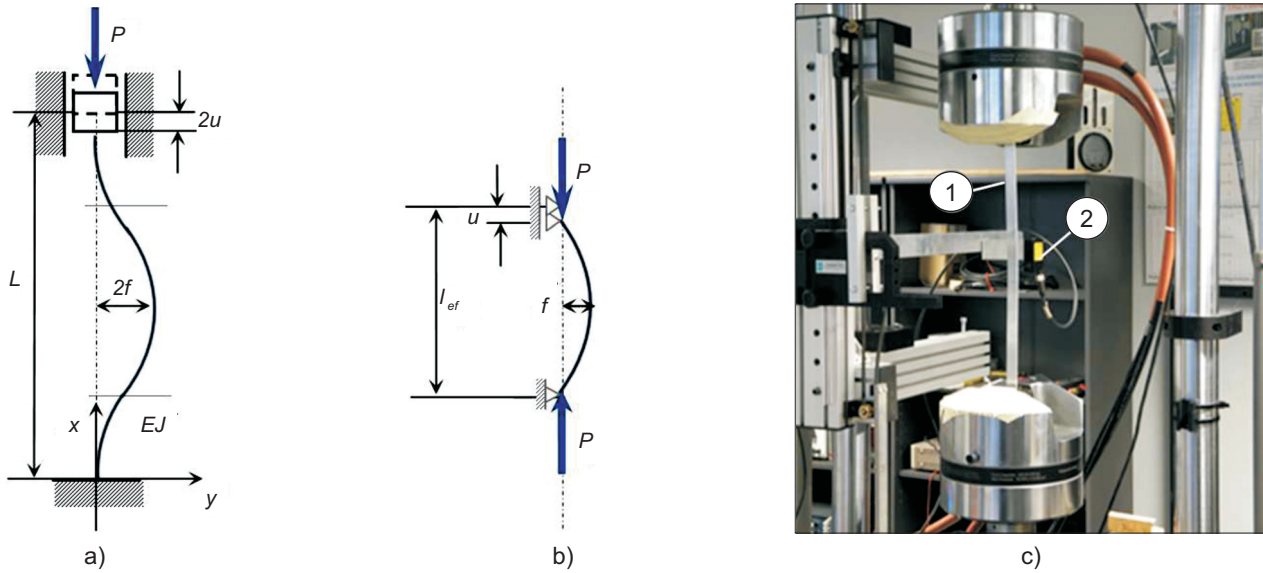


Fig. 2. a) Scheme of specimen and loading realized in the test, b) model of a simply supported member of effective length  $l_{ef}$ , c) view of the test stand: 1) test specimen, 2) optical distance sensor

Rys. 2. a) Schemat statyczny pręta w warunkach laboratoryjnych, b) model pręta swobodnie podpartego o długości efektywnej  $l_{ef}$ , c) widok stanowiska badawczego: 1) próbka, 2) dalmierz optyczny

### 3. ZESTAWIENIE WYNIKÓW BADAŃ

Etapy deformacji ściskanych prętów pryzmatycznych opisano na przykładzie ściskanych płaskowników o wymiarach przekroju poprzecznego  $b \times h = 5,88 \pm 0,01 \text{ mm} \times 19,88 \pm 0,01 \text{ mm}$ , wykonanych z aluminium A16063, dla którego określono umowne granice  $R_{0,01} = 150 \text{ MPa}$ ,  $R_{0,02} = 189 \text{ MPa}$ , wytrzymałość na rozciąganie  $R_m = 217 \text{ MPa}$  i moduł Younga  $E = 63,3 \text{ GPa}$ . Przedstawione w tej pracy wyniki stanowią rozwinięcie i uzupełnienie analizy przedstawionej w pracach [2, 5-7, 12-16].

Poniżej przedstawiono wykresy ścieżek równowagi  $P = P(u)$ ,  $f = f(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  i  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  prętów smukłych o  $\lambda = 235,6$ ;  $\lambda = 141,4$  i  $\lambda = 101,3$  (Rys. 3) oraz prętów średnich smukłości:  $\lambda = 72,5$ ;  $\lambda = 50,1$  i  $\lambda = 30,3$  (Rys. 4). Względne skrócenie osi pręta  $\varepsilon$  wyznaczono na podstawie pomierzonych wartości przemieszczeń  $u$  i  $f$  przy założeniu, że wyobczony pręt przyjmuje kształt sinusoidy,  $w_{sin} = f \sin \frac{\pi x}{l_g}$ ,  $l_g = l_{ef} - u$  (Rys. 2b).

W przypadku dużych smukłości kształt sinusoidy został zweryfikowany eksperymentalnie. W przypadku smukłości średnich, po uplastycznieniu przekroju najbardziej wyężonego, kształt osi pręta nieznacznie odbiega od założonej sinusoidy.

Istotną cechą przedstawionego modelu jest sekwencyjne występowanie kolejnych etapów deformacji: skrócenie pręta o osi prostoliniowej, etap przejściowy (równoczesne odkształcenie postaciowe i wyobczenie pręta ściśliwego) oraz

### 3. SUMMARY OF THE TEST RESULTS

The deformation stages of compressed prismatic columns are discussed using the example of compressed metal flats of cross-section  $b \times h = 5.88 \pm 0.01 \text{ mm} \times 19.88 \pm 0.01 \text{ mm}$ , made of A16063 aluminium with offset points of  $R_{0,01} = 150 \text{ MPa}$ ,  $R_{0,02} = 189 \text{ MPa}$ , tensile strength of  $R_m = 217 \text{ MPa}$  and Young's modulus of  $E = 63.3 \text{ GPa}$ . The results presented in this article supplement and elaborate the analysis presented in [2, 5-7, 12-16].

The following equilibrium paths  $P = P(u)$ ,  $f = f(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  and  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  of slender columns of  $\lambda = 235.6$ ,  $\lambda = 141.4$  and  $\lambda = 101.3$  (Fig. 3) and of intermediate columns of:  $\lambda = 72.5$ ,  $\lambda = 50.1$  and  $\lambda = 30.3$  (Fig. 4) are shown in the graphs below. The relative axial shortening of the column was calculated using measured displacements  $u$  and  $f$ , and assuming that the buckled member takes sinusoidal shape,  $w_{sin} = f \sin \frac{\pi x}{l_g}$ ,  $l_g = l_{ef} - u$  (Fig. 2b). For bigger slender-

ness ratios, the assumed sinusoidal shape was verified experimentally. In the case of medium slenderness columns, the shape of the column axis after yielding of the most strained cross-section deviated slightly from the assumed sine shape.

The essential point of the considered model is sequential occurrence of successive deformation stages: axial shortening without any deviation from straightness, transitional

wyobczenie pręta o osi nieściśliwej. Przedstawiony model deformacji w zakresie dokrytycznym pozostaje w zgodzie z wnioskami wynikającymi z analizy ścieżek równowagi na Rys. 1. Na wykresach (Rys. 3 - 8) zaznaczono charakterystyczne punkty określające granice etapów deformacji. Koniec etapu pręta prostego (pojawienie się przemieszczenia poprzecznego) określają parametry  $P^*$ ,  $u^*$ ,  $f^*$  i  $\varepsilon^*$ , które są współrzędnymi punktów 1, 3, 5, 7, 9 i 11 na krzywych  $P = P(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  oraz  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  i odpowiednio 1', 3', ..., 11' na krzywych  $f = f(u)$ . Koniec etapu przejściowego określają parametry  $P_z$ ,  $u_z$ ,  $f_z$  i  $\varepsilon_z$ , będące współrzędnymi punktów przełomu krzywych na wykresach  $P = P(u)$ ,  $f = f(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  i  $\varepsilon = \varepsilon(f)$ , które oznaczono jako 2, 4, 6, 8, 10 i 12 oraz odpowiednio 2', 4', ..., 12' na krzywych  $f = f(u)$ . Na wykresach  $\sigma(u)$ ,  $\sigma(f)$ ,  $\sigma(\varepsilon)$  uwzględniono dodatkowo oznaczenie: 1'', ..., 12''. Stan krytyczny jest określony parametrami  $P_k$ ,  $u_k$ ,  $f_k$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\sigma_k$  oraz  $\varepsilon_{ij}$  i  $P_{ij}$ , gdzie  $i, j$  to indeksy określające numery punktów oznaczających koniec etapów I i II danej smukłości.

phase (shear strain and buckling of a compressible column occurring simultaneously) and buckling of a column of an incompressible axis. The presented subcritical deformation model is consistent with the conclusions drawn from the analysis of the equilibrium paths in Fig. 1. The points marking the limits of the deformation stages are plotted on the graphs in Fig. 3 - 8. The end of the unbuckled compression phase (beginning of lateral displacement) is defined by the parameters  $P^*$ ,  $u^*$ ,  $f^*$  and  $\varepsilon^*$  which are the co-ordinates of points 1, 3, 5, 7, 9 and 11 plotted on the  $P = P(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  and  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  curves and points 1', 3', ..., 11' plotted on the  $f = f(u)$  curves. The end of the transitional stage is defined by the parameters  $P_z$ ,  $u_z$ ,  $f_z$  and  $\varepsilon_z$ , which are the co-ordinates of the curve inflection points denoted by 2, 4, 6, 8, 10 and 12 marked on the  $P = P(u)$ ,  $f = f(u)$  and  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  graphs, and 2', 4', ..., 12' on  $f = f(u)$  curves. Graphs  $\sigma(u)$ ,  $\sigma(f)$ ,  $\sigma(\varepsilon)$  include an additional denotation: 1'', ..., 12''. The critical state is defined by the parameters  $P_k$ ,  $u_k$ ,  $f_k$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\sigma_k$ , and  $\varepsilon_{ij}$  and  $P_{ij}$ , where the subscripts  $i, j$  indicate the points marking the ends of deformation stages I and II of a given slenderness, respectively.

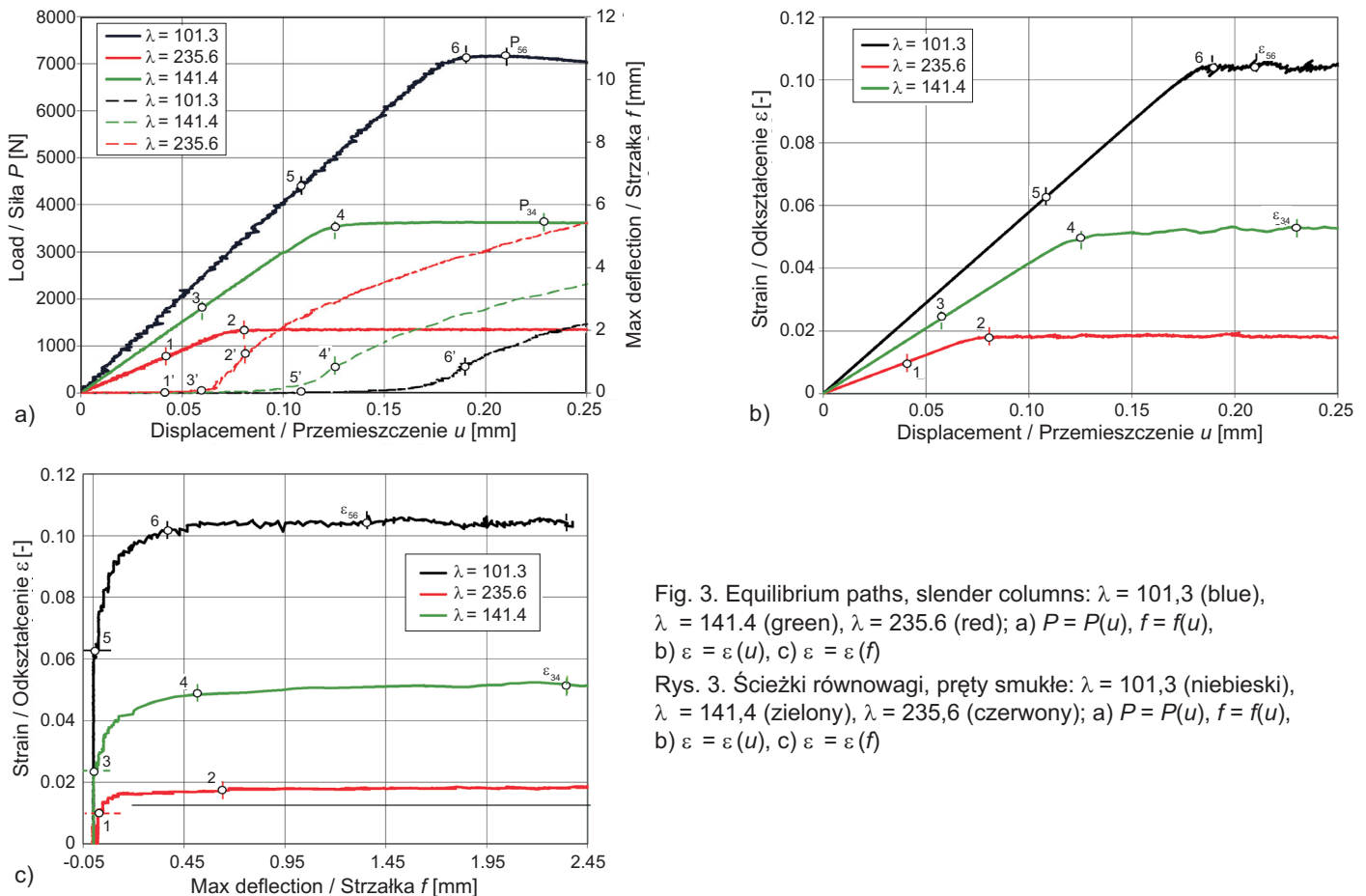


Fig. 3. Equilibrium paths, slender columns:  $\lambda = 101,3$  (blue),  $\lambda = 141,4$  (green),  $\lambda = 235,6$  (red); a)  $P = P(u)$ ,  $f = f(u)$ , b)  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ , c)  $\varepsilon = \varepsilon(f)$

