



MATEUSZ RAJCHEL<sup>1)</sup>  
TOMASZ SIWOWSKI<sup>2)</sup>

## LIVE LOAD TRANSVERSE DISTRIBUTION IN A ROAD SLAB-GIRDER BRIDGE MADE OF FRP COMPOSITE GIRDERS

### ROZDZIAŁ POPRZECZNY OBCIĄŻEŃ RUCHOMYCH W BELKOWO-PŁYTOWYM MOŚCIE DROGOWYM Z DŹWIGARAMI KOMPOZYTOWYMI FRP

**STRESZCZENIE.** W artykule przedstawiono analizę parametrów rozdziału poprzecznego obciążenia ruchomego dla przęsła mostu drogowego, zbudowanego z czterech dźwigarów kompozytowych FRP o przekroju skrzynkowym i zespolonej płyty pomostu z betonu lekkiego. Parametry wyznaczono doświadczalnie oraz obliczeniowo, stosując model płyty ortotropowej ujęty w rozwiązaniu Cusensa-Pamy i model numeryczny MES. Zmierzone wartości współczynników rozdziału poprzecznego obciążenia oraz linie wpływowe zostały wyznaczone podczas badania mostu pod obciążeniem. Porównanie zmierzonych oraz wyznaczonych obliczeniowo współczynników rozdziału poprzecznego obciążenia przedstawiono na podstawie analizy ugięć dźwigarów w przekroju miarodajnym w środku rozpiętości przęsła mostu. W wyniku porównania wykazano, że zarówno analityczny model przęsła w postaci płyty ortotropowej, jak również numeryczny powłokowo-bryłowy model MES dają dużą zgodność rozdziału poprzecznego obciążenia z rozdziałem uzyskanym z pomiarów. Ponadto analizy obliczeniowe i badania wykazały wystarczającą sztywność giętą i dużą skrętną (konstrukcja mostu zalicza się do grupy o małej sztywności ogólnej  $k = 300$  kN/mm) przęsła mostu potwierdzając, że dźwigary kompozytowe FRP wykorzystane do jego budowy mogą być pełnowartościową alternatywą dla stosowanych powszechnie w budownictwie mostowym dźwigarów z betonu i stali.

**SŁOWA KLUCZOWE:** analiza porównawcza, badania mostu, dźwigar kompozytowy FRP, MES, most drogowy, rozdział poprzeczny obciążenia.

**ABSTRACT.** The paper presents an analysis of the parameters of live load transverse distribution in the span of a road bridge that is made of four box FRP composite girders and a composite deck slab made of lightweight concrete. The parameters were determined experimentally and computationally using the orthotropic plate model included in the Cusens-Pam solution and also the numerical FEM model. The measured values of load transverse distribution factors and influence lines were determined during bridge load testing. A comparison of the measured and calculated load transverse distribution factors is shown on the basis of the analysis of the girders' deflection in their cross-section in the middle of the bridge span. As a result of this comparison, it was proved that the analytical model of the orthotropic plate and also the numerical shell-solid FEM model have a high compliance of load transverse distribution with the distribution obtained from the measurements. In addition, computational analysis and tests showed a sufficient flexural rigidity and high torsional rigidity of the bridge span (the bridge construction belongs to a group of structures with a low overall rigidity of  $k = 300$  kN/mm), confirming that the FRP composite girders that were used for its construction can be an alternative to the concrete and steel girders that are commonly used in the construction of bridges.

**KEYWORDS:** comparative analysis, FEM, FRP composite girder, live load transverse distribution, load test, road bridge.

DOI: 10.7409/rabdim.017.009

<sup>1)</sup> Politechnika Rzeszowska, Zakład Dróg i Mostów, ul. Poznańska 2, 35-084 Rzeszów; mrajchel@prz.edu.pl (✉)

<sup>2)</sup> Politechnika Rzeszowska, Zakład Dróg i Mostów, ul. Poznańska 2, 35-084 Rzeszów; siwowski@prz.edu.pl

## 1. WPROWADZENIE

Rozkład poprzeczny obciążenia ruchomego w mostach belkowo - płytowych jest zagadnieniem, które jest rozwijane od lat 30-tych XX wieku, początkowo w celu dokładniejszej, a obecnie uproszczonej i praktycznej analizy przęseł mostów drogowych. Pozwala ono, korzystając z uproszczonych modeli 2D rozłożyć obciążenie ruchome na poszczególne dźwigary, sprowadzając ich analizę statyczną do modelu belkowego. Pierwsze prace teoretyczne nad tym zagadnieniem prowadził Westergaard w USA [1]. W Europie dużą popularność zdobyła uproszczona metoda Courbona [2], [3] (tzw. metoda sztywnej poprzeczniczy), a następnie metoda rusztu płaskiego Leonhardta [4], metody Guyona-Massoneta - Baresa [5], [6], [7] i Cusensa-Pamy [8], wykorzystujące podobieństwo przęśla belkowo-płytowego do płyty ortotropowej. I chociaż dzisiaj, w dobie powszechnego stosowania MES i wspomagających ją narzędzi, stosowanie metod analitycznych jest stosunkowo rzadkie, to jednak cały czas służą one do prac koncepcyjnych, uproszczonej oceny nośności przęseł mostowych czy weryfikacji obliczeń MES-owskich [9], [10], [11]. Natomiast w USA parametry rozkładu poprzecznego obciążenia ruchomego są podstawą procedury normowej [12], a prace związane z jej stałym rozwojem obejmują coraz to nowsze konstrukcje mostowe, np. mosty zintegrowane [13] i mosty z kompozytów FRP (ang. *Fibre Reinforced Polymer*) [14].

Materiały kompozytowe FRP w czasie kilkuastu lat stały się coraz powszechniej akceptowane i stosowane w budownictwie mostowym ze względu na ich bardzo dobre cechy. Konstrukcje mostowe z kompozytów FRP charakteryzują się wysoką wytrzymałością, dużą sztywnością (kompozyty węglowe), niskim ciężarem własnym, możliwością pełnej prefabrykacji, krótkim czasem wykonania oraz niskimi kosztami utrzymania w cyklu życia LCC (ang. *Life Cycle Cost*). Ponadto przeprowadzone badania wykazały odporność kompozytów FRP na promieniowanie UV, alkalia i chlorki, oraz potwierdziły znakomitą wytrzymałość zmęczeniową połączeń w konstrukcjach kompozytowych [15]. Kolejne zalety tego materiału w budowie mostów wynikają z jego zastosowania w konstrukcjach hybrydowych, w których kompozyt FRP łączy się z betonem. Systemy hybrydowe z użyciem betonu w strefie ściskanej stanowią najbardziej efektywny sposób wykorzystania kompozytów FRP w budownictwie mostowym [16]. Dźwigary hybrydowe typu FRP/beton charakteryzują się dużą sztywnością, a dodatkowo w zastosowaniach mostowych korzystną, pseudoplastyczną (tj. bezpieczną) postacią zniszczenia – w przeciwieństwie do nagłej postaci zniszczenia, charakteryzującej dźwigary w pełni kompozytowe [17], [18].

## 1. INTRODUCTION

The live load transverse distribution in slab-girder bridges is an issue that has been examined since the 1930's, initially for the purpose of more accurate analysis, and currently for a simplified and practical analysis of road bridge spans. It allows, with the use of simplified 2D models, live load to be distributed on individual girders, which turns their structural analysis into the analysis of a beam model. The first theoretical studies on this subject were conducted by Westergaard in the USA [1]. In Europe, the Courbon simplified method [2], [3] (the so-called rigid crossbar method) gained great popularity and was followed by the Leonhardt grid method [4], the Guyon-Massonet-Bares method [5], [6], [7] and also the Cusens-Pam method [8], which were all based on the similarity of a slab-girder span to an orthotropic plate. Although nowadays the use of analytical methods is relatively rare in the age of the widespread application of the FEM and its supporting tools, they are still used for conceptual studies, the simplified evaluation of bridge span load-bearing capacity or the verification of FEM results [9], [10], [11]. In contrast, in the United States the parameters of live load transverse distribution are the basis of standard procedure [12], and studies on its continued development include newer and newer bridge constructions such as integrated bridges [13] and fiber reinforced polymer (FRP) bridges [14].

Composite FRP materials have become increasingly accepted and have been used in bridge constructions for the past few years due to their very good properties. Bridge structures made of FRP composites are characterized by high strength, high rigidity (carbon composites), low self-weight, the possibility of full prefabrication, a short production time and also a low life cycle cost (LCC). In addition, conducted research has shown that FRP composites are resistant to UV radiation, alkali and chloride, and has also confirmed the excellent fatigue resistance of joints in composite constructions [15]. The next advantage of this material in the construction of bridges results from its use in hybrid constructions, in which FRP composite is combined with concrete. Hybrid systems that use concrete in the compression zone are the most effective way of using FRP composites in bridge constructions [16]. FRP/concrete hybrid girders are characterized by high rigidity, and in bridge applications, a favourable pseudoplastic (i.e. safe) form of failure – unlike the sudden form of failure that characterizes all-composite girders [17], [18].

