

ANDRZEJ KOBRYŃ¹⁾

USE OF POLYNOMIAL TRANSITION CURVES IN THE DESIGN OF HORIZONTAL ARCS

WIELOMIANOWE KRZYWE PRZEJŚCIOWE W PROJEKTOWANIU ŁUKÓW POZIOMYCH

STRESZCZENIE. W artykule przedstawiono możliwości geometrycznego kształtowania poziomych łuków tras drogowych za pomocą tzw. wielomianowych krzywych przejściowych. Tego typu rozwiązania krzywych przejściowych, obejmujące odpowiednie rodziny tych krzywych, mogą stanowić użyteczne narzędzie projektowe w praktyce inżynierskiej. Ich geometrię determinuje parametr C opisujący zależność między nachyleniem stycznej w punkcie początkowym, projektowanym promieniem krzywizny w punkcie końcowym oraz odcięta punktu końcowego. Szeroki zakres dopuszczalnych wartości tego parametru sprawia, że w rezultacie możliwy jest dobór takiej geometrii krzywej, która pozwala uzyskać optymalne dopasowanie do ewentualnych ograniczeń terenowych. W związku z powyższym, w artykule przedstawiono zwięzłą charakterystykę geometryczną tych krzywych. Ponadto, przedstawiono odpowiednie wzory obliczeniowe, niezbędne do wyznaczenia w terenie łuku utworzonego przez te krzywe.

SŁOWA KLUCZOWE: drogi i autostrady, łuki poziome, projektowanie geometryczne, trasowanie, wielomianowe krzywe przejściowe.

ABSTRACT. The paper presents the use of polynomial transition curves in the design of curved horizontal alignment of roads. The method based on using appropriate families of polynomial transition curves can provide a useful tool for road engineers. The geometry of these curves is defined by parameter C representing the relationship between the slope of tangent line drawn at the point of curvature, the assumed radius at the point of tangency and x -coordinate. With a wide range of C values it is possible to obtain curves with geometry well adjusted to local constraints. This paper provides a brief description of the geometry of such curves. Moreover, it gives formulas for setting out these curves in field.

KEYWORDS: geometric design, horizontal alignment design, horizontal arcs, polynomial transition curves, roads and motorways.

DOI: 10.7409/rabdim.017.001

¹⁾ Politechnika Białostocka, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Geoinformacji i Gospodarki Przestrzennej, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok; a.kobryn@pb.edu.pl

1. WPROWADZENIE

W projektowaniu geometrii krzywoliniowych odcinków tras drogowych największe zastosowanie znajduje dotychczas kłotoida²⁾. Powszechność jej użycia wynika przede wszystkim z liniowego przyrostu krzywizny wraz z długością łuku. Użycie kłotoidy w projektowaniu dróg z uwzględnieniem różnych, możliwych układów geometrycznych jest szeroko opisywane w literaturze. Przykładem mogą być prace w języku polskim [1-2], bądź też opracowania angielskojęzyczne [3-5].

Oprócz kłotoidy, z literatury znane są liczne rozwiązania innych krzywych przejściowych, które wyróżniają się korzystniejszymi właściwościami w świetle warunków dynamiki ruchu lub dają duże możliwości dopasowania przebiegu trasy do potencjalnych ograniczeń terenowych. Opis najbardziej znanych krzywych z tej grupy zawierają prace [6-8]. Poszukiwania i badania innych krzywych były przedmiotem rozważań również w literaturze zagranicznej. Można tu wymienić między innymi prace [9-12]. Przedstawiono lub analizowano w nich rozwiązania krzywych przejściowych opisanych funkcją krzywizny. Warto nadmienić, że prace [11] i [12] w pewnym stopniu zawierają analizy prowadzące do wyznaczenia rozwiązań krzywych przejściowych, które wcześniej zostały zaprezentowane w literaturze polskiej, m.in. w pracach [6] i [13]. Inne propozycje krzywych przejściowych przedstawiono w artykułach [14-16]. W odróżnieniu od krzywych analizowanych w pracach wymienionych wcześniej, które są opisane funkcją krzywizny, w artykułach tych zaprezentowano krzywe opisane funkcją jawną. W uzupełnieniu tej listy, można wspomnieć o krzywych, które zostały wyznaczone z myślą o projektowaniu łuków pionowych (np. [17] i [18]).