Rys. 3. Ścieżki równowagi, pręty smukłe:  $\lambda = 101,3$  (niebieski),  $\lambda = 141,4$  (zielony),  $\lambda = 235,6$  (czerwony); a)  $P = P(u)$ ,  $f = f(u)$ , b)  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ , c)  $\varepsilon = \varepsilon(f)$

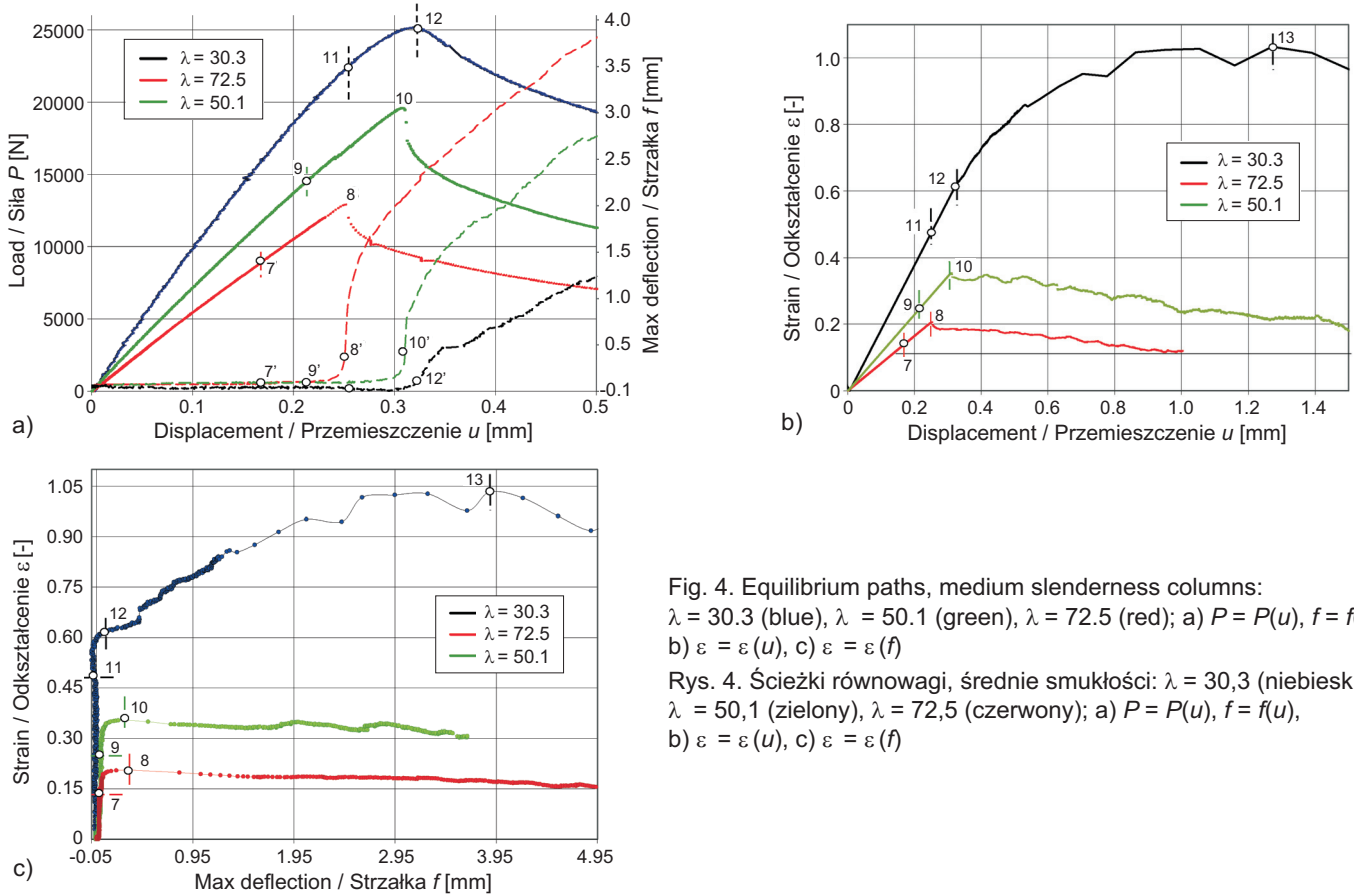


Fig. 4. Equilibrium paths, medium slenderness columns:  $\lambda = 30.3$  (blue),  $\lambda = 50.1$  (green),  $\lambda = 72.5$  (red); a)  $P = P(u)$ ,  $f = f(u)$ , b)  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ , c)  $\varepsilon = \varepsilon(f)$

Rys. 4. Ścieżki równowagi, średnie smukłości:  $\lambda = 30,3$  (niebieski),  $\lambda = 50,1$  (zielony),  $\lambda = 72,5$  (czerwony); a)  $P = P(u)$ ,  $f = f(u)$ , b)  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ , c)  $\varepsilon = \varepsilon(f)$

Na Rys. 5-8 przedstawiono wykresy zmian naprężenia normalnego  $\sigma$  jako funkcji składowych przemieszczenia  $u$  i  $f$  oraz odkształcenia  $\varepsilon$ . Uwzględniono wykresy naprężenia przy ścisaniu  $\sigma_c = P/A$  ( $A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego), naprężenia przy zginaniu  $\sigma_g = M/W$  ( $M$  – moment zginający,  $W$  – wskaźnik wytrzymałości przekroju) oraz naprężeń wypadkowych w skrajnych włóknach pręta mimośrodowo ściskanego, odpowiednio  $\sigma_c + \sigma_g$  i  $\sigma_c - \sigma_g$ . Na wykresach naniesiono punkty odpowiadające punktom zaznaczonym na ścieżkach równowagi (Rys. 3 i 4) oraz wartości naprężenia wywołanego siłą krytyczną:  $\sigma_k$  w osi pręta oraz odpowiednio  $\sigma'_k$  i  $\sigma''_k$  w skrajnych włóknach.

Ważnym parametrem w analizie stateczności jest sztywność pręta. Sztywność definiujemy w ścisłym powiązaniu z odkształceniem wywołanym przez obciążenie zewnętrzne. W zakresie dokrytycznym pręta ściskanego występują trzy rodzaje odkształceń: skrócenie osi pręta, odkształcenie postaciowe i ugięcie pręta o osi nieściśliwej, a każdemu z nich odpowiada inny rodzaj sztywności. W analizie należy więc uwzględnić sztywność wzdłużną związaną ze skróceniem osi pręta, sztywność poprzeczną i sztywność w kierunku działającej siły. W zakresie etapu I i znacznej części etapu II

Fig. 5-8 show the variation of normal stress  $\sigma$  as a function of the displacements  $u$  and  $f$  as well as of the strain  $\varepsilon$ . The respective graphs show the compression stress curves,  $\sigma_c = P/A$  ( $A$  – cross-sectional area), normal stress curves due to bending,  $\sigma_g = M/W$  ( $M$  – bending moment,  $W$  – section modulus) and the resultant stress in the outer fibres of a column subjected to eccentric compression:  $\sigma_c + \sigma_g$  and  $\sigma_c - \sigma_g$  respectively. The points corresponding to ones marked on the paths shown in Figs 3 and 4 as well as the stresses induced by the critical load, namely  $\sigma_k$  – at the cross-section centroid along with  $\sigma'_k$  and  $\sigma''_k$  at the outer fibres, are plotted on these graphs.

An important parameter in the stability analysis is stiffness of the compressed member. Stiffness is defined in close relation to deformation caused by the external load. There are three types of deformation in the subcritical range: shortening of the bar axis, shear and deflection of a bar of an incompressible axis. Each of this deformation corresponds to different type of stiffness, so the analysis should take into account the longitudinal stiffness associated with the shortening of the bar axis, transverse stiffness and stiffness in the direction of the acting force. In the stage I

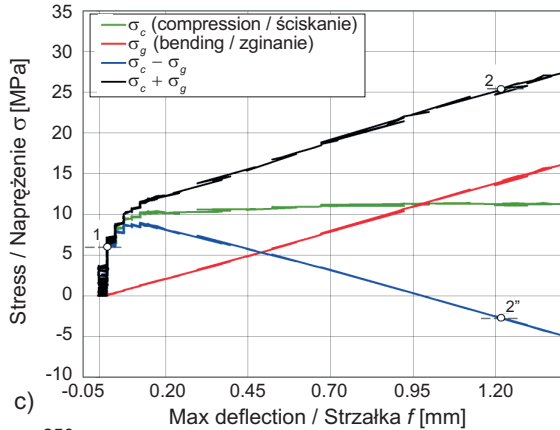
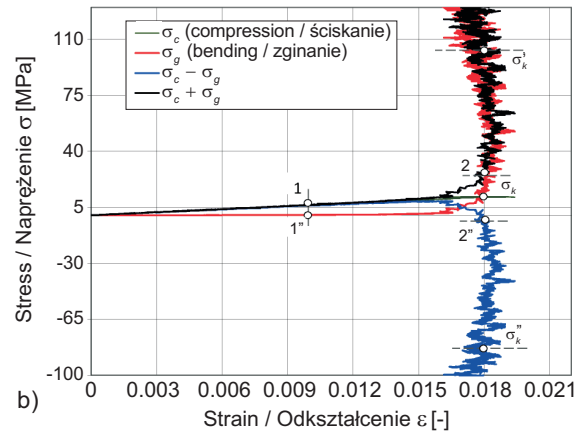
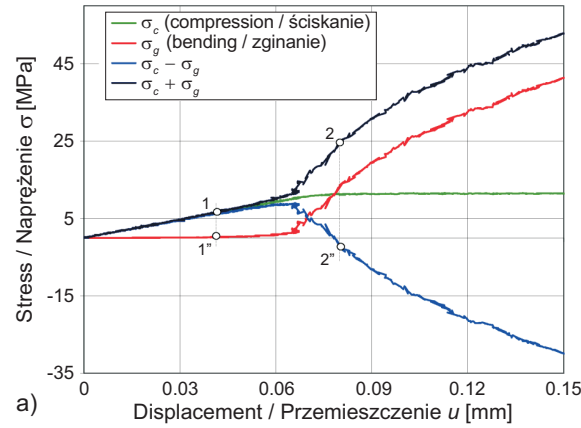


Fig. 5. Normal stress as a function of displacement, deformation and max deflection; slender columns of  $\lambda = 235.6$ : a)  $\sigma = \sigma(u)$ , b)  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , c)  $\sigma = \sigma(f)$ ,  $\sigma_c - \sigma_g = 25.5$  MPa (point 2),  $\sigma_c + \sigma_g = -2.5$  MPa (point 2'')

Rys. 5. Wykresy zmian naprężenia normalnego w funkcji zmian przemieszczenia, odkształcenia, strzałki ugięcia; pręty smukłe  $\lambda = 235,6$ : a)  $\sigma = \sigma(u)$ , b)  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , c)  $\sigma = \sigma(f)$ ,  $\sigma_c - \sigma_g = 25,5$  MPa (pkt 2),  $\sigma_c + \sigma_g = -2,5$  MPa (pkt 2'')

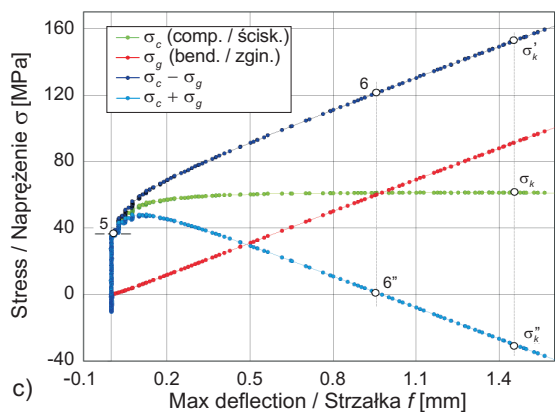
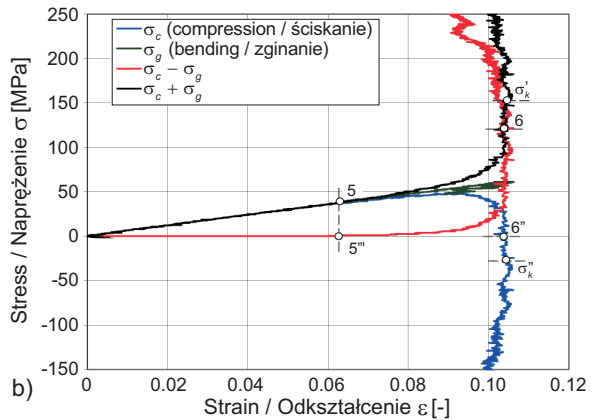
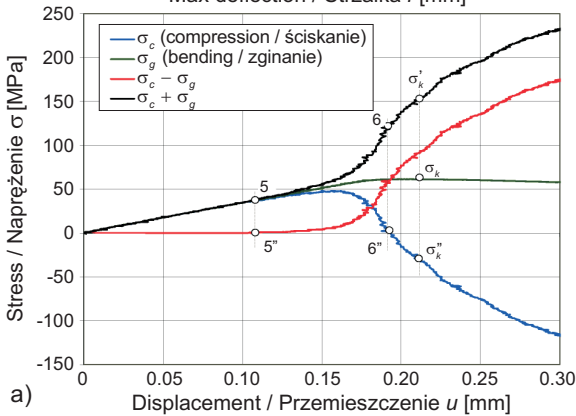