Wymienione zalety dźwigarów hybrydowych były głównym powodem ich zastosowania w budowie pierwszego polskiego mostu kompozytowego, który powstał w ciągu drogi publicznej jako rezultat projektu badawczego „Com-bridge”, współfinansowanego przez NCBiR w zakresie programu Demonstrator+ ([www.com-bridge.pl](http://www.com-bridge.pl)) [19]. W ramach projektu Com-bridge wykonano m.in. kompleksowe badania mostu pod próbnym obciążeniem statycznym i dynamicznym. Doświadczalnie oceniono nośność i sztywność głównych elementów przęsła, a także rozdział poprzeczny obciążenia na poszczególne dźwigary. Zmierzony rozdział poprzeczny obciążenia wyznaczono wykorzystując pomierzone ugięcia i odkształcenia dźwigarów w środku rozpiętości przęsła mostu pod obciążeniem pojazdami badawczymi. W pracy porównano zmierzony rozdział obciążenia uzyskany z badań do rozdziału wyznaczonego analitycznie metodą płyt ortotropowych [8]. Wyniki badań doświadczalnych i prac analitycznych porównano także do parametrów rozdziału wyznaczonych numerycznie za pomocą MES, wykorzystując przestrzenny model powłokowobryłowy, zastosowany w projektowaniu mostu [20]. Na podstawie porównania wyników badań i analiz obliczeniowych sformułowano wnioski dotyczące adekwatności stosowania poszczególnych metod rozdziału poprzecznego obciążenia do belkowo-płytowych przęseł mostowych z dźwigarami kompozytowymi FRP.

## 2. OPIS PRZĘSŁA MOSTU I DŹWIGARÓW KOMPOZYTOWYCH

Pierwszy polski most drogowy z kompozytów FRP wykonany w 2015 r. w Błazowej k. Rzeszowa jest obiektem jedno-przęsłowym, swobodnie podpartym, o konstrukcji przęsła belkowo - płytowej (Rys. 1). Przęsło jest zbudowane z czterech kompozytowych dźwigarów skrzynkowych typu U, zespolonych z betonową płytą pomostu (Rys. 2). Dźwigary są stężone dwiema betonowymi poprzecznicami podporowymi, w których zostały osadzone i zespolone z betonem końcowe fragmenty dźwigarów. Przęsło jest oparte na żelbetowych przyczółkach za pomocą czterech łożysk elastomerycznych, usytuowanych pod poprzecznicami podporowymi. Główne parametry geometryczne przęsła mostu są następujące:

- długość całkowita:  $L_c = 22,30$  m,
- rozpiętość teoretyczna:  $L = 21,00$  m,
- szerokość całkowita pomostu:  $B = 10,54$  m,
- szerokości użytkowe pomostu: jezdnia  $2 \times 3,5$  m, opaski bezpieczeństwa  $2 \times 0,50$  m, chodnik jednostronny  $1,50$  m, bariera z gzymsem  $2 \times 0,52$  m,

The above-mentioned advantages of hybrid girders were the main reason for their use in the construction of the first Polish FRP composite bridge that was built on a public road as a result of the research project called “Com-bridge”. The project was co-financed by the National Centre for Research and Development within the framework of the Demonstrator+ ([www.com-bridge.pl](http://www.com-bridge.pl)) [19]. Comprehensive tests of a bridge under trial static and dynamic loads were conducted within the framework of the Com-bridge project. The load-bearing capacity and stiffness of the main elements of a span, as well as the transverse distribution of loads on individual girders, were assessed experimentally. The measured load transverse distribution was determined using the deflections and strains of the girders, which were measured in the middle of the span of the bridge loaded with test vehicles. The paper compares the measured load distribution obtained from the tests and the distribution obtained analytically using the orthotropic plate method [8]. The experimental and analytical results were also compared to the parameters of the distribution that were determined numerically with the use of the FEM and the spatial solid-shell model that was used in the design of the bridge [20]. Based on the comparison of the results of tests and computational analyses, conclusions were drawn concerning the suitability of the application of particular methods of load transverse distribution for the slab-girder spans of bridges made of FRP composite girders.

## 2. DESCRIPTION OF THE BRIDGE AND ITS FRP COMPOSITE GIRDERS

The first Polish road bridge made of FRP composites, which was built in 2015 in Blazowa near Rzeszow, is a single-span simply supported construction with a slab-girder span structure (Fig. 1). The span is composed of four U-shaped box composite girders assembled with a concrete deck slab (Fig. 2). The girders are braced with two concrete transverse support beams, in which the girder end sections have been embedded and assembled with concrete. The span is supported on reinforced concrete abutments with four elastomeric bearings located under the transverse support beams. The main parameters of the bridge span geometry are as follows:

- total length:  $L_c = 22.30$  m,
- theoretical length:  $L = 21.00$  m,
- total width of the deck slab:  $B = 10.54$  m,
- usable width of the deck slab: carriageway  $2 \times 3.5$  m, safety bands  $2 \times 0.50$  m, one-sided pavement  $1.50$  m, barrier with a cornice  $2 \times 0.52$  m,

- całkowita wysokość konstrukcyjna przęsła: 1,20 m,
- kąt skrzyżowania z przeszkodą:  $90^\circ$ ,
- nośność: klasa B wg PN-85/S-10030, tj. odpowiadająca ciężarowi pojazdów 40 ton.

- total structural height of the span: 1.20 m,
- crossing angle with an obstacle:  $90^\circ$ ,
- load-bearing capacity: class B according to PN-85/S-10030, corresponding to the weight of the vehicles equal to 40 tons.

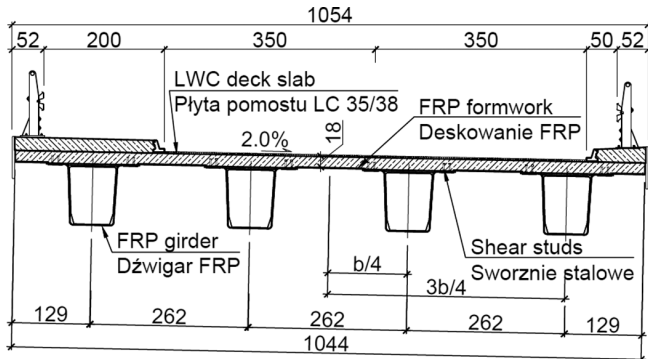


Fig. 1. Bridge span cross-section [cm]

Rys. 1. Przekrój poprzeczny przęsła mostu [w cm]

Dźwigary kompozytowe FRP o wysokości 1,02 m i zmiennej szerokości od 0,62 m w poziomie pasa dolnego do 1,55 m w poziomie pasów górnych są usztywnione wewnętrznie dziesięcioma przępnami w zmiennym rozstawie 1,45 - 2,20 m. Szerokość obu pasów górnych wynosi 0,30 m. Dźwigary oraz przępniki wykonano z laminatów kompozytowych na bazie żywicy epoksydowej oraz tkanin szklanych i węglowych, a także z pianki PVC (ang. *Polyvinyl Chloride*), wypełniającej środką dźwigarów i przępniki (Rys. 2). Płyta pomostu o stałej grubości 0,18 m jest wykonana z betonu lekkiego klasy LC 35/38, zbrojonego dwiema siatkami z prętów kompozytowych GFRP (ang. *Glass Fibre Reinforced Polymer*) o średnicy 12 mm. Płyta jest zespolona z dźwigarami kompozytowymi za pomocą łączników sworzniowych, osadzonych w kompozytowych pasach górnych dźwigarów. Podobne zespolenie kompozytu i betonu jest wykonane w strefach podporowych przęsła, w których dźwigary połączone z betonowymi poprzecznikami o wymiarach przekroju  $1,20 \times 1,30$  m. Wyposażenie przęsła składa się z kap chodnikowych, wykonanych z betonu lekkiego LC 30/33, konwencjonalnej nawierzchni i izolacji, elementów odwodnienia, urządzeń dylatacyjnych oraz barier mostowych. Szczegółowy opis konstrukcji mostu przedstawiono w pracy [20]. Charakterystyki przekrojów i stałe materiałowe elementów konstrukcyjnych, wykorzystane w obliczeniach analitycznych i numerycznych podano w Tabl. 1.