Mając na względzie nie tylko warunki dynamiki ruchu, stanowiące do tej pory główne przesłanki stosowania krzywych przejściowych, lecz również możliwości swobodnego kształtowania geometrycznego łuków w obrębie tras drogowych, uzasadnione jest poszukiwanie innych, korzystniejszych pod tym względem rozwiązań niż kłotoida. Do takich nowoczesnych rozwiązań krzywych przejściowych można zaliczyć tzw. wielomianowe krzywe przejściowe, które zostały zaprezentowane między innymi w pracach [13], [19] i [20]. Podobnie jak kłotoida, dają one możliwość płynnej zmiany krzywizny od zera w punkcie początkowym do określonej wartości maksymalnej w punkcie końcowym. Można dodać, że wielomianowe krzywe przejściowe, które

1. INTRODUCTION

So far clothoid²⁾ has been the most widely used curve in the alignment design of curvilinear road sections. It owes its popularity primarily to the linear increase of curvature along the arc length. Application of clothoids in road alignment design in different geometric arrangements has been widely described in the literature in the field. References include papers by Polish authors [1-2] and papers published in the English language [3-5].

According to literatures, curves other than clothoid are often chosen as a preferred option on the basis of vehicle dynamics or to cope with potential terrain constraints. The most widely used curves in this group are described in [6-8]. Searching for and investigation of curves have been the subject of research of scientists from various countries. The results of their research have been reported for example in [9-12]. They present or examine transition curves described by curvature functions. It is worth to note that papers [11] and [12] contain analyses leading to defining transition curves which have already been presented by Polish researchers, for example in [6] and [13]. Other transition curve options are proposed in [14-16]. However, these curves, other than the curves examined in earlier papers, are described by explicit functions rather than curvature functions used to describe the former curves. Finally, curves defined for design of vertical arcs can be mentioned to complement the list (as described for example in [17] and [18]).

There is a need for options other than clothoid when the flexibility of shaping the horizontal alignment becomes an issue in addition to the vehicle dynamics, which has been the main factor considered in the design of transition curves so far. Polynomial transition curves described for example in [13], [19] and [20] can be considered one of such options. Similarly to the clothoid the transition curves enable gradual increase of the radius from zero at the point of curvature (PC) to a pre-defined maximum value of radius at the point of tangency (PT). Note also that the polynomial transition curves which are examined in the further part of this paper were proposed by the author also for use in the design of vertical arcs ([21-23]).

Polynomial transition curves are distinguished by their characteristic placement in the Cartesian coordinate system, clearly different than that of clothoid. In clothoids the

²⁾ krzywa przejściowa stosowana w trasowaniu drogi na planie w celu stworzenia łagodnego przejścia pomiędzy dwoma elementami trasy o różnej krzywiznie, zwykle między prostą a łukiem kołowym

²⁾ transition curves are used in road horizontal alignment design to obtain gradual transition between two elements of different curvature, most often between a tangent and a circular curve

są analizowane w dalszej części niniejszego artykułu, zostały zaproponowane przez autora również do projektowania łuków pionowych ([21-23]).

Cechą charakterystyczną wielomianowych krzywych przejściowych jest odmienne niż klotoida ulokowanie w układzie współrzędnych prostokątnych. Jak wiadomo, w przypadku klotoidy styczna główna zajmuje położenie poziome, czego wynikiem są określone procedury wyznaczania łuków poziomych w podejściu tradycyjnym. W przeciwieństwie do klotoidy, w przypadku wielomianowych krzywych przejściowych styczna w punkcie początkowym jest nachylona pod określonym kątem względem osi odciętych, natomiast styczna w punkcie końcowym jest pozioma (Rys. 1). Wielomianowe krzywe przejściowe są więc odpowiednikiem sinusoidalnej krzywej przejściowej, której użycie w projektowaniu łuków poziomych zostało przedstawione przez autora w [24].

Z uwagi na możliwość transformacji współrzędnych do dowolnego układu współrzędnych, nie stanowi to oczywiście przeszkody w użyciu tych krzywych w trasowaniu łuków poziomych. Za takim, alternatywnym podejściem przemawiają bowiem szerokie możliwości elastycznego kształtowania geometrii wielomianowych krzywych przejściowych, co może być korzystne w razie konieczności dopasowania przebiegu łuku do ograniczeń terenowych. W dalszej części artykułu zostaną przedstawione równania, umożliwiające wygodne stosowanie wielomianowych krzywych przejściowych w zastosowaniach drogowych w odniesieniu do projektowania łuków poziomych.