Fig. 6. Normal stress as a function of displacement, deformation and max deflection; slender columns of  $\lambda = 101.3$ : a)  $\sigma = \sigma(u)$ , b)  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , c)  $\sigma = \sigma(f)$ ,  $\sigma_c - \sigma_g = 122.0$  MPa (point 6),  $\sigma_c + \sigma_g = 1.0$  MPa (point 6'')

Rys. 6. Wykresy zmian naprężenia normalnego w funkcji zmian przemieszczenia, odkształcenia, strzałki ugięcia; pręty smukłe  $\lambda = 101,3$ : a)  $\sigma = \sigma(u)$ , b)  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , c)  $\sigma = \sigma(f)$ ,  $\sigma_c - \sigma_g = 122,0$  MPa (pkt 6),  $\sigma_c + \sigma_g = 1,0$  MPa (pkt 6'')



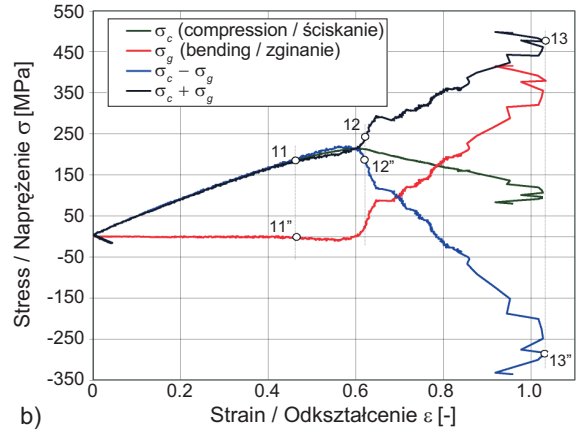
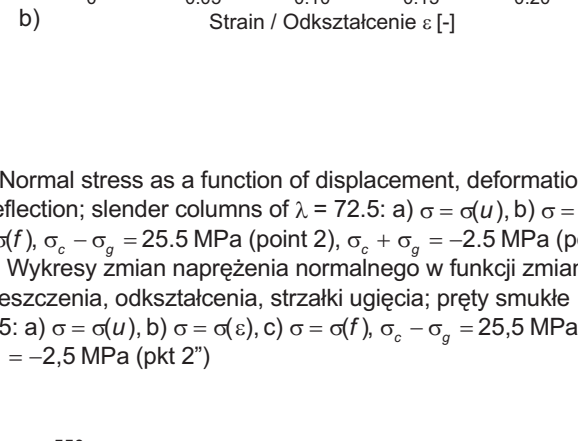
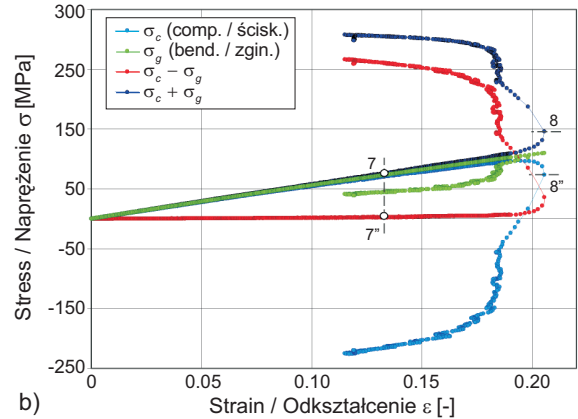
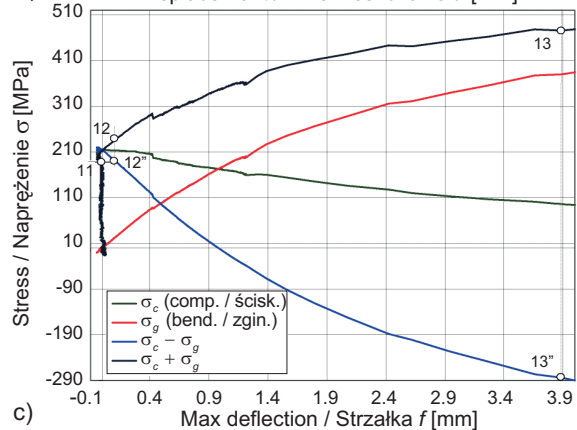
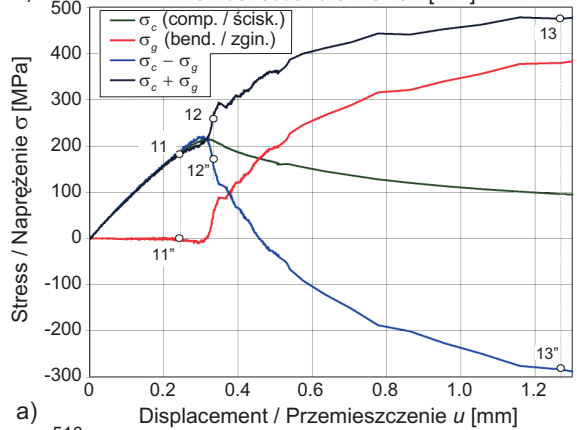
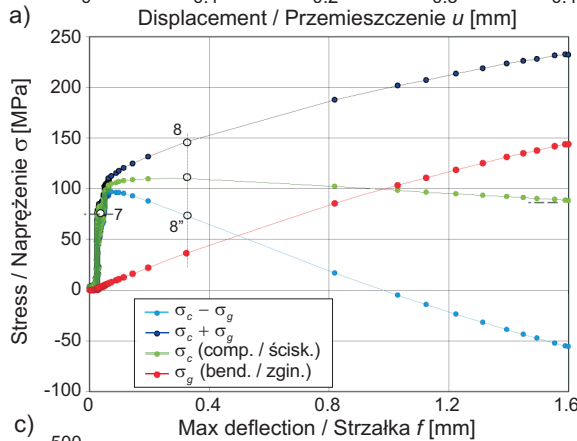
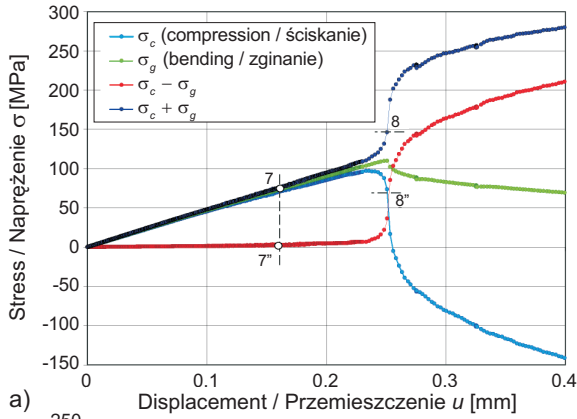


Fig. 7. Normal stress as a function of displacement, deformation and max deflection; slender columns of  $\lambda = 72.5$ : a)  $\sigma = \sigma(u)$ , b)  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ , c)  $\sigma = \sigma(f)$ ,  $\sigma_c - \sigma_g = 25.5$  MPa (point 2),  $\sigma_c + \sigma_g = -2.5$  MPa (point 2")  
 Rys. 7. Wykresy zmian naprężenia normalnego w funkcji zmian przemieszczenia, odkształcenia, strzałki ugięcia; pręty smukłe  $\lambda = 72.5$ : a)  $\sigma = \sigma(u)$ , b)  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ , c)  $\sigma = \sigma(f)$ ,  $\sigma_c - \sigma_g = 25,5$  MPa (pkt 2),  $\sigma_c + \sigma_g = -2,5$  MPa (pkt 2")

Fig. 8. Normal stress as a function of displacement, deformation and max deflection; slender columns of  $\lambda = 30.3$ : a)  $\sigma = \sigma(u)$ , b)  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ , c)  $\sigma = \sigma(f)$ ,  $\sigma_c - \sigma_g = 25.5$  MPa (point 2),  $\sigma_c + \sigma_g = -2.5$  MPa (point 2")  
 Rys. 8. Wykresy zmian naprężenia normalnego w funkcji zmian przemieszczenia, odkształcenia, strzałki ugięcia; pręty smukłe  $\lambda = 30,3$ : a)  $\sigma = \sigma(u)$ , b)  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ , c)  $\sigma = \sigma(f)$ ,  $\sigma_c - \sigma_g = 25,5$  MPa (pkt 2),  $\sigma_c + \sigma_g = -2,5$  MPa (pkt 2")

główną rolę odgrywa sztywność związana z odkształceniem wzdłuż osi pręta, która na wykresie  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  jest określona tangensem kąta nachylenia stycznej do krzywej. Na Rys. 9 zestawiono ścieżki równowagi  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  prętów smukłych i prętów średnich smukłości. Uwagi dotyczące sztywności zapisano w rozdz. 4.2, są one również tematem oddzielnego artykułu.

and a significant part of the stage II, of column deformation, essential is the stiffness associated with deformation along the rod axis. In the graph  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  it is determined by the slope of the tangent to the curve. Fig. 9 summarizes the equilibrium paths  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  of slender bars and bars of medium slenderness. More remarks on stiffness are described in chapter 4.2, however column stiffness is the subject of a separate article.

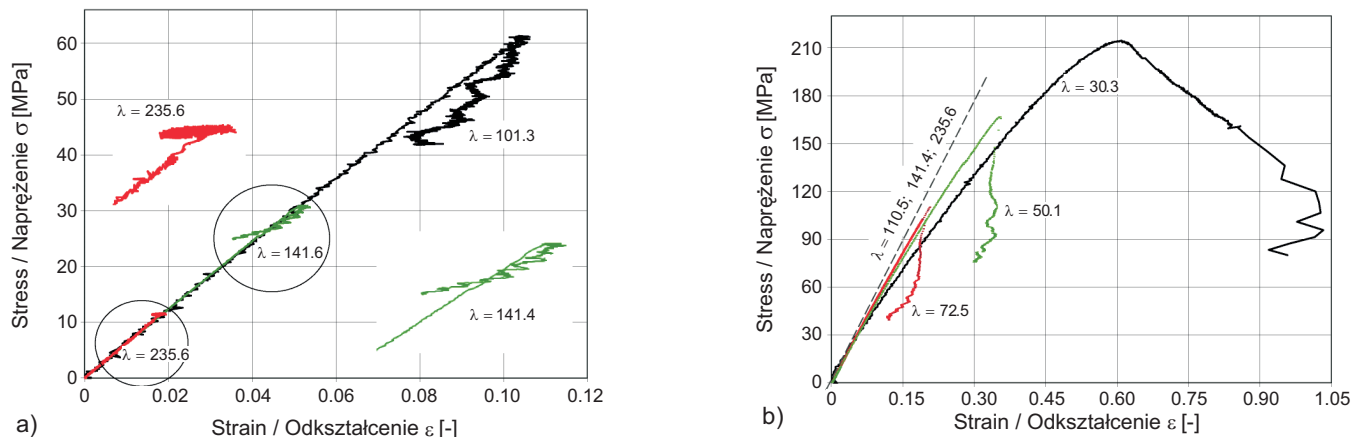


Fig. 9. Equilibrium paths  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  for: a) slender columns, b) intermediate columns  
Rys. 9. Ścieżki równowagi  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  dla: a) prętów smukłych, b) prętów średnich smukłości

Charakterystykę kolejnych etapów deformacji, w tym parametry określające granice etapów deformacji, sztywność i energię sprężystą poszczególnych etapów, można wyznaczyć na podstawie analizy ścieżek równowagi. W Tabl. 1 zestawiono wartości parametrów  $P^*$ ,  $P_z$ ,  $P_{max}$ ,  $l_{ef}$ ,  $u^*$  oraz  $u_z$  wyznaczonych na podstawie bezpośredniego pomiaru oraz wyniki pomiarów pośrednich obliczonych na podstawie wzorów zamieszczonych pod tablicą.

The characteristics of the successive deformation stages, including the parameters defining their limits, as well as their stiffness and elastic energy values can be determined from the equilibrium paths. Table 1 gives the directly measured values of  $P^*$ ,  $P_z$ ,  $P_{max}$ ,  $l_{ef}$ ,  $u^*$  and  $u_z$  and the values determined using the equations given under the table.