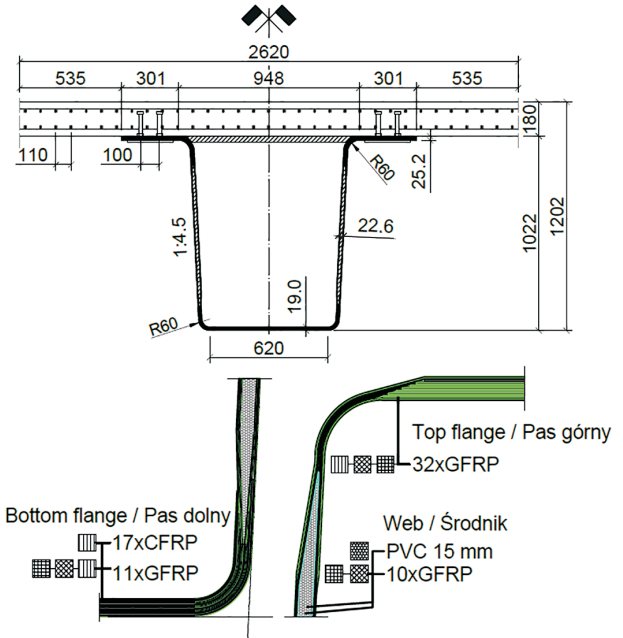


Fig. 2. Hybrid FRP/concrete girder cross-section [mm]

Rys. 2. Przekrój poprzeczny dźwigara hybrydowego FRP/beton [w mm]

FRP composite girders with a height of 1.02 m and a width varying from 0.62 m at the level of the bottom flange to 1.55 m at the level of top flanges are internally stiffened with ten diaphragms located in spacing ranging from 1.45 to 2.20 m. The width of the two top flanges is equal to 0.30 m. The girders and diaphragms are made of epoxy resin-based composite laminates with glass and carbon fibres and also polyvinyl chloride foam that fills the webs of the girders and diaphragms (Fig. 2). The deck slab with a constant thickness of 0.18 m is made of LC 35/38 class lightweight concrete and is reinforced with two grids made of glass fibre reinforced polymer (GFRP) composite bars. The deck slab is assembled with composite girders with the use of bolt fittings that are embedded in the composite top flanges of the girders. The similar connection between the composite and concrete is made in the support zones where the girders are connected to concrete transverse beams that have cross-section dimensions of  $1.20 \times 1.30$  m. The equipment of the span consists of conventional pavement, insulation, drainage elements, expansion joint devices, bridge barriers and pavement

Table 1. Material and cross-section parameters of the hybrid girder

Tablica 1. Charakterystyki przekrojów i stałe materiałowe elementów konstrukcyjnych dźwigara hybrydowego

Parameters Parametry	Girder elements / Elementy dźwigara				Hybrid girder (substitute) Dźwigar hybrydowy (sprowadzony)
	Bottom flange Pas dolny	Top flange Pas górny	Web Środek	Plate Płyta	
$E$ [GPa]	77.6	33.8	6.2	22.4	77.6
$n$ [-]	1.0	2.29	12.52	3.47	1.00
$G$ [GPa]	3.21	2.82	0.93	9.33	-
$A_{spr}$ [m <sup>2</sup> ]	0.014	0.021	0.020	0.472	0.162
$I$ [m <sup>4</sup> ]	$1.843 \cdot 10^{-6}$	$2.587 \cdot 10^{-6}$	$1.208 \cdot 10^{-3}$	$1.273 \cdot 10^{-3}$	0.017
$z$ [mm]	989.2	12.3	498.7	113.3	0

sidewalks made of LC30/33 lightweight concrete. A detailed description of the bridge construction is presented in [20]. The cross-sectional characteristics and material parameters of the structural elements that were used in the analytical and numerical calculations are given in Table 1.

### 3. ROZDZIAŁ POPRZECZNY OBCIĄŻENIA W ŚWIETLE BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

Badania mostu pod próbnym obciążeniem statycznym przeprowadzono w grudniu 2015 r., jako element badań odbiorczych przed dopuszczeniem obiektu do eksploatacji [19]. Do badań statycznych mostu użyto czterech czteroosiowych samochodów ciężarowych z ładunkiem o łącznej masie 128,3 tony. Podczas badań mierzono wartości przemieszczeń pionowych dźwigarów, odkształceń kompozytu dźwigarów i betonu pomostu, przemieszczeń łożysk oraz osiadań podpór. W Tabl. 2 i 3 przedstawiono wartości ugięć dźwigarów i odkształceń kompozytu w środku rozpiętości przęsła przy obciążeniu niesymetrycznym (2 samochody na przęsło, schematy S1,2,3/a) oraz symetrycznym (4 samochody na przęsło, schematy S1,2,3/b) mostu (Rys. 3).

### 3. LOAD TRANSVERSE DISTRIBUTION WITH REGARDS TO EXPERIMENTAL TESTS

Tests of the bridge under a trial static load were carried out in December 2015 as part of the proof tests before the bridge was open for service [19]. Four four-axle loaded trucks, with a total weight of 128.3 tones, were used for static testing of the bridge. Values of the vertical displacements of girders, strains of the girders' composite and the deck slab concrete, displacements of bearings and also the subsidence of supports were measured during the tests. Tables 2 and 3 show the values of the girders' deflections and the values of strains of the composite in the middle of the span under both an asymmetrical load of the bridge (2 cars on the span, schemes S1,2 and 3/a) and a symmetrical load of the bridge (4 cars on the span, schemes S1,2 and 3/b) (Fig. 3).

Table 2. Girder midspan deflections measured experimentally

Tablica 2. Zmierzone wartości ugięć w środku rozpiętości dźwigarów

Load scheme Schemat obciążenia	Value of girder deflection / Wartość ugięcia dźwigara [mm]			
	outer / zewnętrzny (-3b/4)	inner / wewnętrzny (-b/4)	inner / wewnętrzny (b/4)	outer / zewnętrzny (3b/4)
Asymmetric load / Obciążenie niesymetryczne				
S1a	6.30	10.60	13.70	11.30
S2a	17.95	14.35	9.15	5.95
S3a	16.40	13.10	8.30	5.40
Symmetric load / Obciążenie symetryczne				
S1b	21.35	27.65	26.45	19.35
S2b	28.80	30.00	23.70	15.20
S3b	25.60	26.40	21.05	13.55

Table 3. Bottom flange midspan longitudinal strains measured experimentally  
 Tablica 3. Zmierzone wartości odkształceń podłużnych pasa dolnego w środku rozpiętości dźwigarów

Load scheme Schemat obciążenia	Value of the strain of the girder's bottom flange / Wartość odkształceń pasa dolnego dźwigara [%]			
	outer / zewnętrzny (-3b/4)	inner / wewnętrzny (-b/4)	inner / wewnętrzny (b/4)	outer / zewnętrzny (3b/4)
Asymmetric load / Obciążenie niesymetryczne				
S1a	0.134	0.196	0.279	0.250
S2a	0.425	0.272	0.189	0.121
S3a	0.397	0.256	0.176	0.110
Symmetric load / Obciążenie symetryczne				
S1b	0.487	0.528	0.579	0.433
S2b	0.670	0.566	0.506	0.328
S3b	0.608	0.508	0.450	0.291

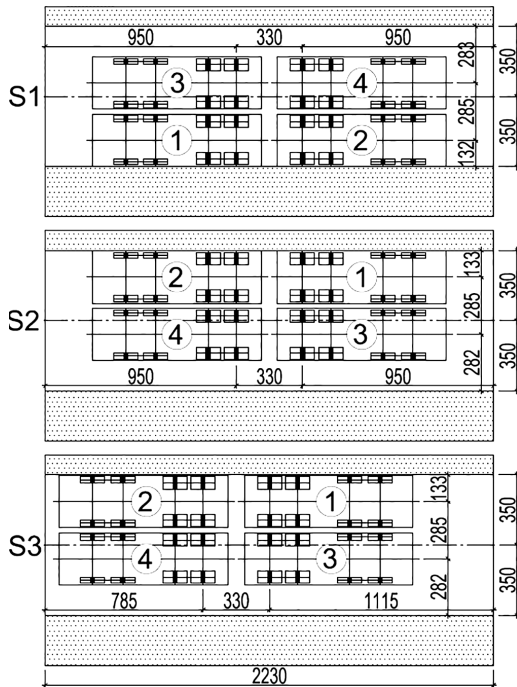


Fig. 3. Location of vehicles in subsequent load schemes  
 Rys. 3. Ustawienie pojazdów w poszczególnych schematach obciążenia

Współczynniki poprzecznego rozdziału obciążenia analizowanego przęsła wyznaczono na podstawie ugięć dźwigarów głównych z ogólnego wzoru:

$$K_{ik} = \frac{w_{ik}}{w_N}, \quad (1)$$

gdzie:

$w_{ik}$  – ugięcie analizowanego dźwigara  $i$  wywołane obciążeniem skupionym dźwigara  $k$ .