2. MATEMATYCZNY OPIS WIELOMIANOWYCH KRZYWYCH PRZEJŚCIOWYCH

Wśród znanych rozwiązań wielomianowych krzywych przejściowych można wymienić krzywe z gładkim oraz niegładkim wykresem krzywizny. Rodzina wielomianowych krzywych przejściowych z gładkim wykresem krzywizny została wyznaczona przez Grabowskiego w [13] i jest opisana równaniem:

$$y = \frac{x_K \operatorname{tg} u_p}{C} \left[Ct + \frac{2-5C}{2} t^4 - \frac{7-15C}{5} t^5 + \frac{1-2C}{2} t^6 \right], \quad (1)$$

przy czym $t = x / x_K$ oraz $x \in \langle 0, x_K \rangle$. W powyższym równaniu x_K jest odcięta punktu końcowego w lokalnym układzie współrzędnych krzywej, $\operatorname{tg} u_p$ – nachyleniem stycznej w punkcie początkowym krzywej, natomiast C – parametrem opisującym zależność między nachyleniem stycznej w punkcie początkowym, projektowanym promieniem

tangent line drawn at the point of curvature runs horizontally which results in specific horizontal arc design procedures applied in the conventional approach. This is different in the case of polynomial transition curves in which the tangent line drawn at the point of curvature is inclined in relation to the x-axis and the tangent line drawn at the point of tangency runs horizontally (Fig. 1). As such, polynomial transition curves can be considered equivalent of sinusoidal transition curves whose application in horizontal arc design is presented in [24].

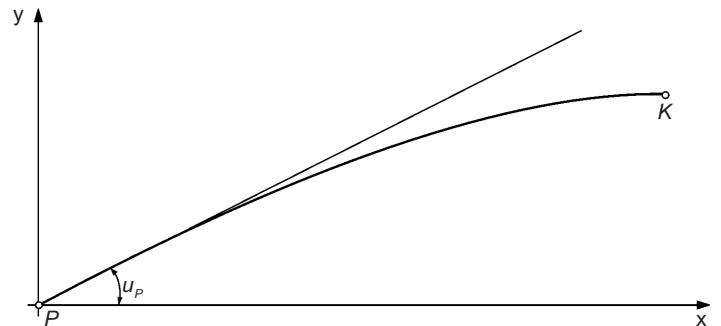


Fig. 1. Polynomial transition curve drawn in a local coordinate system
Rys. 1. Wielomianowa krzywa przejściowa w lokalnym układzie współrzędnych

With possible transformation of the original coordinates to any system it is not a problem to use these curves for design of horizontal arcs. The rationale for using this alternative approach are the extensive possibilities of shaping polynomial transition curves, which may be desirable in the case of terrain constraints in the area of the planned curve. The following part of this paper presents formulas with which polynomial transition curves can be conveniently used in designing horizontal arcs of road alignment.

2. MATHEMATICAL DESCRIPTION OF POLYNOMIAL TRANSITION CURVES

The available polynomial transition curves include curves with smooth or non-smooth curvature graphs. A family of polynomial transition curves with smooth curvature graph was defined by Grabowski in [13] and is represented by the following equation:

$$y = \frac{x_K \tan u_p}{C} \left[Ct + \frac{2-5C}{2} t^4 - \frac{7-15C}{5} t^5 + \frac{1-2C}{2} t^6 \right], \quad (1)$$

where $t = x / x_K$ and $x \in \langle 0, x_K \rangle$. In the above equation x_K is the x-coordinate of the point of tangency in the local

krzywizny R_K w punkcie końcowym oraz odcięta punktu końcowego. Zgodnie z pracą [6], parametr C jest opisany równaniem:

$$C = \frac{R_K \operatorname{tg} u_p}{x_K}, \quad (2)$$

i w przypadku krzywych (1) może przybierać wartości z przedziału $C \in \langle 2/5, 3/5 \rangle$.

Natomiast rodzina wielomianowych krzywych przejściowych z niegładkim wykresem krzywizny została wyznaczona przez Kobryń [19] i jest opisana równaniem:

$$y = \frac{x_K \operatorname{tg} u_p}{C} \left[Ct + \frac{1-3C}{3} t^3 - \frac{1-2C}{4} t^4 \right]. \quad (3)$$

W przypadku krzywych (3) parametr opisany równaniem (2) może przybierać wartości z przedziału $C \in \langle 1/3, 2/3 \rangle$.