Table 1. Subcritical parameters  
Tablica 1. Parametry zakresu dokrytycznego

No. Lp.	$\lambda_{ef}$ [-]	$P^*$ [N]	$P_z$ [N]	$P_{max}$ [N]	$P_E$ [N]	$P_E/\sqrt{3}$ [N]	col. 3 / kol. 3 col. 7 / kol. 7	$l_{ef}$ [mm]	$\Delta l^*$ [mm]	$u^*$ [mm]	$\Delta l_z$ [mm]	$u_z$ [mm]	$\varepsilon^*$ [%]	$\varepsilon_z$ [%]	$\varepsilon_k$ [%]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1.	235.6	746	1260	1348	1320	762.1	0.979	400	0.040	0.042	0.068	0.072	0.011	0.018	0.0178
2.	141.4	2140	3385	3620	3660	2113	1.013	240	0.069	0.061	0.110	0.118	0.025	0.049	0.0494
3.	101.3	4203	6960	7146	7150	4128	1.018	172	0.098	0.105	0.162	0.184	0.061	0.106	0.0974
4.	72.5	8107	12770	12918	13992	8079	1.003	123	0.135	0.158	0.212	0.248	0.128	0.201	0.1880
5.	50.1	16630	19343	19570	29269	16899	0.984	85	0.191	0.160	0.222	0.300	0.188	0.353	0.3950
6.	30.3	23125		25130				51.5	0.161	0.306			0.594	0.594	1.073

In the table / W tablicy:

$$\lambda_{ef} = l_{ef}/i, i = \sqrt{J/A}, P_E = \pi^2 EJ/l_{ef}^2, E_{I,II} = \Delta\sigma_z/\Delta\varepsilon_z, \Delta\sigma_z = P_z/A, \Delta l^* = P^*/EA, \Delta l_z = P_z/EA, \varepsilon^* = u^*/l_{ef}, \varepsilon_z = u_z/l_{ef}, \varepsilon_k = \pi^2/\lambda^2$$

## 4. DEFORMACJE I ENERGIA ODKSZTAŁCENIA SPRĘŻYSTEGO W ZAKRESIE DOKRYTYCZNYM PRĘTA ŚCISKANEGO

### 4.1. UWAGI OGÓLNE

W przyjętym modelu zachowanie stateczne jest określone zdolnością pręta do odkształcenia sprężystego. Utrata stateczności nastąpi, gdy pręt utraci zdolność do odkształcenia sprężystego, tzn. gdy całkowita energia sprężysta osiągnie wartość maksymalną. W opisie zjawisk towarzyszących utracie stateczności istotne jest więc określenie wartości energii sprężystej na dowolnym etapie obciążania, oraz maksymalnej energii sprężystej jaka może być zgromadzona w pręcie.

W przypadku prętów smukłych utrata stateczności następuje w zakresie odkształcenia sprężystego. W trzech etapach deformacji zakresu dokrytycznego występują trzy rodzaje odkształceń: skrócenie osi pręta, odkształcenie postaciowe oraz ugięcie pręta nieściśliwego. Należy więc określić maksymalną energię każdej składowej odkształcenia: energii ściskania  $U_{sc}$ , energii odkształcenia postaciowego  $\Phi_p$  i energii zginania  $U_g$  oraz wartość całkowitą energii sprężystej.

W przypadku średnich smukłości już w zakresie dokrytycznym pojawi się odkształcenie plastyczne, część energii jest rozpraszana. Stan graniczny jest konsekwencją uplastycznienia najbardziej wyężonego przekroju.

### 4.2. PIERWSZY ETAP DEFORMACJI – POSTAĆ PROSTOLINIOWA PRĘTA

Na początku obciążania, niezależnie od smukłości, występuje sprężyste skrócenie pręta o osi prostoliniowej (Rys. 1 oraz Rys. 10a). Na tym etapie nie występuje zginanie, praca wykonana przez siłę ściskającą jest gromadzona w pręcie w postaci energii sprężystej ściskania i energii odkształcenia postaciowego (Rys. 11a i b). Do oceny stanu wyężenia materiału pierwszego etapu deformacji przyjęto kryterium Hubera-Miesesa-Henky'ego (HMH), energii odkształcenia postaciowego. Zauważmy, że maksymalna wartość energii sprężystej odkształcenia postaciowego wystąpi przy obciążeniu mniejszym od krytycznego. Jest to stan, w którym całkowita energia sprężysta nie osiągnęła jeszcze wartości maksymalnej. Pręt zachowuje więc zdolność do odkształcenia sprężystego, zachowana jest stateczna postać pręta. Pomimo spełnienia warunku HMH, dalsze obciążanie nie spowoduje zniszczenia pręta, ponieważ możliwa jest aktywacja kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu deformacji, który zapewni dalsze odkształcenie w zakresie sprężystym. Jest nim odkształcenie postaciowe

## 4. SUBCRITICAL DEFORMATIONS AND ELASTIC STRAIN ENERGY OF A COMPRESSED COLUMN

### 4.1. GENERAL REMARKS

In the model considered herein, the stable behavior is determined by the ability of the bar to elastic deformation. The stability loss appears when the bar loses its ability to elastic deformation, i.e. when the total elastic strain energy reaches its maximum value. In the description of the stability phenomena, it is important to determine the value of elastic energy at any stage of loading, as well as the maximum elastic strain energy that can be stored in the bar.

In the case of slender bars, the loss of stability occurs in the range of elastic deformation. In three stages of subcritical deformations one can distinguish three types of deformations: shortening of the straight bar axis, shear and buckling of an incompressible bar. Therefore, it is necessary to determine the maximum energy of each deformation component: compression energy  $U_{sc}$ , shear energy  $\Phi_p$  and bending energy  $U_g$  as well as the total value of elastic energy.

In the case of medium slenderness, plastic deformation occurs in the subcritical range and part of the energy is dissipated. The limit state appears as a consequence of yielding of the column most strained cross-section.

### 4.2. FIRST STAGE OF DEFORMATION - AXIAL SHORTENING WITHOUT ANY DEVIATION FROM STRAIGHTNESS

Regardless of the column slenderness, at the beginning of loading, an elastic shortening of the straight axis appears (Fig. 1 and Fig. 10a). At this stage no bending occurs, the work performed by the compressive force is stored in the form of compression elastic energy as well as shear energy (Fig. 11a and b). The Huber-Mises-Henky (HMH) hypothesis, of the energy of shear strain, has been used to assess the material effort at this stage of deformation. Notice, that the maximum value of the elastic shear energy deformation, occurs at a load smaller than the critical one, so the total elastic energy has not yet reached its maximum value. Thus, the bar retains the ability to elastic deformation, the stable shape of the bar is maintained. Despite the HMH condition being met, further loading will not cause the bar to fail, as it is possible to activate a kinematically acceptable deformation mechanism that

i wynikające z tego odkształcenia przemieszczenie poprzeczne przekrojów pręta (Rys.10 b). Poniżej wyjaśniono mechanizm powstania odkształcenia postaciowego i określono wartość obciążenia, przy którym ono się pojawi.

will ensure further deformation in the elastic range. It is shear deformation and the resulting transverse displacement of the bar sections. Explanation of how the mechanism of shear deformation appears and how to determine the load at which it appears is closed in this chapter.

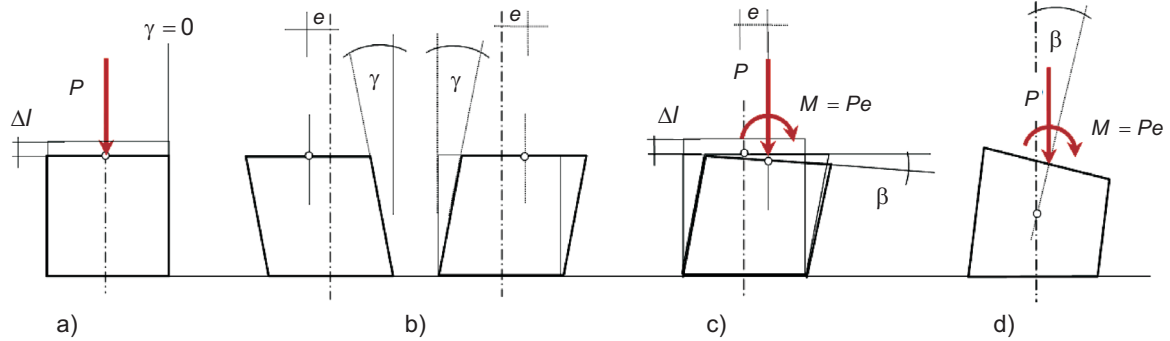


Fig. 10. Deformations of a compressed column: a) stage I – axial shortening without deflection  $\Delta l \neq 0$ ; b) bifurcation of the equilibrium state at  $P = P^*$ ,  $e$  – eccentricity of the force application point due to shear,  $\gamma$  – angle of shear strain; c) deformation of transitional stage: angle of shear  $\gamma \neq 0$ , axial shortening  $\Delta l \neq 0$ , cross-section rotation due to column deflection  $\beta \neq 0$ ; d) deformation of stage III:  $\beta$  – angle of rotation of a column of an incompressible axis;  $P$  and  $M = Pe$  – components of the load reduced to the centroid of the column cross-section

Rys. 10. Deformacje pręta ściskanego: a) etap I – skrócenie prostoliniowej osi pręta  $\Delta l \neq 0$ ; b) bifurkacja stanu równowagi  $P = P^*$ ,  $e$  – mimośród punktu przyłożenia siły wywołany odkształceniem postaciowym,  $\gamma$  – kąt odkształcenia postaciowego; c) odkształcenie etapu przejściowego: kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma \neq 0$ , skrócenie  $\Delta l \neq 0$ , obrót przekroju wywołany zakrzywieniem osi pręta  $\beta \neq 0$ ; d) odkształcenie etapu III:  $\beta$  – kąt obrotu przekroju pręta o osi nieściśliwej;  $P$  i  $M = Pe$  – składowe obciążenia zredukowanego do środka ciężkości przekroju

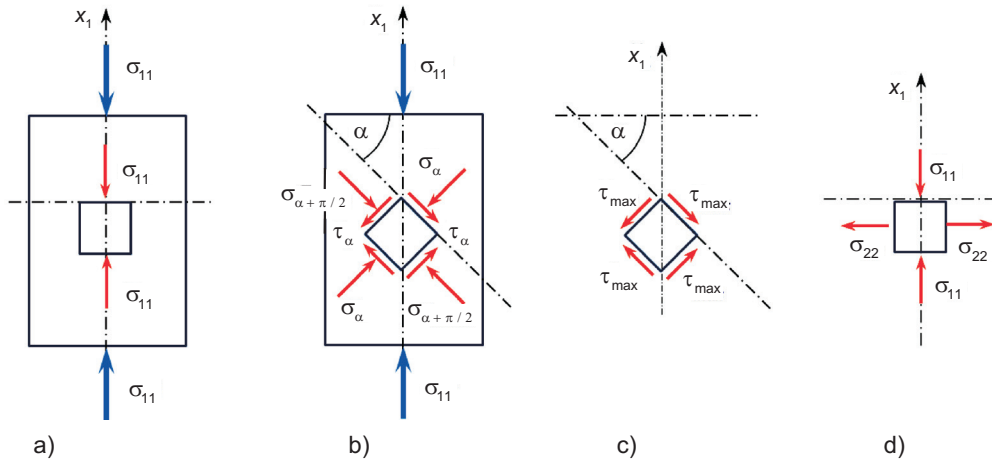


Fig. 11. Energy equivalent stress states: a) state 1D,  $\sigma_{11} = P/A$ , b) state 1D,  $\sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha}$ ,  $\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha + \pi/2}$  in cross-section  $\alpha = \pi/4$ ,  $\alpha = 3/4 \pi$ , c) pure shear,  $\tau_{max}$  in cross-section  $\alpha = \pi/4$ ,  $\alpha = 3/4 \pi$ , d) state 2D,  $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$  in cross-section  $\alpha = 0$  and  $\alpha = \pi/2$

Rys. 11. Stany naprężenia równoważne energetycznie: a) stan 1D,  $\sigma_{11} = P/A$ , b) stan 1D,  $\sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha}$ ,  $\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha + \pi/2}$  w przekroju  $\alpha = \pi/4$ ,  $\alpha = 3/4 \pi$ , c) czyste ścinanie,  $\tau_{max}$  w przekroju  $\alpha = \pi/4$ ,  $\alpha = 3/4 \pi$ , d) stan 2D,  $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$  w przekroju  $\alpha = 0$  i  $\alpha = \pi/2$

W pracy rozważamy stany równoważne energetycznie, określone składowymi stanu naprężenia, przy których energia odkształcenia postaciowego  $\Phi_p$  przyjmuje tę samą wartość. Wartość energii  $\Phi_p$  określono w przypadku stanów naprężenia zilustrowanych na Rys. 11. Na rysunku uwzględniono

In the following, we consider stress states, for which the shear energy  $\Phi_p$  takes the same value. The value of shear energy  $\Phi_p$  was determined for the energy equivalent stress states defined by components, as illustrated in Fig. 11. The following possibilities are considered: state 1D in a plane

stan 1D w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta:  $\Phi_p = \frac{1}{6G} \sigma_{11}$ , gdzie  $G$  to moduł sprężystości postaciowej, (Rys. 11a); stan 1D w płaszczyźnie nachylonej pod kątem  $\alpha$  do płaszczyzny przekroju prostopadłej do osi  $\Phi_p = \frac{1}{6G} \sqrt{\sigma_\alpha^2 + 3\tau_\alpha^2}$ , (Rys.11b); czyste ścinanie (wyczerpanie nośności na ścinanie przekroju pręta):  $\Phi_p = \frac{1}{6G} \sqrt{3}\tau_\alpha$ , (Rys. 11c); stan dwuwymiarowy określony składowymi głównymi naprężeniami:  $\Phi_p = \frac{1}{6G} \sqrt{3}\sigma_{11}$ , (Rys.11d).