W przypadku przęsła o schemacie belki swobodnie podpartej, jak w tej pracy, ugięcie sumaryczne wszystkich dźwigarów wynosi:

$$w_n = \sum_{i=1}^N w_{ik} = \frac{P \cdot L^3}{48E \cdot I}. \quad (2)$$

The factors of the load transverse distribution of the analyzed span were determined on the basis of the deflections of the main girders using the general formula:

$$K_{ik} = \frac{w_{ik}}{w_N}, \quad (1)$$

where:

$w_{ik}$  – the deflection of the analyzed girder  $i$  that was caused by a concentrated load  $k$ .

In the case of a span with a simply supported static scheme, as is the case in this paper, the total deflection of all girders is equal to:

$$w_n = \sum_{i=1}^N w_{ik} = \frac{P \cdot L^3}{48E \cdot I}. \quad (2)$$

Formulas (1) and (2) indicate the following static relation:

$$\sum_{i=1}^N K_{ik} = 1. \quad (3)$$

The load transverse distribution factors of the bridge span, which were calculated in accordance with formulas (1) to (3) on the basis of the analysis of the measured deflections of the outer and inner girder, are shown in Table 4. The load transverse distribution factors were also obtained on the basis of the unit strains measured in the middle part of the bottom girder. However, values other than those based on deflections were obtained. This is due to the occurrence of a complex stress state resulting from the summation of bending and torsion effects.

Table 4. Load transverse distribution factors determined experimentally  
 Tablica 4. Współczynniki poprzecznego rozdziału obciążenia wyznaczone na podstawie badań

$f \backslash y$	Measurement Pomiar	Distance between the axis of the girder $i$ and the axis of the span structure Odstęłość osi dźwigara $i$ od osi konstrukcji przęsła [-]			
		$-3b/4$	$-b/4$	$b/4$	$3b/4$
$b/4$	deflections / ugięcia	0.156	0.243	<b>0.307</b>	0.295
	strains / odkształcenia	0.214	0.260	0.286	0.240
$3b/4$	deflections / ugięcia	0.125	0.192	0.303	<b>0.380</b>
	strains / odkształcenia	0.117	0.187	0.273	0.423

Ze wzorów (1) i (2) wynika statyczna zależność:

$$\sum_{i=1}^N K_{ik} = 1. \quad (3)$$

Współczynniki poprzecznego rozdziału obciążenia dla przęsła mostu obliczone wg wzorów (1) - (3) z analizy pomierzonych ugięć dla dźwigara zewnętrznego i wewnętrznego przedstawiono w Tabl. 4. Współczynniki rozdziału poprzecznego obciążenia uzyskano również na podstawie odkształceń jednostkowych zmierzonych w środkowej części dolnej dźwigara. Otrzymano jednak inne wartości niż na podstawie ugięć, ze względu na występowanie złożonego stanu naprężenia wynikającego z sumowania się efektów zginania oraz skręcania.

#### 4. ROZDZIAŁ POPRZECZNY OBCIĄŻENIA WYZNACZONY ANALITYCZNIE ZA POMOCĄ MODELU PŁYTY ORTOTROPOWEJ

Do celów wyznaczenia rozdziału poprzecznego obciążenia z powodzeniem można zastosować model przęsła w postaci płyty ortotropowej [4-8]. W pracy wykorzystano metodę zaproponowaną przez Cusensa-Pamę (C-P), w której przęsło mostu zastąpiono modelem płyty ortotropowej, a dźwigary kompozytowe potraktowano jako żebra o przekroju trapezowym, uwzględniając następujące założenia metody [8]:

- prostokątne i swobodnie podparte przęsło mostu,
- jednakowa sztywność i stały rozstaw dźwigarów w przekroju poprzecznym,
- niezależny od podłużnego położenia obciążenia oraz rozpatrywanego przekroju poprzecznego kształt rozkładu momentów zginających, sił ścinających i ugięć w przekroju poprzecznym przęsła.

Rozwiązanie modelu płyty ortotropowej uzyskano poprzez wyznaczenie sprowadzonych charakterystyk geometrycznych do materiału kompozytowego pasa dolnego.

#### 4. LOAD TRANSVERSE DISTRIBUTION DETERMINED ANALYTICALLY USING THE ORTHOTROPIC PLATE MODEL

The model of an orthotropic plate [4-8] can be successfully used for the purpose of determining load transverse distribution. The method proposed by Cusens-Pama (C-P), in which both a bridge span is replaced by the orthotropic plate model and the composite girders are treated as trapezoidal ribs, was used in this study and took into account the following assumptions of this method [8]:

- a rectangular and simply supported bridge span,
- uniform rigidity and fixed spacing of girders in the transverse cross-section,
- the distribution of bending moments, shear forces and deflections in the transverse cross-section of the span, are independent from the longitudinal load position and the considered cross-section.

The solution of the orthotropic plate model was obtained by determining the geometric characteristics, which are considered as the characteristics of the composite material of the bottom flange. Therefore, the formulas for the torsion parameter  $\alpha$  and the bending parameter  $\theta$  were obtained using formulas (4) and (5) according to [10, 21]:

$$\alpha = \frac{J_s + J_p}{\sqrt{2 \cdot J_x \cdot J_p}}, \quad (4)$$

$$\theta = \frac{B}{2 \cdot L} \sqrt[4]{\frac{J_x}{2 \cdot J_p}}, \quad (5)$$

where:

$B$  – the width of the deck plate,

$L$  – the theoretical span of the bridge.

The substitute surface area and moment of inertia of the cross-section of the FRP/concrete hybrid girder were calculated according to formulas (6) and (7), respectively:

Stąd uzyskano wyrażenia na parametr skręcania  $\alpha$  oraz parametr zginania  $\theta$  ze wzorów (4) i (5) według [10, 21]:

$$\alpha = \frac{J_s + J_p}{\sqrt{2 \cdot J_x \cdot J_p}}, \quad (4)$$

$$\theta = \frac{B}{2 \cdot L} \sqrt[4]{\frac{J_x}{2 \cdot J_p}}, \quad (5)$$

gdzie:

$B$  – szerokość płyty pomostu,

$L$  – rozpiętość teoretyczna mostu.

Sprowadzone pole powierzchni i sprowadzony moment bezwładności przekroju dźwigara hybrydowego FRP/beton obliczono odpowiednio według wzorów (6) i (7):

$$A_{spr} = \frac{1}{n_0} A_p + \frac{2}{n_1} A_{tf} + \frac{2}{n_2} A_w + A_{bf}, \quad (6)$$

$$J_x = \frac{1}{n_0} I_p + \frac{1}{n_0} A_p (z_p)^2 + \frac{2}{n_1} I_{tf} + \frac{2}{n_1} A_{tf} (z_{tf})^2 + \frac{2}{n_2} I_w + \frac{2}{n_2} A_w (z_w)^2 + I_{bf} + A_{bf} (z_{bf})^2, \quad (7)$$

gdzie:

$n_0, n_1, n_2$  – stosunek modułu Younga pasa dolnego odpowiednio do modułu Younga betonu, pasa górnego i środnika,

$z_p, z_{tf}, z_w, z_{bf}$  – odległość środka ciężkości przekroju odpowiednio płyty betonowej, pasa górnego, środnika i pasa dolnego do środka ciężkości przekroju sprowadzonego dźwigara hybrydowego,

$A_p, A_{tf}, A_w, A_{bf}$  – pole powierzchni odpowiednio płyty betonowej, jednego pasa górnego, jednego środnika i pasa dolnego,

$I_p, I_{tf}, I_w, I_{bf}$  – moment bezwładności względem własnych osi centralnych odpowiednio płyty betonowej, jednego pasa górnego, jednego środnika i pasa dolnego.

Na podstawie momentu bezwładności  $J_x$  w kierunku osi  $x$  wyznaczonego zgodnie z (7) obliczono – zgodnie z (8) – sztywność na zginanie przęsła  $D_x$  odniesioną do materiału pasa dolnego oraz zgodnie z (9) sztywność na zginanie przęsła  $D_y$  w kierunku osi  $y$  według metody C-P [8]:

$$D_x = \frac{E_b \cdot I_x}{a + c}, \quad (8)$$

$$D_y = \frac{E_p \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu_p^2)}. \quad (9)$$

$$A_{spr} = \frac{1}{n_0} A_p + \frac{2}{n_1} A_{tf} + \frac{2}{n_2} A_w + A_{bf}, \quad (6)$$

$$J_x = \frac{1}{n_0} I_p + \frac{1}{n_0} A_p (z_p)^2 + \frac{2}{n_1} I_{tf} + \frac{2}{n_1} A_{tf} (z_{tf})^2 + \frac{2}{n_2} I_w + \frac{2}{n_2} A_w (z_w)^2 + I_{bf} + A_{bf} (z_{bf})^2, \quad (7)$$

where:

$n_0, n_1, n_2$  – the ratio between the Young's modulus of the bottom flange to the Young's modulus of the concrete, the top flange and the web, respectively,

$z_p, z_{tf}, z_w, z_{bf}$  – the distance between the centre of gravity of the cross-section of the hybrid girder and the centre of gravity of the cross-section of the concrete deck slab, the top flange, the web and the bottom flange, respectively,

$A_p, A_{tf}, A_w, A_{bf}$  the surface area of the concrete deck slab, a single top flange, a single web and the bottom flange, respectively,

$I_p, I_{tf}, I_w, I_{bf}$  – the moment of inertia in relation to the central axis of the concrete deck slab, a single top flange, a single web and the bottom flange, respectively.