Z zależności (2) wynika, że odcięta punktu końcowego x_K jest odwrotnie proporcjonalna do wartości parametru C . Możliwe do uzyskania różnice długości odciętej x_K uwidaczniają się szczególnie dla skrajnych wartości C z podanych przedziałów dopuszczalnych. W przypadku krzywych (1), dla $C = 2/5$ długość x_K jest o 50% większa niż dla $C = 3/5$. Natomiast w przypadku krzywych (3), odcięta x_K dla $C = 1/3$ jest dwukrotnie dłuższa niż dla $C = 2/3$.

Dzięki powyższym możliwościom doboru wartości parametru C spośród wartości dopuszczalnych, uzyskuje się dużą swobodę kształtowania geometrii krzywych (1) oraz (3), co ilustruje Rys. 2. Na rysunku przedstawiono przykładowe wykresy tych krzywych, odpowiadające jednakowej wartości nachylenia stycznej początkowej ($\operatorname{tg} u_p$), jednakowej wartości promienia krzywizny w punkcie końcowym R_K , lecz różnym wartościom parametru C . W odniesieniu do parametru C przyjęto przy tym następujące oznaczenia: C_g – parametr krzywej (1) z gładkim wykresem krzywizny, C_n^g – parametr krzywej (3) z niegładkim wykresem krzywizny.

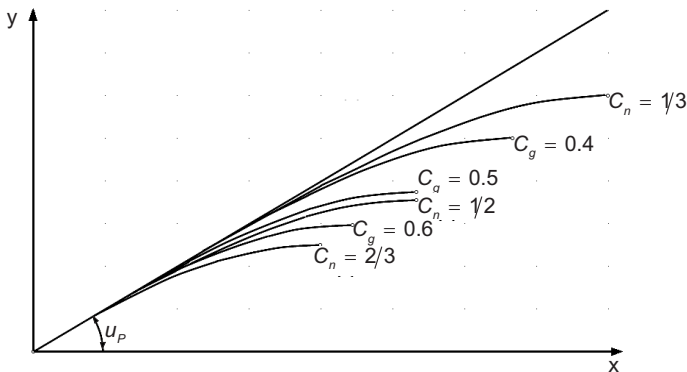


Fig. 2. Example graphs of curves defined by equations (1) and (3)
Rys. 2. Przykładowe wykresy krzywych zdefiniowanych równaniami (1) i (3)

system of coordinates, $\tan u_p$ is the slope of the tangent line drawn at the point of curvature, and C is the parameter representing the relationship between the slope of the tangent line drawn at the point of curvature, planned radius at the point of tangency R_K and x -coordinate of the point of tangency. According to [6] C can be calculated with the following equation:

$$C = \frac{R_K \tan u_p}{x_K}, \quad (2)$$

and for curves (1) it assumes values from the range $C \in \langle 2/5, 3/5 \rangle$.

The following equation describes a family of polynomial transition curves with non-smooth curvature graph, defined by Kobryń in [19]:

$$y = \frac{x_K \tan u_p}{C} \left[Ct + \frac{1-3C}{3} t^3 - \frac{1-2C}{4} t^4 \right]. \quad (3)$$

In the case of curves (3) the parameter described by equation (2) can assume values from the range $C \in \langle 1/3, 2/3 \rangle$.

According to (2) the x -coordinate at the point of tangency is inversely proportional to the value of C . The available differences of the length of x_K are particularly evident for the limit values of the specified permissible ranges of C . In the case of curves (1) for $C = 2/5$ the length of x_K is by 50% greater than for $C = 3/5$. For curves (3) the length of x_K for $C = 1/3$ is two times greater than for $C = 2/3$.

The option to choose the value of C from the permitted range of values provides high flexibility of shaping the curves (1) and (3) - see Fig. 2. The drawing presents examples of such curves with the same value of slope of the tangent line drawn at the point of curvature ($\tan u_p$), the same radius at the point of tangency R_K and different values of C . The following designations are used for parameter C : C_g – parameter of curve (1) with smooth curvature graph, C_n^g – parameter of curve (3) with non-smooth curvature graph.

Note that x -coordinate x_K fulfils the role of scaling factor defining the value of y -coordinate. From the relationship (2) we can see that x_K has a similar effect on the length of radius R_K . Bringing back the concept of unit clothoid we can see a similar understanding of polynomial curve for $x_K = 1$ or $R_K = 1$. However, in the present-day situation with all design computations performed with the assistance of computers this has no practical effect, other than in the case of unit clothoid in earlier times. In the case of polynomial transition curves it is more the case of signal indicating possibility of expanding their geometric characteristics at $x_K = 1$ or $R_K = 1$ to any other values of these quantities.