W przekrojach nachylonych pod kątem  $\alpha$  stan naprężenia jest określony składowymi  $\sigma_\alpha = \sigma_{11} \cos^2 \alpha$  i  $\tau_\alpha = 0,5 \sigma_{11} \sin 2\alpha$ , gdzie  $\sigma_{11} = P/A$  jest naprężeniem normalnym w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta. W tym przypadku warunek HMM ma postać

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + 3\tau_\alpha^2}. \quad (1)$$

W płaszczyźnie  $\alpha = \pi/4$ ,  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = \tau_{\alpha=\pi/4} = \frac{1}{2} \sigma_{11}$ , a warunek HMM można zapisać w postaci:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_{11}^2 + \frac{3}{4}\sigma_{11}^2} = \sigma_{11}. \quad (2)$$

W przypadku hipotezy HMM naprężenie zredukowane jest więc równe naprężeniu normalnemu w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta. W przypadku obciążenia  $P = P^*$  otrzymujemy

$$\sigma_{red} = \sigma_{11} = \sigma^*. \quad (3)$$

Zauważmy również, że skoro  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = \tau_{\alpha=\pi/4}$  wartość składowych wyznaczona na podstawie hipotezy HMM jest taka sama, jak to wynika z rachunku tensorowego

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{\alpha=\pi/4}^2 + 3\tau_{\alpha=\pi/4}^2} = 2\tau_{\alpha=\pi/4}, \quad \tau_{\alpha=\pi/4} = 0,5 \sigma_{red}. \quad (4)$$

oraz  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = 0,5 \sigma_{red}$ . Łatwo sprawdzić, że w przypadku hipotezy Treski naprężenie zredukowane jest równe

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + 4\tau_\alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_{11}^2 + \frac{4}{4}\sigma_{11}^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sigma_{11}, \quad (5)$$

a składowe naprężenia są równe odpowiednio,  $\tau_{\alpha=\pi/4} = 0,45 \sigma_{11}$  i  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = 0,45 \sigma_{11}$ .

Stan czystego ścinania można określić składową w płaszczyźnie  $\alpha = \pi/4$  (Rys. 11c), wtedy

$$\sigma_{red\_cs} = \sqrt{3}\tau_{max}, \quad \tau_{max} = \sigma_{11} / \sqrt{3}. \quad (6)$$

perpendicular to the column axis:  $\Phi_p = \frac{1}{6G} \sigma_{11}$ , where  $G$  is the modulus of shear elasticity (Fig. 11a); state 1D in a plane inclined at an angle of  $\alpha$  to the column cross-section perpendicular to axis:  $\Phi_p = \frac{1}{6G} \sqrt{\sigma_\alpha^2 + 3\tau_\alpha^2}$  (Fig. 11b); pure shear (shear failure of the cross-section)  $\Phi_p = \frac{1}{6G} \sqrt{3}\tau_\alpha$ , (Fig. 11c); state 2D defined by the principal stress components:  $\Phi_p = \frac{1}{6G} \sqrt{3}\sigma_{11}$ , (Fig. 11d).

In the cross-sections inclined at an angle of  $\alpha$ , the stress state is defined by components  $\sigma_\alpha = \sigma_{11} \cos^2 \alpha$  and  $\tau_\alpha = 0,5 \sigma_{11} \sin 2\alpha$ , where  $\sigma_{11} = P/A$  is the normal stress in the plane perpendicular to the column axis. The HMM criterion is expressed as

Considering that in a plane  $\alpha = \pi/4$ ,  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = \tau_{\alpha=\pi/4} = \frac{1}{2} \sigma_{11}$  the HMM criterion can be expressed as

In the HMM criterion, the reduced stress is therefore equal to the normal stress in a plane perpendicular to the column axis. In the case of load  $P = P^*$  we get

It is also worth noting that since  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = \tau_{\alpha=\pi/4}$  the values of stress components obtained with the HMM criterion are the same as the values obtained with the tensor algebra

and  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = 0,5 \sigma_{red}$ . It can be easily checked that in the case of the Tresca hypothesis the reduced stress equals

and the stress components are:  $\tau_{\alpha=\pi/4} = 0,45 \sigma_{11}$  and  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = 0,45 \sigma_{11}$ .

The pure shear state can be defined by the stress component in the plane  $\alpha = \pi/4$  (Fig. 11c), then

lub na podstawie równowaznego schematu 2D, przedstawionego na Rys. 11d ( $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ )

$$\sigma_{red\_cs} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2} + \sigma_{22} \sigma_{22} = \sqrt{3} \sigma_{11}. \quad (7)$$

W przyjętym modelu zakłada się, że energia odkształcenia postaciowego osiąga wartość maksymalną  $\Phi_{max}$ , przy obciążeniu  $P = P^*$  i zachowaniu postaci prostoliniowej pręta. Stan jest określony naprężeniem normalnym  $\sigma^* = P^*/A$ . Po osiągnięciu maksymalnej wartości energii odkształcenia postaciowego  $\Phi_{max}$  dalsze obciążenie przy zachowaniu postaci prostoliniowej pręta spowodowałoby uplastycznienie pręta. Uplastycznienie jednak nie następuje, bowiem istniejące więzy dopuszczają mechanizm sprężystego odkształcenia postaciowego, którego energia jest mniejsza od energii odkształcenia plastycznego przy zachowaniu postaci prostoliniowej. Pręt wybiera ścieżkę o mniejszym wydatku energetycznym. Zauważmy, że w przypadku stanu określonego energią  $\Phi_{max}$ , w płaszczyźnie maksymalnego naprężenia stycznego, wartości składowych naprężenia są mniejsze od wartości maksymalnych:  $\tau_{\alpha}^* = 1/2 \sigma^* < \tau_{max}$ ,  $\sigma_{\alpha}^* = 1/2 \sigma^* < \sigma_k$ . Dalsze obciążenie pręta, siłą  $P > P^*$  powoduje, że w płaszczyźnie maksymalnego naprężenia stycznego następuje wzrost obydwu składowych naprężenia od wartości  $\tau_{\alpha}^* = \sigma_{\alpha}^* = 1/2 \sigma^*$ , do maksymalnej wartości, jaką może przenieść przekrój, którą określono przy założeniu czystego ścinania na podstawie wzoru (6), przy czym  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = \tau_{\alpha=\pi/4}$ .

Zauważmy, że w modelu Eulera naprężenie krytyczne  $\sigma_k$  zostało wyznaczone przy założeniu strzałki ugięcia pręta  $f \rightarrow 0$ . Przy założeniu prostoliniowej osi pręta, maksymalna wartość naprężenia stycznego wystąpi w przekroju  $\alpha = \pi/4$  przy obciążeniu krytycznym, jest ona równa  $\tau_{\alpha=\pi/4}^k = 1/2 \sigma_k$ . Uwzględniając wzory (3), (4) i (7), można zapisać:

$$\sigma_{red} = 2\tau_{\alpha=\pi/4}^k = 2 \cdot 1/2 \sigma_k = \sqrt{3} \sigma^*, \quad \sigma^* = \frac{\sigma_k}{\sqrt{3}}. \quad (8)$$

Wobec  $\sigma = P/A$ , można określić wartość siły  $P^*$ :

$$P^* = \frac{P_k}{\sqrt{3}}. \quad (9)$$

Wyniki przeprowadzonego eksperymentu [2, 5-7, 12-16] potwierdziły prawidłowość wzoru (9), a ich zestawienie widoczne jest w kolumnie 8 Tabl. 1.

Wzór (8) określa związek pomiędzy naprężeniem normalnym pręta pod obciążeniem  $P^*$  a naprężeniem krytycznym.

Uwzględniając, że  $\tau_{\alpha=\pi/4}^* = \sigma_{\alpha=\pi/4}^* = \frac{1}{2} \sigma^*$ , wzór (8) można zapisać w postaci

$$\frac{1}{2} \sigma^* = \frac{1}{2} \frac{\sigma_k}{\sqrt{3}}, \quad \tau_{\alpha=\pi/4}^* = \sigma_{\alpha=\pi/4}^* = \frac{\sigma_{dop}}{\sqrt{3}}, \quad (10)$$

or using an equivalent 2D model shown in Fig. 11d ( $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ )

The model assumes that the shear strain energy reaches the maximum value of  $\Phi_{max}$ , at a load of  $P = P^*$  and without any deviation from straightness. This state is defined by the normal stress  $\sigma^* = P^*/A$ . After the maximum shear strain energy  $\Phi_{max}$  has been reached, further loading without deviation from straightness would cause yielding of the bar. This, however, does not take place due to the existing constraints allow elastic shear deformation, with a smaller energy requirement than plastic deformation of a straight bar. Thus the column “chooses” the elastic shear as a lower energy option. Note that, at  $P = P^*$ , in the plane of the maximum shear stress, the values of the stress components are below the maximum levels:  $\tau_{\alpha}^* = 1/2 \sigma^* < \tau_{max}$ ,  $\sigma_{\alpha}^* = 1/2 \sigma^* < \sigma_k$ . Loading the column with a load of  $P > P^*$  increases both the stress components in this plane, i.e. from  $\tau_{\alpha}^* = \sigma_{\alpha}^* = 1/2 \sigma^*$ , to the maximum level that can be carried by the cross-section, determined for the condition of pure shear and is given by equation (6), noting that  $\sigma_{\alpha=\pi/4} = \tau_{\alpha=\pi/4}$ .

Notice, that the Euler critical stress  $\sigma_k$  was determined assuming max deflection of the column of  $f \rightarrow 0$ . Assuming that bar axis is rectilinear, the maximum value of the shear stress will occur in the cross-section  $\alpha = \pi/4$  at the critical load. It is equal to  $\tau_{\alpha=\pi/4}^k = 1/2 \sigma_k$ . Taking equations (3), (4) and (7) we obtain:

With  $\sigma = P/A$ , the value of  $P^*$  can be calculated as follows:

The results of the experiment [2, 5-7, 12-16], given in column 8 of Table 1, confirm the validity of the equation (9).

Equation (8) describes the relationship between the normal stress induced by the load  $P^*$  and the critical stress.

Since  $\tau_{\alpha=\pi/4}^* = \sigma_{\alpha=\pi/4}^* = \frac{1}{2} \sigma^*$ , the equation (8) can be rewritten to the form:

w której określono związek pomiędzy składową naprężenia (styczną lub normalną) w płaszczyźnie  $\alpha = \pi/4$ , przy obciążeniu  $P^*$ , a obciążeniem krytycznym. Przy obciążeniu krytycznym naprężenie  $\sigma_{dop} = \sigma_{\alpha k} = \tau_{\alpha k} = 1/2 \sigma_k$ , jest największą (dopuszczalną) wartością składowej naprężenia w przekroju  $\alpha = \pi/4$ , jaka może wystąpić w przypadku pręta ściskanego.

Względem osi pręta odkształcenie postaciowe jest odkształceniem niesymetrycznym. Możliwe są dwa symetrycznie usytuowane położenia równowagi, określone kątami  $\gamma$  i  $-\gamma$ , co wyjaśniono na Rys. 10b. Wybór jednej z dwóch ścieżek równowagi definiuje ten stan jako punkt bifurkacji. Graniczna wartość obciążenia pierwszego etapu deformacji  $P^*$  jest więc obciążeniem, przy którym występuje bifurkacja stanu równowagi.

### Ewolucja deformacji etapu I na wykresach ścieżek równowagi

Ewolucja deformacji pręta ściskanego najczęściej analizowana jest na podstawie wykresu  $P = P(f)$ , co może to być powodem błędnej interpretacji przebiegu zjawisk etapu I deformacji. Obserwacja zmian wszystkich parametrów układu, w tym przemieszczenia  $u$ , odkształcenia  $\varepsilon$  i naprężenia  $\sigma$  jest możliwa na podstawie analizy ścieżek równowagi  $P = P(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  i  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . Koniec etapu I jest określony parametrami  $P^*$ ,  $u^*$  i  $\varepsilon^*$ , które są współrzędnymi punktu pojawienia się pierwszego przemieszczenia poprzecznego pręta, na Rys. 3-8 zaznaczonymi jako 1, 3, 5, 7, 9, 11 i odpowiednio 1', 2', ..., 11'. W omawianym przypadku dużych smukłości odkształcenia etapów I i II są niewielkie:  $\varepsilon^* \leq 0,061$ ,  $\varepsilon_z \leq 0,106$ , natomiast skrócenie pręta  $u^* = P^* l / EA \leq 0,19$  mm. Szczegółowe dane zebrano w Tabl. 1.

### 4.3. DRUGI ETAP DEFORMACJI – PRZEJŚCIOWY

Konsekwencją pojawienia się odkształcenia postaciowego jest przesunięcie punktu przyłożenia siły względem położenia początkowego środka ciężkości (mimośród  $e$ ), powstanie momentu zginającego  $M = Pe$  i inicjacja zginania (Rys. 10c). Pojawienie się mimośrodu obciążenia powoduje zmianę stanu naprężenia z jednoosiowego ściskania na ściskanie mimośrodowe pręta ściśliwego. Pręt przechodzi do drugiego, przejściowego, etapu deformacji, który występuje przy obciążeniu w zakresie  $P^* > P > P_z$ , na Rys. 3-8 jest oznaczony odcinkami 1-2, 3-4, ..., 11-12. Odkształcenie drugiego etapu obciążania jest sumą skrócenia osi, odkształcenia postaciowego i ugięcia osi pręta. Praca wykonana przez siłę  $P > P^*$  na tym etapie obciążania jest równoważna energii zgromadzonej w przecie, będącą sumą energii ściskania, energii odkształcenia postaciowego i energii zginania.

which describes the relationship between a stress component (tangent or normal) in plane  $\alpha = \pi/4$ , at load  $P^*$ , and the critical load. At the critical load, the value of  $\sigma_{dop} = \sigma_{\alpha k} = \tau_{\alpha k} = 1/2 \sigma_k$  is the maximum (allowable) value of the stress component in the cross-section  $\alpha = \pi/4$  of a compressed column.