Based on the moment of inertia  $J_x$  in the direction of the  $x$ -axis – according to (7) – the flexural rigidity of the span  $D_x$  with regards to the material of the bottom flange – according to (8) – and the flexural rigidity of the span  $D_y$  in the direction of the  $y$ -axis – according to (9) – was calculated according to the C-P method [8]:

$$D_x = \frac{E_b \cdot I_x}{a + c}, \quad (8)$$

$$D_y = \frac{E_p \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu_p^2)}. \quad (9)$$

The moment of inertia in bending  $J_p$  of the deck slab in the direction of the  $y$ -axis was calculated according to (10) [8, 22]:

$$J_p = \frac{(a + c) \cdot t^3}{6}. \quad (10)$$

The moment of inertia in torsion  $J_s$  of the box hybrid girder was determined according to formula (11), while its cross-sectional area during torsion was calculated according to (12) [8, 10]:

$$J_s = \frac{4 \cdot A_s^2}{\left( \frac{a}{t} + \frac{h_w}{g_0 \cdot t_w} + \frac{d}{g_1 \cdot t_f} \right)}, \quad (11)$$



Moment bezwładności na zginanie  $J_p$  płyty pomostu w kierunku osi  $y$  obliczono według wzoru (10) [8, 22]:

$$J_p = \frac{(a+c) \cdot t^3}{6} \quad (10)$$

Moment bezwładności przy skręcaniu  $J_s$  dźwigara hybrydowego o przekroju zamkniętym wyznaczono według wzoru (11), natomiast jego pole przekroju przy skręcaniu obliczono na podstawie wzoru (12) [8, 10]:

$$J_s = \frac{4 \cdot A_s^2}{\left( \frac{a}{t} + \frac{h_w}{g_0 \cdot t_w} + \frac{d}{g_1 \cdot t_f} \right)}, \quad (11)$$

$$A_s = h_w \cdot (a+d) \cdot 0,5, \quad (12)$$

gdzie:

- $A_s$  – pole przekroju dźwigara hybrydowego przy skręcaniu,
- $g_0, g_1$  – stosunek modułu Kirchhoffa betonowej płyty pomostu odpowiednio do modułu Kirchhoffa kompozytowych środka i pasa dolnego,
- $t_w, t_f$  – grubości odpowiednio środka i pasa dolnego według Rys. 2,
- $a, c, d, t, h_w$  – wymiary zgodnie z Rys. 4.

Wyniki obliczeń poszczególnych parametrów według wzorów (7-12) przedstawiono w Tabl. 5.

Obliczone według wzorów (4) i (5) parametry skręcania  $\alpha$  i zginania  $\theta$ , opisujące sztywność przęsła jako parametry charakterystyczne płyty ortotropowej, wynoszą odpowiednio: parametr skręcania  $\alpha=1,857$ , parametr zginania  $\theta = 0,637$ .

Parametr skręcania płyty ortotropowej równy 1,857 przekracza wartości stosowane w tablicach Guyona-Massoneta-Barresa [21], dlatego ta metoda nie mogła być zastosowana w rozwiązaniu analitycznym problemu. Powyższa wartość parametru  $\alpha$  jest natomiast zawarta w zakresie podanym przez Cusensa-Pamę (w metodzie dotyczącej rozdziału poprzecznego obciążenia płyt ortotropowych) [8]. Współczynniki poprzecznego rozdziału obciążenia w ujęciu C-P są zależne od parametrów sztywności przęsła  $\alpha$  i  $\theta$ , położenia rozpatrywanego dźwigara  $y = f$  i mimośrodu obciążenia  $y = y'$ . Wartości współczynników rozdziału wyznaczono według metody C-P dla dźwigara wewnętrznego ( $f_1 = b/4$ ) oraz dźwigara zewnętrznego ( $f_2 = 3b/4$ ) i przedstawiono w Tabl. 6 przy następujących założeniach:

- połowa szerokości płyty pomostu  $b = 5,22$  m,
- odległość dźwigara wewnętrznego od osi przęsła  $f_1 = (b/4) = 1,31$  m,

$$A_s = h_w \cdot (a+d) \cdot 0,5, \quad (12)$$

where:

- $A_s$  – the cross-sectional area of the hybrid girder during torsion,
- $g_0, g_1$  – the relation between the Kirchhoff modulus of the concrete deck slab to the Kirchhoff modulus of the composite web and the bottom flange,
- $t_w, t_f$  – the thickness of the web and the bottom flange according to Fig. 2, respectively,
- $a, c, d, t, h_w$  – the dimensions according to Fig. 4.

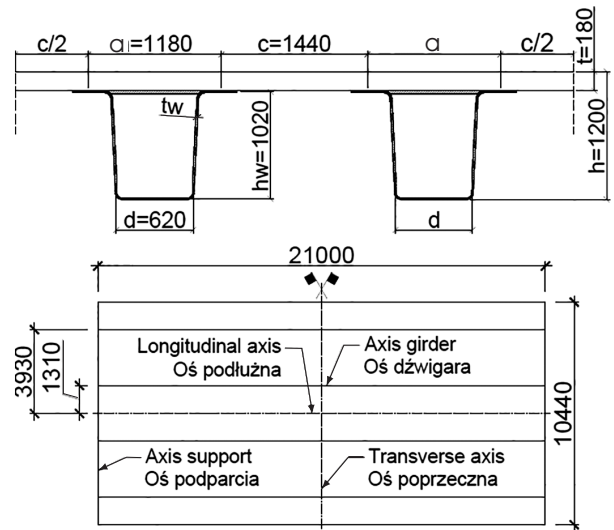


Fig. 4. Bridge span geometric parameters used in the C-P method [mm]

Rys. 4. Parametry geometryczne przęsła przyjęte w metodzie C-P [w mm]

The results of individual parameters calculated according to formulas (7-12) are presented in Table 5.

Table 5. Characteristic parameters of the orthotropic plate  
Tablica 5. Charakterystyczne parametry płyty ortotropowej

Unit Jednostka	Orthotropic plate parameter Parametr płyty ortotropowej					
	$J_x$	$J_p$	$J_s$	$A_s$	$D_x$	$D_y$
Value Wartość	$16.92 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$	$14.7 \cdot 10^{-3}$	0.918	500.9	11.33

- odległość dźwigara zewnętrznego od osi przęsła  $f_2 = (3b/4) = 3,93$  m.

Table 6. Load transverse distribution factors determined using the C-P method

Tablica 6. Współczynniki poprzecznego rozdziału obciążenia według metody C-P

Parameter Parametr	$\alpha$	$\theta$	$y$ $f$	Distance between the axis of the girder $i$ and the axis of the span structure Odległość osi dźwigara $i$ od osi konstrukcji przęsła [-]			
				$-3b/4$	$-b/4$	$b/4$	$3b/4$
0.637	1.857		$b/4$	0.1924	0.2395	0.2894	0.2809
			$3b/4$	0.1440	0.1896	0.2771	0.3870

## 5. ROZDZIAŁ POPRZECZNY OBCIĄŻENIA WYZNACZONY NUMERYCZNIE ZA POMOCĄ MES

Model numeryczny przęsła mostu utworzono w środowisku MES wykorzystując system Sofistik. Analizę przeprowadzono w przestrzeni trójwymiarowej (p3) za pomocą elementów powłokowych (e2) i bryłowych (e3). Wszystkim elementom powłokowym o wymiarach  $0,30 \times 0,40$  m (*aspect ratio* 0,75) oraz bryłowym o wymiarach  $0,18 \times 0,40$  m (*aspect ratio* 0,45) nadano grubości zgodnie z rzeczywistymi wymiarami poszczególnych elementów przęsła (Rys. 5). Parametry materiałowe dla poszczególnych elementów skończonych przyjęto według Tabl. 1. Model MES przęsła został obciążony wg schematów obciążenia zrealizowanych podczas badań mostu. Wyznaczone numerycznie wartości ugięć i odkształceń w przekroju miarodajnym w środku rozpiętości przęsła przedstawiono w Tabl. 7 i 8. Ugięcia i odkształcenia przedstawiono dla niesymetrycznych oraz symetrycznych schematów obciążeń przęsła. Wartości współczynników rozdziału poprzecznego obciążenia wyznaczone w oparciu o wzory (1) - (3) na podstawie ugięć i odkształceń numerycznych przedstawiono w Tabl. 9.