Należy zauważyć, że odcięta x_K pełni rolę czynnika skalującego, od którego zależy wartość rzędnej y . Z zależności (2) wynika, że w podobny sposób odcięta x_K wpływa na długość promienia R_K . Nawiązując do pojęcia klotoidy jednostkowej, stwierdzimy więc, że przy $x_K = 1$ lub $R_K = 1$ chodzi o podobne rozumienie wielomianowej krzywej przejściowej. Z uwagi na współczesne realia i komputerowe wspomaganie wszelkich obliczeń projektowych, nie ma to jednak znaczenia praktycznego (jak dawniej w przypadku klotoidy jednostkowej). W odniesieniu do wielomianowych krzywych przejściowych chodzi raczej o sygnał wskazujący na możliwość rozszerzenia ich charakterystyki geometrycznej przy $x_K = 1$ lub $R_K = 1$ na inne, dowolne wartości tych wielkości.

W uzupełnieniu podstawowej charakterystyki analizowanych krzywych można dodać, że rzędna punktu końcowego wynika z równań (1) i (3) dla $x = x_K$ (czyli dla $t = 1$) i jest opisana równaniami:

- w przypadku krzywych (1)

$$y_K = x_K \operatorname{tg} u_p \frac{5C+1}{10C} = R_K \operatorname{tg}^2 u_p \frac{5C+1}{10C^2}, \quad (4)$$

- w przypadku krzywych (3)

$$y_K = x_K \operatorname{tg} u_p \frac{6C+1}{12C} = R_K \operatorname{tg}^2 u_p \frac{6C+1}{12C^2}. \quad (5)$$

Należy dodać, że równania (4) i (5) są istotne z punktu widzenia procedury obliczeniowej, związanej z trasowaniem łuku poziomego z użyciem odpowiedniej krzywej, co zostanie przedstawione w dalszej części tego opracowania.

Długość cięciwy łączącej punkty początkowy i końcowy krzywych (1) lub (3) wynika z równania:

$$s = \sqrt{x_K^2 + y_K^2}. \quad (6)$$

Na podstawie powyższego równania, po uwzględnieniu zależności:

$$x_K = \frac{R_K \operatorname{tg} u_p}{C} \quad (7)$$

oraz odpowiednio (4) i (5), uzyskuje się:

- w przypadku krzywych (1)

$$s = R_K \operatorname{tg} u_p \sqrt{\frac{1}{C^2} + \operatorname{tg}^2 u_p \left(\frac{5C+1}{10C^2}\right)^2}, \quad (8)$$

- w przypadku krzywych (3)

$$s = R_K \operatorname{tg} u_p \sqrt{\frac{1}{C^2} + \operatorname{tg}^2 u_p \left(\frac{6C+1}{12C^2}\right)^2}. \quad (9)$$

In addition to the basic characteristic of the analysed curves we can add that the PT ordinate results from equations (1) and (3) for $x = x_K$ (that is for $t = 1$) and it is described by the following equations:

- for curves (1)

$$y_K = x_K \tan u_p \frac{5C+1}{10C} = R_K \tan^2 u_p \frac{5C+1}{10C^2}, \quad (4)$$

- for curves (3)

$$y_K = x_K \tan u_p \frac{6C+1}{12C} = R_K \tan^2 u_p \frac{6C+1}{12C^2}. \quad (5)$$

Note that equations (4) and (5) are important from the point of view of the calculation procedure related to designing horizontal arcs with appropriate curves, which will be presented further below.

The length of chord between PC and PT of curves (1) or (3) is defined by the following equation:

$$s = \sqrt{x_K^2 + y_K^2}. \quad (6)$$

Taking the above equation and the relationship

$$x_K = \frac{R_K \tan u_p}{C} \quad (7)$$

and (4) and (5), as appropriate, yields:

- for curves (1)

$$s = R_K \tan u_p \sqrt{\frac{1}{C^2} + \tan^2 u_p \left(\frac{5C+1}{10C^2}\right)^2}, \quad (8)$$

- for curves (3)

$$s = R_K \tan u_p \sqrt{\frac{1}{C^2} + \tan^2 u_p \left(\frac{6C+1}{12C^2}\right)^2}. \quad (9)$$

Table 1 gives the values of x_K , y_K and s for chosen $\tan u_p$ and C pairs, assuming R_K . These values show how useful it is for designers to be able to freely choose the value of C from a set of values permitted for a given curve. In both families of curves the value of C has a significant effect on both the dimensions and the long chord, as well as the arc geometry. Moreover, the obtained values show that for the same values of R_K , $\tan u_p$ and C arcs made up of curves (1) are slightly longer than the corresponding arcs made up of curves (3).