Shear strain is asymmetric. Two symmetrically located equilibrium positions are possible, defined by the angles  $\gamma$  and  $-\gamma$ , as it is explained in Fig. 10b. The choice of one of the two possible equilibrium paths defines this state as a bifurcation point. Therefore, the max load of the first stage of deformation  $P^*$  is the load at which the bifurcation of equilibrium occurs.

### Evolution of deformations at the first stage on diagrams of equilibrium paths

The evolution of deformation of a compressed bar is most often analyzed based on the  $P = P(f)$  diagram, that may be the reason of a incorrect interpretation of the phenomena occurring at the stage I of subcritical deformations. Variation of all system parameters, including displacement  $u$ , strain  $\varepsilon$  and stress  $\sigma$  is possible through the analysis of the equilibrium paths  $P = P(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  and  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . The end of stage I is defined by the parameters  $P^*$ ,  $u^*$  and  $\varepsilon^*$ , which are the coordinates of the point at which the first lateral displacement of the column occurs. In Figs. 3-8 they are marked as 1, 3, 5, 7, 9, 11 and 1', 2', ..., 11' respectively. In the analysed case of high slenderness the deformations of stages I and II strains are small, namely  $\varepsilon^* \leq 0,061$ ,  $\varepsilon_z \leq 0,106$  while the shortening of the column  $u^* = P^* l / EA \leq 0,19$  mm. Detailed data are summarized in the Table 1.

### 4.3. SECOND, TRANSITIONAL PHASE OF DEFORMATION

The effect of the appearance of shear is a shift of the load application point from the initial position of the cross-sectional centroid (eccentricity  $e$ ), resulting in initiation of a bending moment of  $M = Pe$  and bending of the column as consequence (Fig. 10c). Eccentricity of loading changes the stress state from uniaxial compression to eccentric compression of a compressible column. The second, transitional stage of deformation occurs at a load in the range  $P^* > P > P_z$ , in Fig. 3-8 represented by sections 1-2, 3-4, ..., 11-12. The total strain of stage II is the sum of axial shortening, shear and deflection of the column axis. The work done by the force  $P > P^*$  at this stage of loading is balanced by the sum of the compressive, shear and bending strain energies.

## Ewolucja deformacji i sztywność pręta etapu przejściowego

W I etapie deformacji oraz w zdecydowanie większej części etapu II (ok. 80%), zmiany odkształcenia  $\varepsilon$  i siły  $P$ , są liniową funkcją przemieszczenia  $u$  (Rys. 3a, b), zwiększanie obciążenia powoduje przyrost odkształcenia  $\varepsilon$ , proporcjonalny do działającej siły. Przy przejściu z etapu I do etapu II, nie obserwuje się zmiany kąta nachylenia stycznej na wykresach  $P = P(u)$  i  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ , (Rys. 3 i 4). Dopiero przy obciążeniu bliskiemu sile  $P_z$ , szybkość zmian odkształcenia  $\varepsilon$  maleje. Po przejściu do etapu III nie obserwuje się zmian długości osi pręta,  $\varepsilon = \text{const}$ . Ugięta oś pręta, nie ulega odkształceniu wzdłużnemu, pręt wykazuje cechy pręta o osi nieściśliwej.

Z drugiej strony, w całym zakresie etapu II deformacji, wartość przyrostów skrócenia  $\varepsilon$  zależy od strzałki ugięcia  $f$  (Rys. 3c). Początkowo udział zginania w całkowitym odkształceniu pręta jest bardzo mały, obserwuje się nieznaczny przyrost strzałki ugięcia. Obciążanie pręta powoduje zwiększanie mimośrod  $e$  i momentu zginającego  $M = Pe$ . Zwiększa się wpływ zginania, które ostatecznie staje się dominujące. Po przejściu do III etapu pręt ulega wyboczeniu zachowując nieściśliwość osi.

Ze względu na zakrzywienie osi pręta w pośrednim etapie deformacji należy więc uwzględnić dwa rodzaje sztywności pręta: sztywność wzdłużną, związaną z odkształceniem  $\varepsilon$  i sztywność kierunkową, w kierunku działającej siły. Wartość sztywności wzdłużnej jest stała w I etapie deformacji oraz w zdecydowanie większej części etapu II, dopiero przy obciążeniu  $P \rightarrow P_z$  szybko maleje. W II etapie sztywność kierunkową można określić niezależnie od sztywności wzdłużnej. W III etapie deformacji, gdy pręt wykazuje cechy pręta o osi nieściśliwej, sztywność wyboczonego pręta jest sztywnością kierunkową. Przejście od II do III etapu deformacji następuje, gdy wartość sztywności wzdłużnej jest równa sztywności kierunkowej pręta ugiętego.

Miarą sztywności wzdłużnej pręta jest kąt nachylenia stycznej do krzywej  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . Odpowiednie wykresy zestawiono na Rys. 9. Wartość sztywności związana ze smukłością pręta jest określona wartością kąta nachylenia krzywych  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . W przypadku prętów smukłych różnice sztywności są niewielkie. Większe różnice pojawiają się w przypadku średnich smukłości. W tym przypadku spadek sztywności jest spowodowany zmniejszeniem sprężystego rdzenia w wyniku obecności odkształceń trwałych.

## Evolution of deformation and stiffness at the transitional stage

In the first stage of deformation and in a considerable part of stage II (approx. 80%), changes in deformation  $\varepsilon$  and load  $P$  are a linear function of the displacement  $u$  (Fig. 3a, b), increasing the load causes an rise of deformation  $\varepsilon$ , proportional to the value of the acting force. At the transition from stage I to stage II, no variation of the slope is observed in the graphs  $P = P(u)$  and  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ , (Fig. 3 and 4). Only when the load is close to the limit  $P_z$ , the rate of deformation changes  $\varepsilon$  decreases. After moving to stage III, no variation in the length of the rod axis are observed,  $\varepsilon = \text{const}$ . The bent axis of the bar does not undergo longitudinal deformation, the bar behave as a bar of incompressible axis.

On the other hand, in the entire range of stage II deformation, the values of the shortening increments  $\varepsilon$  depend on the value of the max deflection  $f$  (Fig. 3c). At the beginning of the stage II, the contribution of bending in the total bar deformation is very small, a slight increase of the deflection is observed. Increase of loading causes a rise of both eccentricity  $e$  and bending moment  $M = Pe$ . The bending effect is strengthening and finally, bending dominates. After moving to the stage III, the bar buckles while maintaining the incompressibility of the axis.

Due to existing curvature of the rod axis, in the transitional stage of deformation, two types of bar stiffness should be considered: longitudinal stiffness that relates to strain  $\varepsilon$  and directional stiffness, in the direction of the acting force. The value of the longitudinal stiffness is constant in the first stage of deformation and in a considerable part of stage II, it decreases quickly only under the load  $P \rightarrow P_z$ . In the stage II, the directional stiffness can be determined independently of the longitudinal stiffness. In the stage III of deformation, when the bar reveals the features of incompressibility of the axis, the stiffness of the buckled bar is the directional stiffness. The transition from the stage II to III takes place when the value of longitudinal stiffness is equal to the directional stiffness of the buckled bar.

The measure of the longitudinal stiffness of a bar is the slope angle of the tangent to the curve  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . The relevant diagrams are presented in Fig. 9. The value of stiffness depends on the slenderness of the bar, it is determined by the value of the angle of the curves. In the case of slender bars, the differences in stiffness are slight. Larger differences appear in the case of medium slenderness. In this case, the decrease of stiffness is due to the reduction of the elastic core due to the presence of plastic deformations.



#### 4.4. TRZECI ETAP DEFORMACJI – UGIĘCIE PRĘTA O OSI NIEŚCIŚLIWEJ

Dominującym obciążeniem III etapu deformacji jest zginanie. Pręt wykazuje cechy pręta o osi nieściśliwej, (Rys. 10d). O przejściu do trzeciego etapu deformacji decyduje warunek sztywności. Zmiana modułu deformacji nastąpi, gdy sztywność wzdłużna pręta jest równa sztywności kierunkowej pręta ugiętego. Na wykresach ścieżek równowagi punkty przejścia z II do III etapu są punktami przegięcia krzywych  $f = f(u)$  (punkty 2', 4', 6', 8', 10' i 12' oraz odpowiednio 2, 4, ..., 12 i 2'', 4'', ..., 12'' na pozostałych wykresach). Początek deformacji etapu III jest określony punktem, w którym pręt wykazuje już cechę nieściśliwości osi,  $\varepsilon = \text{const}$ . Poprzedza go silne zakrzywienie wykresów,  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ ,  $P = P(u)$ . W przypadku prętów smukłych, po przejściu do etapu trzeciego deformacje pozostają w zakresie sprężystym (Rys. 5-7):  $\sigma_k < R_H$  lub  $\sigma_k < R_{0,01}$ . Obserwuje się sprężyste ugięcie pręta o osi nieściśliwej. Pomimo wzrostu strzałki ugięcia  $f$  i zbliżenia końców pręta  $u$  utrzymuje się stała wartość odkształcenia  $\varepsilon = \text{const}$ . Nieściśliwość osi pręta wynika z obserwacji ścieżek równowagi: styczne do krzywych  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  i  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  są poziome (Rys. 3); krzywe wykresów naprężenia w skrajnych włóknach pręta,  $\sigma_c - \sigma_g$  i  $\sigma_c + \sigma_g$ , oscylują wokół linii pionowej (Rys. 5b i 6b); obliczona wartość skrócenia krytycznego  $\varepsilon_k$  odpowiada wartości skrócenia  $\varepsilon_z$  pomierzonej w eksperymencie (kolumny 15 i 16 w Tabl. 1).

Po przejściu do III etapu deformacji przekroje pręta pozostają mimośrodowo ściskane. Zauważmy, że siła pozostaje wewnątrz rdzenia przekroju najbardziej oddalonego od osi pręta. Nawet w przypadku największej smukłości  $\lambda = 235,6$  strzałka  $f_z = 0,65$  mm jest mniejsza od współrzędnej rdzenia względem środka przekroju pręta  $e = b/6 = 5,88$  mm/6 = 0,98 mm. Koniec deformacji etapu III jest określony stanem krytycznym. Wystąpi, gdy energia sprężysta odkształcenia osiągnie wartość maksymalną  $U_H$ . Wtedy pręt utraci zdolność odkształcenia sprężystego, w całej objętości pręta pojawiają się deformacje trwałe.

W przypadku średnich smukłości deformacje trwałe pojawiają się już w zakresie dokrytycznym, co wyjaśniono w pracy [2]. Stan graniczny jest stanem przejścia z drugiego do trzeciego etapu deformacji. Maksymalna wartość siły, jaką może przenieść pręt  $P_{max} = P_z = P_n$  jest określona nośnością przegubu plastycznego, który w tym przypadku utworzy się w najbardziej wyężonym przekroju, po czym następuje osłabienie pręta (odpowiednio krzywe  $c$  i  $d$  na Rys. 1).

#### 4.4. THIRD PHASE OF DEFORMATION – DEFLECTION OF A COLUMN OF AN INCOMPRESSIBLE AXIS

The dominant loading of the third stage of deformation is bending of the bar that exhibits the feature of the axis incompressibility, (Fig. 10d). The stiffness condition determines the transition to the stage III of deformation. The deformation stage will change when the bar longitudinal stiffness equals the directional stiffness of the column of the bent axis. In the graphs of the equilibrium paths, the transition points from the stage II to III are the points of inflection of the curves  $f = f(u)$  (points 2', 4', 6', 8', 10' and 12' and respectively 2, 4, ..., 12 and 2'', 4'', ..., 12'' in the remaining diagrams). The beginning of the stage III is determined by the point at which the bar already exhibits the feature of axis incompressibility,  $\varepsilon = \text{const}$ . It is preceded by a strong curvature of the graphs,  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ ,  $P = P(u)$ . In the case of slender bars, after switching to the stage III, the deformations remain in the elastic range (Fig. 5-7):  $\sigma_k < R_H$  or  $\sigma_k < R_{0,01}$ , one observe elastic deflection of the incompressible axis bar. Although the max deflection  $f$  and the displacement  $u$  increases, the constant value of the deformation  $\varepsilon = \text{const}$  is maintained. The feature of incompressibility of the rod axis follow the observation of the equilibrium paths. Notice that: the tangents to the curves  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  and  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  are horizontal (Fig. 3); the shape of the stress curves in the most outer fibers of the bar,  $\sigma_c - \sigma_g$  and  $\sigma_c + \sigma_g$ , oscillate around the vertical line (Fig. 5b and 6b); the calculated value of the critical shortening  $\varepsilon_k$  corresponds to the shortening  $\varepsilon_z$  measured experimentally (columns 15 and 16 of Table 1).