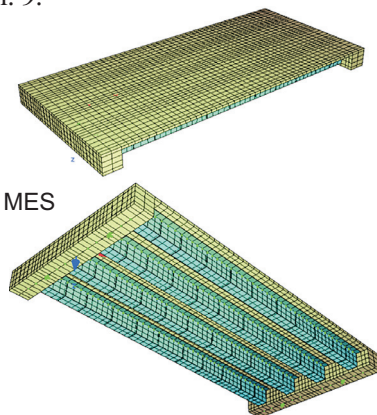


Fig. 5. FEM model of a bridge span  
Rys. 5. Model numeryczny MES przęsła mostu

The parameters of torsion  $\alpha$  and bending  $\theta$  that were calculated according to formulas (4) and (5), as characteristic parameters of the orthotropic plate, describe the rigidity of the span and are equal to: the torsion parameter  $\alpha=1.857$ , the bending parameter  $\theta = 0.637$ .

The torsion parameter of the orthotropic plate that is equal to 1.857 exceeds the values used in the Guyon-Massonet-Bares [21] tables. Therefore, this method could not be applied to the analytical solution of the problem. In turn, this parameter value is within the range given by Cusens-Pama [8] in their method of load transverse distribution of orthotropic plates. The factors of load transverse distribution in the C-P approach are dependent on the span rigidity parameters  $\alpha$  and  $\theta$ , the position of the considered girder  $y = f$  and also the eccentricity of load  $y = y'$ . The values of distribution factors were determined according to the C-P method for the inner girder ( $f_1 = b/4$ ) and outer girder ( $f_2 = 3b/4$ ) and are presented in Table 6 with the following assumptions:

- half of the width of the deck slab  $b = 5.22$  m,
- the distance of the inner girder from the axis of the span  $f_1 = (b/4) = 1.31$  m,
- the distance of the outer girder from the axis of the span  $f_2 = (3b/4) = 3.93$  m.

## 5. LOAD TRANSVERSE DISTRIBUTION DETERMINED NUMERICALLY USING THE FEM

The numerical model of the bridge span was created in the FEM environment with the use of the Sofistik system. The analysis was conducted in three-dimensional space (p3) using shell (e2) and solid (e3) elements. All shell elements with dimensions of  $0.30 \times 0.40$  m (*aspect ratio* 0.75), and solid elements with dimensions of  $0.18 \times 0.40$  m (*aspect ratio* 0.45) had a thickness according to the real dimensions of the individual span elements (Fig. 5). The material parameters for individual finite elements were assumed according to Table 1. The FEM model of the span was loaded according to the load schemes specified during bridge tests. The numerical values of deflections and deformations determined in the representative cross-section in the middle of the span are given in Tables 7 and 8. The deflections and deformations are presented for the asymmetrical and symmetrical load schemes of the span. The values of load transverse distribution factors, which were determined according to formulas (1) to (3) and on the basis of the numerical deflections and deformations, are presented in Table 9.

Table 7. Girder midspan deflections determined using the FEM  
 Tablica 7. Wartości ugięć dźwigarów w środku rozpiętości przęsła według MES

Load scheme Schemat obciążenia	Value of girder deflection / Wartość ugięcia dźwigara [mm]			
	outer / zewnętrzny (-3b/4)	inner / wewnętrzny (-b/4)	inner / wewnętrzny (b/4)	outer / zewnętrzny (3b/4)
Asymmetric load / Obciążenie niesymetryczne				
S1a	15.79	21.25	25.64	23.55
S2a	30.20	24.47	17.81	14.01
S3a	27.41	22.25	16.24	12.85
Symmetric load / Obciążenie symetryczne				
S1b	39.34	46.89	46.89	39.34
S2b	49.19	48.90	41.98	32.60
S3b	44.71	44.47	38.24	29.81

Table 8. Girder midspan longitudinal strains determined using the FEM  
 Tablica 8. Wartości sprężystych odkształceń podłużnych pasa dolnego dźwigarów w środku rozpiętości według MES

Load scheme Schemat obciążenia	Value of the strain of the girder's bottom flange / Wartość odkształceń pasa dolnego dźwigara [%]			
	outer / zewnętrzny (-3b/4)	inner / wewnętrzny (-b/4)	inner / wewnętrzny (b/4)	outer / zewnętrzny (3b/4)
Asymmetric load / Obciążenie niesymetryczne				
S1a	0.310	0.412	0.489	0.456
S2a	0.579	0.472	0.347	0.276
S3a	0.533	0.432	0.317	0.254
Symmetric load / Obciążenie symetryczne				
S1b	0.766	0.900	0.900	0.766
S2b	0.949	0.935	0.811	0.639
S3b	0.871	0.865	0.744	0.586

Table 9. Load transverse distribution factors determined using the FEM  
 Tablica 9. Współczynniki poprzecznego rozdziału obciążenia wyznaczone według MES

$f$	$y$	Distance between the axis of the girder $i$ and the axis of the span structure Odległość osi dźwigara $i$ od osi konstrukcji przęsła [-]			
		-3b/4	-b/4	b/4	3b/4
b/4		0.189	0.243	0.283	0.285
3b/4		0.165	0.207	0.281	0.347

## 6. PORÓWNANIE ROZKŁADU OBCIĄŻENIA WYZNACZONEGO NA PODSTAWIE BADAŃ I OBLICZEŃ

Porównanie wyznaczonych doświadczalnie, analitycznie (metoda C-P) i numerycznie (MES) linii wpływu rozdziału poprzecznego obciążenia na poszczególne dźwigary (zewewnętrzny i wewnętrzny) przęsła mostu przedstawiono na Rys. 6 i 7.

## 6. COMPARISON OF LOAD DISTRIBUTION DETERMINED BY TESTS AND CALCULATIONS

A comparison of the experimentally, analytically (the C-P method) and numerically (FEM) determined influence lines of the load transverse distribution on the individual girders (outer and inner) of the bridge span is presented in Figs. 6 and 7.

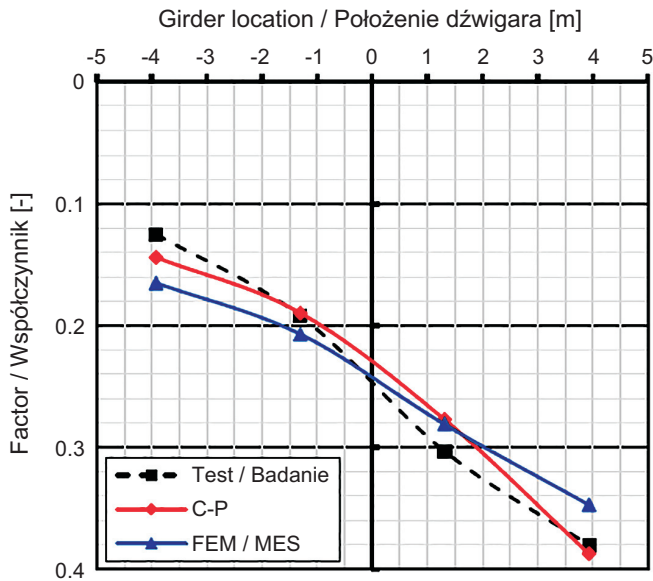


Fig. 7. Load distribution influence lines – outer girder  
Rys. 7. Linie wpływu rozdziału poprzecznego obciążenia dla dźwigara zewnętrznego

Wyznaczone analitycznie metodą płyt ortotropowych w ujęciu Cusensa-Pamy linie rozdziału poprzecznego obciążenia przęśła mostu mają charakter i wartości zgodne z odpowiednimi liniami wyznaczonymi doświadczalnie. Maksymalne wartości analityczne współczynników rozdziału poprzecznego wynoszą: dla dźwigara zewnętrznego 0,387 i dla dźwigara wewnętrznego 0,289, co stanowi odpowiednio 101,8% oraz 94,3% wartości wyznaczonych doświadczalnie.

Równie dużą zgodność ze zmierzonym zachowaniem przęśła pod obciążeniem uzyskano dla linii wpływu wyznaczonych za pomocą modelu MES. Maksymalne wartości współczynników rozdziału poprzecznego wynoszą: dla dźwigara zewnętrznego 0,347 i dla dźwigara wewnętrznego 0,283, co stanowi odpowiednio 91,4% oraz 92,2% wartości wyznaczonych doświadczalnie. Jednakże w tym przypadku współczynniki rozdziału wyznaczone metodą MES dla obu dźwigarów, zewnętrznego i wewnętrznego, są nieznacznie mniejsze niż w doświadczeniu, co może być skutkiem niedoszacowania rzeczywistego obciążenia dźwigarów w modelu MES. Wartości tego niedoszacowania są jednak bardzo niewielkie i przy wielu ogólnych założeniach, stosowanych w projektowaniu dźwigarów kompozytowych [23], nie wpływają znacząco na ocenę ich nośności.

Wartości współczynników rozdziału uzyskane analitycznie (C-P) i numerycznie (MES) różnią się pomiędzy sobą o 11,5% w przypadku dźwigara zewnętrznego i o 5,7% w przypadku dźwigara wewnętrznego. Zmierzona wartość odpowiednich współczynników uzyskana z badań leży

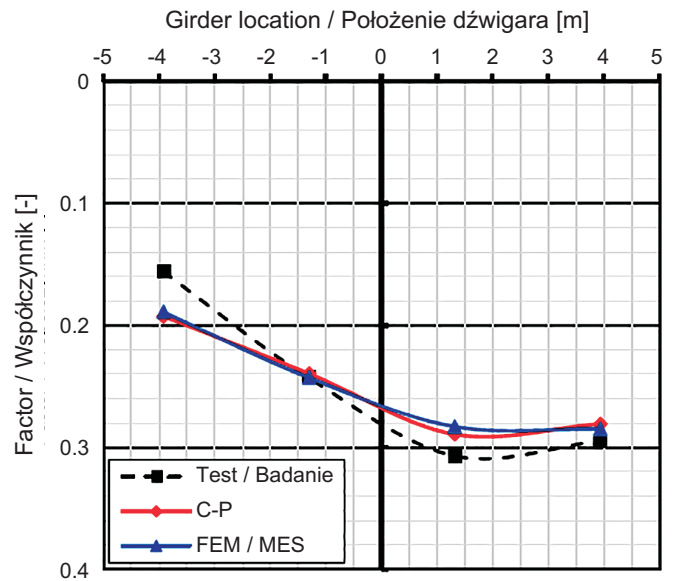


Fig. 8. Load distribution influence lines – inner girder  
Rys. 8. Linie wpływu rozdziału poprzecznego obciążenia dla dźwigara wewnętrznego

The load transverse distribution lines of the bridge, which were analytically determined using the method of orthotropic plates in the Cusens-Pama approach, have characteristics and values corresponding to the appropriate lines determined experimentally. The maximum analytical values of the transverse distribution factors are as follows: equal to 0.387 for the outer girder and equal to 0.289 for the inner girder, which is 101.8% and 94.3% of the values determined experimentally.

Similar high compliance with the measured behavior of the span under the load was obtained for the influence lines designated by the FEM model. The maximum values of the transverse distribution factors were as follows: equal to 0.347 for the outer girder and equal to 0.283 for the inner girder, which is 91.4% and 92.2% of the values obtained experimentally. However, in this case, the transverse distribution factors for both girders – outer and inner – determined using the FEM, were slightly lower than those obtained experimentally. This could be due to an underestimation of the real load of the girders in the FEM model. The values of this underestimation, however, are very small, and with many general assumptions that are used in the design of composite girders [23], do not significantly influence the assessment of their load-bearing capacity.

The values of the distribution factors that were obtained analytically (the C-P method) and numerically (the FEM) differ by 11.5% for the outer girder and by 5.7% for the

pośrodku tego przedziału dla dźwigara zewnętrznego i poza tym przedziałem dla dźwigara wewnętrznego. Należy jednak zastrzec, że dla metody C-P są to wartości nieznacznie zawyżone (w stosunku do doświadczenia) dla dźwigara zewnętrznego i zaniżone dla dźwigara wewnętrznego, a dla metody MES zaniżone dla obydwu dźwigarów. Z punktu widzenia projektowania mostów z dźwigarami kompozytowymi bardziej konserwatywna (tj. bezpieczniejsza) jest zatem metoda C-P. Jednakże w tym przypadku nie ma już możliwości lepszego dopasowania analitycznie uzyskanego rozdziału poprzecznego do uzyskanego z pomiarów charakteru pracy przęsła pod obciążeniem. Taka możliwość istnieje natomiast w przypadku modelu numerycznego, w którym nie uwzględniono kilku aspektów, mogących mieć wpływ na wynik analizy, np. precyzyjnego modelowania laminatów, deskowania traconego, prętów zbrojeniowych w płycie, wyposażenia mostu, itp. Wydaje się zatem, że przy lepszym dopasowaniu modelu numerycznego do rzeczywistej konstrukcji mostu, metoda elementów skończonych będzie znacznie bardziej adekwatna do projektowania belkowo-płytowych mostów kompozytowych niż metoda C-P, na co wskazywali już autorzy prac [9], [10] dla innych konstrukcji belkowo-płytowych przęseł mostowych.

Z drugiej strony, stosując MES uzyskano nieznacznie zaniżone wartości współczynników rozdziału obciążenia, co należy po bezpiecznej stronie projektowania dźwigarów kompozytowych. Wskazuje to na konieczność weryfikacji wyników analiz numerycznych przez równoległe zastosowanie innego podejścia obliczeniowego. Dlatego w projektowaniu mostów kompozytowych wydaje się uzasadnione stosowanie kilku metod analizy statycznej oraz porównywanie ich wyników w celu minimalizacji niepewności w projektowaniu oraz eliminacji grubych błędów, mogących mieć wpływ na bezpieczeństwo konstrukcji. Wyjaśnienie rozbieżności powstałych w wyniku takich porównań może wymagać dalszych badań i/lub walidacji przyjętych modeli obliczeniowych. Takie działanie zwiększy niezawodność konstrukcji, co wydaje się szczególnie ważne w przypadku projektowania obiektów nietypowych, do jakich jeszcze należą mosty z dźwigarami kompozytowymi FRP.

## 7. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Pomimo współczesnej dominacji MES w projektowaniu mostów, analityczne metody rozdziału poprzecznego obciążenia są w dalszym ciągu stosowane do obliczeń statycznych mostów [9], [10], [12]. Umożliwiają one uproszczone obliczanie przęseł, co jest często stosowane do różnego typu analiz wstępnych i studiów koncepcyjnych. Dlatego wydaje się celowe zaprezentowanie tego problemu także dla

inner girder. The measured value of the corresponding factors obtained experimentally is in the middle of this range for the outer girder and outside of this range for the inner girder. However, it needs to be highlighted that for the C-P method these values are slightly overestimated (with respect to the tests) for the outer girder and underestimated for the inner girder, and for the FEM method they are underestimated for both girders. Therefore, when designing bridges made of FRP composite girders, the C-P method is more conservative (i.e. safer). However, in this case there is no possibility to better match the analytically obtained transverse distribution to the one obtained during the load tests of span behavior. In turn, such an option exists in the case of the numerical model that did not take into account several aspects that could affect the outcome of the analysis (e.g. precise laminate modeling, stay-in-place formwork, reinforcement in the deck slab, bridge equipment, etc.). Therefore, it seems that with a better matching of the numerical model to an actual bridge construction, the FEM will be much more appropriate for the designing of plate girder composite bridges than the C-P method, as has already been indicated by the authors of papers [9], [10] for other structures of the slab-girder bridge spans.

On the other hand, when using the FEM, slightly lower load transverse distribution factor values were obtained, which is not safe when designing FRP composite girders. This indicates the need to verify the results of numerical analysis using a parallel application of other computational approaches. Therefore, in the design of FRP composite bridges, it seems reasonable to use several structural analysis methods and to compare their results in order to minimize uncertainty in the design and to eliminate fatal errors that may affect the safety of the structure. Clarification of the discrepancies resulting from such comparisons may require further investigation and/or validation of the accepted computational models. This will increase the reliability of a structure, which seems particularly important when designing atypical building structures. Bridges made of FRP composite girders are considered as such structures.

## 7. SUMMARY AND CONCLUSIONS

Despite the contemporary dominance of the FEM in bridge design, analytical methods of load transverse distribution are still used for structural calculations of bridges [9], [10], [12]. They enable simplified calculations of bridges, which are often used for a variety of preliminary analyses and conceptual studies. Therefore, it seems appropriate to present this problem for the new type of

nowego typu prześła mostowego z dźwigarami hybrydowymi z kompozytu FRP i betonu. Okazją do tego stały się kompleksowe badania takiego mostu, który po raz pierwszy w Polsce został zbudowany pod koniec 2015 r. w Błażowej k. Rzeszowa [19]. Ponieważ jest to pierwszy polski most o takiej konstrukcji, wyniki analiz i porównań przedstawionych w pracy mogą mieć znaczenie praktyczne przy projektowaniu kolejnych tego typu mostów.

W pracy porównano dwie metody wyznaczania rozdziału poprzecznego obciążenia ruchomego z wynikami badań pod próbnym obciążeniem mostu belkowo - płytowego z dźwigarami hybrydowymi typu FRP/beton. Przedstawione w pracy dwa modele prześła mostu: dwuwymiarowy model płyty ortotropowej w ujęciu Cusensa-Pamy i trójwymiarowy powłokowo-bryłowy model w ujęciu MES pozwalają na uzyskanie dużej zgodności symulowanego rozdziału obciążenia na dźwigary mostu z rozdziałem zmierzonym. Dla dźwigara zewnętrznego metoda C-P daje zgodność z wartościami doświadczalnymi na poziomie 101,8% (nieznaczne przeszacowanie wpływu obciążenia), natomiast model MES daje zgodność na minimalnym poziomie 91,4% (niedoszacowanie wpływu obciążenia). Dla dźwigara wewnętrznego zgodności te wynosiły odpowiednio 94,3% dla metody C-P oraz 92,2% dla MES. Można zatem stwierdzić, że zarówno model płyty ortotropowej w ujęciu C-P jak i model numeryczny MES poprawnie symulują sztywność poprzeczną prześła mostu.