After the transition to the stage III of deformation, the bar sections remain eccentrically compressed. Note that, the force remains inside the core of the max deflected cross-section. Even in the case of the biggest slenderness  $\lambda = 235,6$ , the max deflection  $f_z = 0,65$  mm is smaller than the core coordinate (distance from the bar cross-section center)  $e = b/6 = 5,88$  mm/6 = 0,98 mm. The end of stage III is determined by a critical state. It will occur when the elastic energy of deformation reaches its maximum value  $U_H$ . Then the bar loses its capacity to elastic deformation, plastic deformations appear inside the entire volume of the bar.

In the case of medium slenderness, plastic deformations appear in the subcritical range, as explained in [2]. The limit state is the state of transition from the stage II to III of deformation. The maximum value of the force that the bar can transfer,  $P_{max} = P_z = P_n$ , is determined by the bearing capacity of the plastic hinge, which in this case will be

#### 4.5. STAN KRYTYCZNY – PRĘTY SMUKŁE

Stan krytyczny wystąpi, gdy energia sprężysta odkształcenia

osiągnie wartość maksymalną  $U_H = \frac{1}{2} \pi A i \sqrt{\frac{R_{spr}^2}{E}}$ .  $U_H$  jest

maksymalną wartością energii sprężystej odkształcenia normalnego, jaka może być zgromadzona w pręcie ściskany. Jest to stan, w którym naprężenie normalne jest równe granicy  $R_{spr} = R_{0,01}$  lub, w przypadku materiału wykazującego charakterystykę liniowo-sprężystą,  $R_{spr} = R_H$ . Pomimo że wartość maksymalna naprężenia normalnego w skrajnym ściskany włóknie pozostaje mniejsza od wartości granicznej,  $\sigma_c + \sigma_g < R_{0,01}$  (Rys. 5-7), cała objętość pręta ulega uplastycznieniu. Zjawisko zostało opisane w [2, 5, 6, 12, 14]. Jest to stan, w którym pręt traci zdolność do odkształcenia sprężystego.

W Tabl. 2 zestawiono wyniki obliczeń energii sprężystej na podstawie danych z eksperymentu opisanego w rozdziale 3. Maksymalna wartość energii odkształcenia sprężystego  $U_H$ , jaka może być zgromadzona w pręcie, równa się sumie energii ściskania  $U_{sc}$  oraz dwukrotności energii zginania  $U_g$ , jest równoważna sumie wykonanych prac  $2L_g$  i  $L_{sc}$ ,  $U_H = 2U_g + U_{sc} = 2L_g + L_{sc}$ . Podobny wynik uzyskano w pracach [5, 6].

Table 2. Verification of the critical energy criterion  
Tablica 2. Weryfikacja energetycznego kryterium stanu krytycznego

No. Nr	$\lambda_{ef}$ [-]	$U_H$ [J]	$\Delta L_g$ [J]	$\Delta L_{sc}$ [J]	$2L_g + L_{sc}$ [J]	col. 6/col. 3 [-] kol. 6/kol. 3 [-]
1	2	3	4	5	6	7
1.	235.6	22.895	10.245	0.9706	21.461	0.937
2.	141.4	22.856	8.1088	4.2716	20.849	0.912
3.	101.3	22.876	3.6192	13.149	20.387	0.891

In the Table / W tablicy:

$U_H = \frac{1}{2} \pi A i \sqrt{\frac{R_{0,01}^2}{E}}$ ,  $L_g = P_k \Delta l_g$  – work done by the force when compressing a column of an incompressible axis / praca siły przy ściskaniu pręta wyboconego o osi nieściśliwej,

$L_{sc} = \frac{1}{2} P_k \Delta l_{sc}$  – work done by the force in compression of a straight column / praca siły przy ściskaniu pręta prostego,

$\Delta u_g$  – shortening of the distance between the ends of an incompressible buckled column (stage III) / zbliżenie końców pręta wyboconego o osi nieściśliwej (etap III),

$\Delta u_{sc}$  – shortening of a compressible straight axis column (stages I and II) / skrócenie pręta ściśliwego (etapy I i II).

Wartość siły krytycznej  $P_k$  jest określona maksimum na wykresach  $P = P(u)$  i  $P = P(f)$ . Siły krytyczne  $P_{56}$ ,  $P_{34}$  prętów o smukłości  $\lambda = 101,3$  i  $\lambda = 141,4$  oraz krytyczne wartości odkształcenia  $\varepsilon_{56}$ ,  $\varepsilon_{34}$  zaznaczono na Rys. 3. Odpowiednie wartości w przypadku smukłości  $\lambda = 235,6$  zamieszczono w Tabl. 1. W przypadku prętów smukłych w III etapie defor-

formed in the most strained cross-section, followed by the weakening of the bar (respectively  $c$  and  $d$  curves in Fig. 1).

#### 4.5. CRITICAL STATE – SLENDER COLUMNS

The critical state occurs when the elastic strain energy

reach the maximum value of  $U_H = \frac{1}{2} \pi A i \sqrt{\frac{R_{spr}^2}{E}}$ .  $U_H$  is

the maximum value of the elastic energy of normal strain that can be stored in the compressed column under analysis. In this state the normal stress equals the limit of  $R_{el} = R_{0,01}$  or, in the case of materials exhibiting linear-elastic behaviour:  $R_{el} = R_H$ . Although the maximum normal stress in the compressed outer fibre remain below the limit level,  $\sigma_c + \sigma_g < R_{0,01}$  (Fig. 5-7), the column undergoes yielding throughout its entire volume. This phenomenon was described in [2, 5, 6, 12, 14]. In this state the column can no longer deform elastically.

Table 2 gives the results of elastic strain energy calculations made using the data obtained in the experiment described in Section 3. The maximum elastic strain energy  $U_H$  that can be stored in the column is the sum of the compressive energy  $U_{sc}$  plus two times the bending energy  $U_g$ , and is equal to the sum of the works done, namely  $2L_g$  and  $L_{sc}$ , i.e.  $U_H = 2U_g + U_{sc} = 2L_g + L_{sc}$ . A similar outcome was obtained in [5, 6].

The critical load value  $P_k$  is determined at the peak of the  $P = P(u)$  and  $P = P(f)$  curves. The critical loads  $P_{56}$ ,  $P_{34}$  for slenderness of  $\lambda = 101.3$  and  $\lambda = 141.4$  and the critical strains  $\varepsilon_{56}$ ,  $\varepsilon_{34}$  are plotted in Fig. 3. The corresponding values for the slenderness of  $\lambda = 235.6$  are given in Table 1. In the case of slender columns, the load  $P$  and strain  $\varepsilon$

macji obciążenie  $P$  i odkształcenie  $\varepsilon$  wykazują małą wrażliwość na zmianę przemieszczeń  $u$  i  $f$ . Długość przedziału przemieszczeń, w którym utrzymuje się wysoka wartość siły jest większa w przypadku większych smukłości.

#### 4.6. STAN GRANICZNY – ŚREDNIE SMUKŁOŚCI

W przypadku średnich smukłości stan graniczny jest określony przejściem od II do III etapu deformacji, które następuje przy obciążeniu maksymalną siłą, jaką może przenieść pręt,  $P_{max} = P_n = P_z$ . Wyodrębniono dwa zakresy smukłości charakteryzujące się różnymi rodzajami utraty stateczności: smukłości, przy których występuje przeskoki konfiguracji pręta oraz smukłości, przy których stan graniczny określony jest niestatecznością materiałową.

##### Stan graniczny określony przeskokami konfiguracji

W przypadku smukłości  $\lambda = 72,5$  i  $\lambda = 50,1$  stan graniczny jest określony niestatecznym położeniem równowagi. Występują bowiem warunki sprzyjające przeskokowi położenia równowagi w pręcie, którego kształt jest bliski prostoliniowemu a naprężenie bliskie granicy  $R_{0,01}$ , siła przyłożona jest mimośrodowo. Obciążenie pręta graniczną wartością siły,  $P_{max} = P_n = P_z$ , powoduje skokowy spadek siły, któremu towarzyszy wzrost strzałki ugięcia. Zjawisko to jest widoczne na wykresach (Rys. 4a, 4c i 7). Podczas przeskoku energia ściskania postaci prostoliniowej pręta przechodzi w energię postaci ugiętej pręta. Przeskokowi towarzyszy tylko nieznaczne wydłużenie osi, co widać na wykresie  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  (Rys.4). Po przeskoku początkowo utrzymuje się stała wartość odkształcenia  $\varepsilon \approx \text{const}$ , pręt zachowuje nieściśliwość, później oś ulega wydłużeniu i zwiększa się wartość naprężenia normalnego, co przedstawiono na Rys.4b i 7b. Ten rodzaj utraty stateczności nazwano stanem granicznym określonym przeskokami konfiguracji.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że zjawisko przeskoku nie jest widoczne w przypadku połączenia punktów pomiarowych na ścieżce równowagi linią ciągłą. Na Rys. 4c i 7 wyniki eksperymentu przedstawiono w postaci zaznaczonych punktów pomiarowych. Przy stałej prędkości próbkowania przeskoki powoduje zwiększenie odległości pomiędzy punktami pomiarowymi. Dla porównania, na Rys. 6c zaznaczono punkty pomiarowe na krzywej  $\sigma = \sigma(f)$  pręta o smukłości  $\lambda = 101,1$ . W tym przypadku przeskoki nie występują, odległość pomiędzy punktami jest równomierna.

##### Stan graniczny określony niestatecznością materiałową

W przypadku smukłości  $\lambda = 30,3$  ścisnaniu pręta towarzyszy zaawansowana deformacja plastyczna. Przejście do etapu III

exhibit low sensitivity to changes of displacements  $u$  and  $f$  in the stage III. The interval of displacements for which the force value remains at a high level is longer for bigger slenderness ratios.

#### 4.6. LIMIT STATE – MEDIUM SLENDERNEES

In the case of columns of medium slenderness, the limit state is defined by the transition from stage II to stage III, which occurs at the maximum load the column can carry,  $P_{max} = P_n = P_z$ . Two ranges of slenderness have been distinguished, taking into account the type of stability loss: slenderness for which a snap-through of the bar configuration occurs, and slenderness for which the limit state is determined by material instability.

##### Snap-through limit state

In the case of slenderness of  $\lambda = 72.5$  and  $\lambda = 50.1$ , the limit state is defined by the unstable equilibrium point. There are conditions close to snap-through situation: in a bar whose shape is close to rectilinear and the stress is close to the  $R_{0,01}$  limit and the applied force is eccentric. After the loading takes the limit value of the force,  $P_{max} = P_n = P_z$ , the force decreases discontinuously, whereas the max deflection increases. This phenomenon can be seen in the graphs of Figs. 4a, 4c and 7. During the snap-through the compressive strain energy turns into the energy of bent column. The axis extends only slightly, as it can be seen in the graph of  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  (Fig. 4). After the snap-through the strain initially does not change,  $\varepsilon \approx \text{const}$ , the column remains incompressible, and next the axis extends and the normal stress value increases, as it can be seen in Fig. 4b and Fig. 7b. This kind of stability loss is called the snap-through limit state.

Note that the snap-through is not visible when measuring points on the equilibrium path are linked with a solid line. In Fig. 4c and Fig. 7, the results of the experiment are presented by measuring points marked with circles. At a constant sample rate, the jump increases the distance between the measuring points. For the sake of comparison, measuring points are plotted on the  $\sigma = \sigma(f)$  curve of a column of slenderness  $\lambda = 101.1$ . In this case, snap-through does not occur, the distance between the points is approximately the same.

##### Material instability limit state

In the case of slenderness ratio of  $\lambda = 30.3$  compression of the column is accompanied by a high level of plastic deformation. Transition to stage III defined by the failure load of  $P_n$  is associated with a loss of stability without a snap-through. The column can still be deforming in the

deformacji, określone siłą niszcząca  $P_n$ , jest związane z utratą stateczności, ale przeskok nie pojawia się. Pręt zachowuje zdolność do odkształcenia podłużnego. Pomimo zmniejszającej się wartości siły oś pręta nadal ulega skróceniu, które jest wprost proporcjonalne do przemieszczenia  $u$  (Rys. 4b). Jednocześnie dużym zmianom przemieszczenia poprzecznego odpowiada niewielkie skrócenie osi pręta  $\varepsilon$  (Rys. 4c). Takie deformacje świadczą o istotnym wpływie odkształcenia postaciowego. Ten rodzaj utraty stateczności nazwano stanem granicznym określonym niestatecznością materiałową. W przypadku, gdy siła znajdzie się poza granicą rdzenia przekroju  $f = 0,98$  mm, szybkość procesu znacznie wzrasta, co jest spowodowane wpływem zginania. Punkty pomiarowe zaznaczono na Rys. 4. W tym przypadku założenie kształtu osi pręta w postaci sinusoidy jest przybliżone, analiza deformacji pręta wyobczonego ma znaczenie tylko jakościowe. Przebieg zjawiska jest podobny do niestateczności pojawiającej się w próbie rozciągania, gdzie dużym deformacjom szybki i wydłużeniu próbki towarzyszy spadek siły.

## 5. WNIOSKI

Właściwe przedstawienie wyników badań jest jednym z zasadniczych elementów prawidłowego opisu występujących zjawisk. W opisie zadania stateczności tradycyjna metoda przedstawiania wykresów w postaci wykresów  $P = P(f)$  nie pozwala na dokładne śledzenie etapów ściskania i wyobczenia pręta. W artykule do analizy deformacji prętów ściskanych wykorzystano wiele sposobów raportowania wyników: wykresy zmian siły  $P = P(u)$ , składowych przemieszczenia  $f = f(u)$ ,  $u = u(f)$  i odkształcenia podłużnego  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(f)$ , jak również zmian naprężenia  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ ,  $\sigma = \sigma(u)$ ,  $\sigma = \sigma(f)$ . Taki sposób przedstawienia wyników daje możliwość pełnego opisu kolejnych etapów deformacji pręta ściskanego i wyznaczenia energii wydatkowanej w procesie ściskania.