Dużym ograniczeniem modelu płyty ortotropowej C-P jest zasada, że może on być stosowany tylko dla układów prześła o regularnej budowie. Dlatego bardziej uniwersalnym w praktycznym projektowaniu jest model numeryczny z zastosowaniem MES. Pozwala on na odwzorowanie dowolnej budowy prześła mostowych, również nieregularnych, jako układów prętowych płaskich (2D) i przestrzennych (3D), o różnej geometrii i schematach statycznych. W ujęciu numerycznym nie jest także konieczna korekta rozdziału poprzecznego obciążenia, jaką stosuje się w metodzie C-P w przypadku modeli jednoprzęsłowych, gdy schemat mostu jest np. ramowy [10]. Wydaje się więc, że w przypadku mostów belkowo-płytowych z dźwigarami hybrydowymi FRP/beton metoda elementów skończonych jest obecnie bardziej racjonalną i praktyczną opcją dla wykonywania analiz statycznych takich mostów. Należy jednak przy tym zwrócić uwagę na konieczność dokładnego modelowania budowy dźwigarów, a w szczególności poszczególnych laminatów tworzących jego elementy. Ponadto w projektowaniu mostów kompozytowych wydaje się uzasadnione stosowanie weryfikacji obliczeń MES za pomocą innych metod analizy statycznej. W pracy wykazano, że metoda C-P może być bardzo dobrym narzędziem do tego celu.

bridge span with hybrid FRP composite and concrete girders. Comprehensive studies of such a bridge, which was first built in Poland in late 2015 in Blazowa near Rzeszow [19], gave such an opportunity. Due to the fact that it is the first Polish bridge with such a construction, the results of the analyses and comparisons presented in the paper may be of practical importance in the design of subsequent bridges of this type.

The paper compares two methods of determining the live load transverse distribution with the results of tests of a slab-girder bridge with FRP/concrete girders under a proof test. The two bridge span models presented in the paper – a two-dimensional model of an orthotropic plate in the Cusens-Pama approach and a three-dimensional shell-solid model in the FEM approach – allow a high compliance of a simulated load distribution of bridge girders with the measured distribution to be obtained. For the outer girder, the C-P method gives compliance with the experimental values at a level of 101.8% (a slight overestimation of the load effect), while the FEM model gives compliance at a minimum level of 91.4% (an underestimation of the load effect). For the inner girder, these compliances were equal to 94.3% for the C-P method and 92.2% for the FEM. It can be concluded that both the orthotropic plate model in the C-P approach and also the FEM numerical model correctly simulate the transverse rigidity of a bridge span.

A big limitation of the C-P orthotropic plate model is the rule that it can only be used for regular-span construction systems. Therefore, the numerical model with the use of the FEM is more universal in design. It allows any bridge span structure, also irregular, to be mapped as bar plain systems (2D) and spatial systems (3D) with different geometries and static schemes. In the numerical approach there is no need to correct the load transverse distribution, as is the case in the C-P method for single span models e.g. for a frame bridge scheme [10]. Therefore, it seems that in the case of slab-girder bridges made of FRP/concrete girders, the finite element method is nowadays a more rational and practical option for the structural analysis of such bridges. It should be noted, however, that it is necessary to accurately model the structure of girders, and in particular the individual laminates that form their elements. In addition, verification of FEM calculations using other structural analysis methods seems to be justified when designing FRP composite bridges. The paper states that the C-P method can be a very good tool for such a purpose.

## INFORMACJE DODATKOWE

Praca powstała w ramach projektu „COMBRIDGE – Innowacyjny most drogowy z kompozytów FRP”. Projekt był realizowany w ramach przedsięwzięcia pilotażowego pn.: Wsparcie badań naukowych i prac rozwojowych w skali demonstracyjnej DEMONSTRATOR+ (umowa nr UOD-DEM-1-041/001) i był współfinansowany przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju.

## BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Westergaard, H.M.*: Computations of stresses in bridge slabs due to wheel loads. *Public Roads*, **11**, 1, 1930, 1-23
- [2] *Courbon J.*: Calcul des ponts á poutres multiples solidarisees par des entretoises. *Annales des Ponts et Chaussées, mémoires et documents relative á l'art des constructions au service de l'ingénieur*, **17**, 1940, 293-322
- [3] *Karaś S.*: O metodzie Courbona. *Drogownictwo*, **LXVI**, 5, 2011, 172-176
- [4] *Leonhardt F.*: Die vereinfachte Berechnung zweiseitig gelagerter Trägerroste. *Ernst & Sohn*, 1939
- [5] *Guyon Y.*: Calcul des ponts larges a poutres multiples solidarisees par les entretoises. *Annales des Ponts et Chaussees*, **24**, 1946, 553-612
- [6] *Massonnet Ch.*: Méthode de calcul des ponts á poutres multiples tenant compte de leur re-sistance á la torsion. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, 1950
- [7] *Bareš R., Massonnet Ch.*: Analysis of Beam Grids and Orthotropic Plates by the Guyon - Massonnet - Bareš Method. *Crosby Lockwood & Son Ltd, SNTL*, 1968
- [8] *Cusens A.R., Pama R.P.*: Analiza statyczna pomostów. *WKiŁ, Warszawa*, 1981
- [9] *Hołowaty J.*: Numeryczny sposób rozdziału obciążeń ruchomych w mostach drogowych. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **9**, 4, 2010, 29-46
- [10] *Machelski C.*: Parametry rozdziału poprzecznego obciążeń w mostach. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **13**, 2, 2014, 131-143
- [11] *Barr P., Eberhard M., Stanton J.*: Live-Load Distribution Factors in Prestressed Concrete Girder Bridges. *Journal of Bridge Engineering*, **6**, 5, 2001, 298-306
- [12] *American Association of State Highway and Transportation Officials AASHTO*. LRFD bridge design specifications, Washington, DC, 2005

## ACKNOWLEDGEMENT

This work was created within the framework of the project: “COMBRIDGE – An innovative FRP composite road bridge”. The project was implemented as part of a pilot program entitled: Support for Research and Development Works in the Demonstrative Scale DEMONSTRATOR+ (Contract No. UOD-DEM-1-041/001) and was co-funded by the National Center for Research and Development.

- [13] *Murat D., Semih E.*: Live Load Distribution Formulas for Single-Span Prestressed Concrete Integral Abutment Bridge Girders. *Journal of Bridge Engineering*, **14**, 6, 2009, 472-486
- [14] *Ziehl P., Engelhardt M., Fowler T., Ulloa F., Medlock R., Schell E.*: Design and Field Evaluation of Hybrid FRP/Reinforced Concrete Superstructure System. *Journal of Bridge Engineering*, **14**, 5, 2009, 309-318
- [15] *Zoghi M.*: The International Handbook of FRP Composites in Civil Engineering. *Boca Raton. CRC Press, Taylor & Francis Group LLC*, 2014
- [16] *Siwowski T., Rajchel M.*: Kształtowanie mostowych dźwigarów hybrydowych typu „kompozyt FRP - beton”. *Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture*, **63**, 2, 2016, 307-320
- [17] *Chen Y., Ziehl P.H., Harrison K.W.*: Experimental characterization and optimization of hybrid FRP/RC bridge superstructure system. *Journal of Bridge Engineering*, **14**, 1, 2009, 45-54
- [18] *Kitane Y., Aref A.*: Static and fatigue testing of hybrid fiber-reinforced polymer - concrete bridge superstructure. *Journal of Composites for Construction*, **8**, 2, 2004, 182-190
- [19] *Siwowski T., Rajchel M., Kaleta D., Własak L.*: Pierwszy w Polsce most drogowy z kompozytów FRP. *Inżynieria i Budownictwo*, **72**, 10, 2016, 534-538
- [20] *Siwowski T., Kaleta D., Kulpa M.*: Projekt pierwszego polskiego mostu drogowego z kompozytów FRP. *Inżynieria i Budownictwo*, **71**, 9, 2015, 465-470
- [21] *Szczygiel J.*: Mosty z betonu zbrojonego i sprężonego. *WKiŁ, Warszawa*, 1978
- [22] *Machelski C.*: Obliczanie mostów z belek prefabrykowanych. *Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław*, 2006
- [23] *JRC Science for Policy Report*. Prospect for new guidance in the design on FRP. Support to the implementation, harmonization and failure development of the Eurocodes, 2016