W pracy przyjęto definicję, w której warunkiem zachowania statecznego jest możliwość równoważenia pracy wykonanej przez siły zewnętrzne w postaci magazynowanej w pręcie energii odkształcenia sprężystego. Wystąpienie równowagi statecznej pręta jest więc możliwe w przypadku pręta, który zachowuje zdolność do odkształcenia sprężystego. Stan krytyczny jest definiowany utratą zdolności pręta do odkształceń sprężystych – określoną maksymalną wartością energii sprężystej odkształcenia normalnego  $U_H$ . Istotną rolę odgrywa również energia odkształcenia postaciowego. Jej maksymalna wartość zostaje osiągnięta już w zakresie dokrytycznym, co jest powodem pojawienia się odkształcenia postaciowego i dokrytycznego ugięcia pręta. W zakresie dokrytycznym i przy obciążeniu siłą krytyczną pręt zachowuje stateczną ugiętą postać.

longitudinal direction. Despite the decreasing value of the force the column shortens axially and the value of shortening is directly proportional to the displacement  $u$  (Fig. 4b). At the same time, considerable changes of lateral displacement are accompanied by only a slight axial shortening  $\varepsilon$  (Fig. 4c). This indicates a significant role of shear strain. This loss of stability is called the material instability limit state. If the force is shifted beyond the cross-section core boundary, of  $f = 0.98$  mm, the rate of the process increases significantly, which is caused by bending. The measuring points are marked in Fig. 4. In this case, assumption of the sinusoidal shape of the column is an approximation and deformation of a buckled bar can be analysed only qualitatively. Such course of the phenomenon is similar to the instability which occurs during the tensile test, where large necking deformation and elongation of the sample are accompanied by a decrease of the force value.

## 5. CONCLUSIONS

Proper presentation of the study results is one of the essential elements of a correct description of the analysed phenomena. In the description of stability phenomenon the conventional method of presenting the results by  $P = P(f)$  graphs does not allow detailed tracking of the respective compression and buckling stages. In this article several methods were used to present the results of experiment, including graphs of variation of force  $P = P(u)$ , components of displacement  $f = f(u)$ ,  $u = u(f)$ , and longitudinal strain  $\varepsilon = \varepsilon(u)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(f)$ , as well as variation of stress  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ ,  $\sigma = \sigma(u)$ ,  $\sigma = \sigma(f)$ . With this method of presentation it is possible to describe the successive phases of deformation of a compressed column and determine the input of energy during the process of compression.

According to the definition adopted in this article, stable behaviour of the column takes place when the work done by external forces can be stored in the column volume as elastic strain energy. Hence, the column can be in a state of stable equilibrium only in the range of elastic deformation. The critical state is defined by the point at which the column can no longer deform elastically after reaching the maximum elastic strain energy of normal strain  $U_H$ . The shear strain energy also plays an important role. The shear strain energy reaches the maximum level already in the subcritical region, which initiates shear strain and causes subcritical deflection of the column. Within the subcritical range, as well as subjected to the critical load the column remains stable in a deflected shape.

W pracy rozwinięto model ewolucji deformacji pojawiających się podczas ściskania pręta. Zaproponowany model umożliwia pełny opis zjawisk towarzyszących wyboczeniu i utracie stateczności. W zaproponowanym opisie uwzględniono trzy etapy deformacji: skrócenie pręta o osi prostoliniowej, etap przejściowy (odkształcenie postaciowe równoczesne z wyboczeniem pręta ściśliwego) oraz wyboczenie pręta o osi nieściśliwej. Warunkiem zakończenia pierwszego etapu deformacji jest osiągnięcie maksymalnej wartości energii odkształcenia postaciowego, co inicjuje odkształcenie postaciowe i pojawienie się przemieszczenia poprzecznego. O rozpoczęciu etapu trzeciego decyduje warunek sztywności. Ten etap deformacji pojawi się, gdy sztywność pręta w kierunku działającej siły pręta jest równa jego sztywności wzdłużnej. Należy zauważyć, że rozwiązanie Eulera dotyczy wyboczenia pręta o osi nieściśliwej, spełnia więc warunki trzeciego etapu deformacji. Proponowany w artykule model jest uzupełnieniem rozwiązania Eulera o zakres deformacji dokrytycznych.

W opisie deformacji prętów średnich smukłości potwierdzono istnienie zakresu smukłości, w którym utrata stateczności występuje jako stan graniczny określony przeskokami konfiguracji-skokowemu spadkowi siły granicznej towarzyszy wzrost strzałki ugięcia. W przypadku mniejszych smukłości tego zakresu stan graniczny jest określony niestatecznością materiałową.

Podsumowując należy podkreślić, że precyzyjne śledzenie kolejnych etapów procesu ściskania i wyboczenia oraz uzyskanie pełnej informacji o zniszczeniu pręta było możliwe dzięki zestawieniu wszystkich wymienionych w tym artykule sposobów opisu wyników eksperymentu, nie tylko analizy zmian obciążenia i przemieszczenia poprzecznego, ale również zmian stanu naprężenia, przemieszczenia i odkształcenia wzdłużnego. Zaproponowany w tej pracy model stanowi rozwinięcie i istotne uzupełnienie modeli wykorzystywanych w literaturze [8, 9, 17-19]. Dotychczasowa interpretacja wyników badań eksperymentalnych na podstawie modelu bifurkacji [20-23] wydaje się być niezadawalająca, a modele uwzględniające niedoskonałości kształtu i obciążenia w opisie odkształceń pręta ściskanego [3, 4, 9-11, 24-31], nie oddają w pełni etapów deformacji zakresu dokrytycznego.

## BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Radomski W.*: Katastrofy i awarie mostów a rozwój wiedzy budowlanej. XXV Konferencja Naukowo-Techniczna „Awarie budowlane”, Międzyzdroje 24-27.05.2011
- [2] *Imielowski Sz.*: Deformacje, energia odkształcenia sprężystego w analizie stateczności konstrukcji inżynierskich. Studia z zakresu inżynierii, Wydawnictwo Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Warszawa 2019, 1-193

This study proposes an development of model representing evolution of deformations during compression to describe the buckling and stability loss mechanisms insightfully and completely. Three successive stages of deformation were included in this description: shortening of a straight column, transitional phase (shear simultaneous with buckling of compressible axis column), and buckling of a column with an incompressible axis. The first phase of deformation ends upon reaching the maximum shear strain energy is reached, which triggers shear deformation and lateral displacement. Transition to the third stage of deformation is, in turn, defined by the stiffness criterion. This stage occurs when the directional stiffness (stiffness in the direction of the acting force) equals the longitudinal stiffness of the transitional phase. It must be noted that the Euler solution concerns a column with an incompressible axis, and thus it meets the conditions of the third stage of deformation. The model proposed in this article supplements the Euler's solution with subcritical deformations.

The description of the deformation of medium slenderness columns confirms that there are both, a range of slenderness, for which the loss of stability occurs as a limit point defined by snap-through to another configuration with a sudden decrease of the limit load accompanied by an increase of max deflection. For smaller slendernesses of this range, the limit state is defined by material instability.

In conclusion, it should be stressed that detailed tracking of the successive stages of the compression and buckling process and obtaining of complete picture of the column failure was possible due to simultaneous analysis of all the result presentation methods described in the article, thus not being limited to analysing only the changes of load and lateral displacement, but considering also the changes of the stress state, longitudinal strain and displacement. The proposed in this article model creates an extension and a significant supplement of analysis proposed in the literature [8, 9, 17-19]. The existing nowadays interpretation of the results of experimental studies based on the bifurcation [20-23] seems to be unsatisfactory. Additionally, the imperfections of the shape and load taken into account in the description of the compressed bar deformation [3, 4, 9-11, 24-31] do not fully depicts the stages of subcritical deformation.

- [3] *Bazant Z.P., Cedolin L.*: Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories. Dover Publications, 2003
- [4] *Simitse G., Hodge D.*: Fundamentals of structural stability. Elsevier, 2006

- [5] *Odorowicz J.*: Badania doświadczalne nad statecznością prętów przyzmatycznych o bardzo dużych smukłościach przy eulerowskich obciążeniach krytycznych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, **138**, Warszawa 2001
- [6] *Odorowicz J.*: Badania doświadczalne nad ściskaniem prętów przyzmatycznych w zakresie odkształceń sprężysto-plastycznych. Roads and Bridges - Drogi i Mosty, **3**, 3, 2004, 53-90
- [7] *Ziółkowski A., Imielowski Sz.*: Buckling and Post-buckling Behaviour of Prismatic Aluminium Columns Submitted to a Series of Compressive Loads, Experimental Mechanics, **51**, 2, 2011, 1335-1345
- [8] *Koiter W.T.*: Current trends in the theory of buckling, in Symposium on Buckling of Structures, sponsored by IUTAM, Cambridge, MA, Harvard University, 1974
- [9] *Ayrton W.E., Perry J.*: On Struts. The Engineer, **62**, 1886, 464-513
- [10] *Giżejowski M., Stachura Z.*: Generalized Ayrton-Perry approach for the evaluation of beam-column resistance, w: Sixth International Conferences on Structural Engineering. Mechanics and Computation / Zingoni A. (red.), 2016, Taylor & Francis Group, 713-719
- [11] *Giżejowski M., Stachura Z.*: A Consistent Ayrton-Perry approach for the flexural-torsional buckling resistance evaluation of steel i-section members. Civil and Environmental Engineering Reports, **25**, 2, 2017, 89-105
- [12] *Imielowski Sz., Glinicka A., Ajdukiewicz C.*: Analiza eksperymentalna ścieżek wyboczenia prętów ściskanych w przypadku obciążenia sterowanego przemieszczeniem. Budownictwo i Architektura, **13**, 2, 2014, 209-214
- [13] *Glinicka A., Imielowski Sz.*: The assessment of stability at compression of steel pipes considering effects of uniform corrosion. Roads and Bridges - Drogi i Mosty, **18**, 4, 2019, 267-281
- [14] *Imielowski Sz., Ajdukiewicz C., Glinicka A.*, Analiza eksperymentalna zachowań pokrytycznych na przykładzie ściskanych kolumn metalowych. Logistyka, **3**, 2011, 943-948
- [15] *Imielowski Sz.*: Sztywność ściskanych prętów przyzmatycznych w zakresie dokrytycznym, w: Wybrane zagadnienia konstrukcji i materiałów budowlanych oraz geotechniki. Wydawnictwo Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy, Bydgoszcz, 2015, 63-68
- [16] *Imielowski Sz., Ajdukiewicz C., Glinicka A.*: Badania eksperymentalne stateczności ściskanych stalowych pasm płytowych. Analiza nośności i odkształceń pasm. Technika Transportu Szybnowego, **9**, 2012, 3203-3208
- [17] *Engesser F.R.*: Uber Knickfragen. Schweizerische Bauzeitung, **36**, 4, 1895, 24-26
- [18] *von Karman T.*: Untersuchungen Uber Knickfestigkeit, Mitteilung und Forschungsarbeiten - Arb. Geb. Ing. - Wes. No. Heft **81**, 1910
- [19] *Shanley F.*: Inelastic Column Theory. Journal of the Aeronautical Sciences, **14**, 5, 1947, 261-267
- [20] *Waszczyzyn Z., Życzkowski M., Roorda J., Massonet C.*: Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji. Ossolineum, Wrocław, PAN, 1981
- [21] *Budiansky H.*: Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structures. Advances in Applied Mechanics, **14**, 1974, 1-65
- [22] *Troger H., Steindl A.*: Nonlinear stability and bifurcation theory. An introduction for scientists and engineers, Springer, Vienna, 1991
- [23] *Chodor L.*: Współczynnik wyboczeniowy. Geneza i mit, <http://chodor-projekt.net/encyclopedia/wyboczenie-imperfekcyjne>, dostęp 12.09.2017
- [24] *Chajes A.*: Principles of structural stability theory. Prentice-Hall, 1974
- [25] *El Naschie M.S.*: Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach. McGraw-Hill Book Company Limited, UK, 1990
- [26] *Simites G., Hodge D.*: Fundamentals of structural stability. Elsevier, 2006
- [27] *Jones R.M.*: Buckling of Bars, Plates and Shells. Bull Ridge Publishing, Blackburg, Virginia, 2006
- [28] *Bert C.W.*: Effect of axial compressibility on buckling of columns. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, **116**, 3, 1990, 728-732
- [29] *Glinicka A.*: Experimental analysis of inelastic buckling of short rectangular tubes. Roads and Bridges - Drogi i Mosty, **4**, 2, 2005, 5-37
- [30] *Avcar M.*: Elastic buckling of steel columns under axial compression. American Journal of Civil Engineering, **2**, 3, 2014, 102-108, DOI: 10.11648/j.ajce.20140203.17
- [31] *Shima H.*: Simple approximate formulas for postbuckling deflection of heavy elastic columns. Applied Sciences, **10**, 20, 2020, 7163, DOI: 10.3390/app10207163