Table 1. Values of x_K , y_K and s corresponding to selected $\tan u_p$ and C pairs (assuming $R_K = 1$)
 Tablica 1. Wartości x_K , y_K oraz s odpowiadające wybranym parom $\tan u_p$ oraz C (przy założeniu $R_K = 1$)

Slope Nachylenie $\tan u_p$	Parameter Parametr C	Curves / Krzywe (1)			Curves / Krzywe (3)		
		x-coordinate odcięta x_K	y-coordinate rzędna y_K	chord cięciwa s	x-coordinate odcięta x_K	y-coordinate rzędna y_K	chord cięciwa s
0.5	1/3	–	–	–	1.50000	0.56250	1.60200
	0.4	1.25000	0.46875	1.33500	1.25000	0.44271	1.32608
	0.5	1.00000	0.35000	1.05948	1.00000	0.33333	1.05409
	0.6	0.83333	0.27778	0.87841	0.83333	0.26620	0.87482
	2/3	–	–	–	0.75000	0.23438	0.78577
1.0	1/3	–	–	–	3.00000	2.25000	3.75000
	0.4	2.50000	1.87500	3.12500	2.50000	1.77083	3.06363
	0.5	2.00000	1.40000	2.44131	2.00000	1.33333	2.40370
	0.6	1.66667	1.11111	2.00308	1.66667	1.06481	1.97778
	2/3	–	–	–	1.50000	0.93750	1.76887
1.5	1/3	–	–	–	4.50000	5.06250	6.77340
	0.4	3.75000	4.21875	5.64450	3.75000	3.98438	5.47154
	0.5	3.00000	3.15000	4.35000	3.00000	3.00000	4.24264
	0.6	2.50000	2.50000	3.53553	2.50000	2.39583	3.46266
	2/3	–	–	–	2.25000	2.10938	3.08415

3. WIELOMIANOWE KRZYWE PRZEJŚCIOWE JAKO ELEMENT ŁĄCZĄCY PROSTĄ Z ŁUKIEM KOŁOWYM

W tradycyjnych zastosowaniach klotoidy z reguły mamy do czynienia z dwoma rodzajami układów geometrycznych:

- klotoida – łuk kołowy – klotoida,
- biklotoida.

Przy stosowaniu zamiast klotoidy odpowiedniej wielomianowej krzywej przejściowej, ogólne zasady wyznaczania tych układów geometrycznych pozostałyby niezmiennione. Zasadnicza różnica tkwiłaby natomiast w szczególnym podejściu do obliczania wielkości liniowych, służących do wyznaczania łuku utworzonego przez krzywą (1) lub (3), jeśli odpowiednie wielkości geometryczne byłyby odniesione - tak jak w przypadku klotoidy - do stycznej głównej, czyli stycznej w punkcie początkowym. Wzory pozwalające na realizację obliczeń tych wielkości wynikają z Rys. 3.

Na podstawie Rys. 3 można zapisać odpowiednie równania, niezbędne do wyznaczenia łuku. Opisują one kolejno:

- styczną główną $T(\overline{PW})$

$$T = \frac{x_K}{\cos u_p}, \quad (10)$$

3. POLYNOMIAL TRANSITION CURVES USED TO CONNECT A TANGENT WITH CIRCULAR ARC

There are two conventional clothoid-based geometric systems:

- clothoid – circular arc – clothoid,
- biclothoid.

Replacing clothoid with an appropriate polynomial transition curve would not change the general principles of defining these geometrical systems. The primary difference lies in the particular approach to calculation of linear quantities used for defining the arc formed by curve (1) or (3) in the case when the respective geometric quantities are related to the main tangent line, that is the tangent line drawn at the point of curvature, as in the case of clothoid. The formulas for calculating these quantities transpire from Fig. 3.

On the basis of Fig. 3 we can write appropriate equations which are necessary for defining the arc. These equations describe:

- tangent line at the point of curvature $T(\overline{PW})$

$$T = \frac{x_K}{\cos u_p}, \quad (10)$$

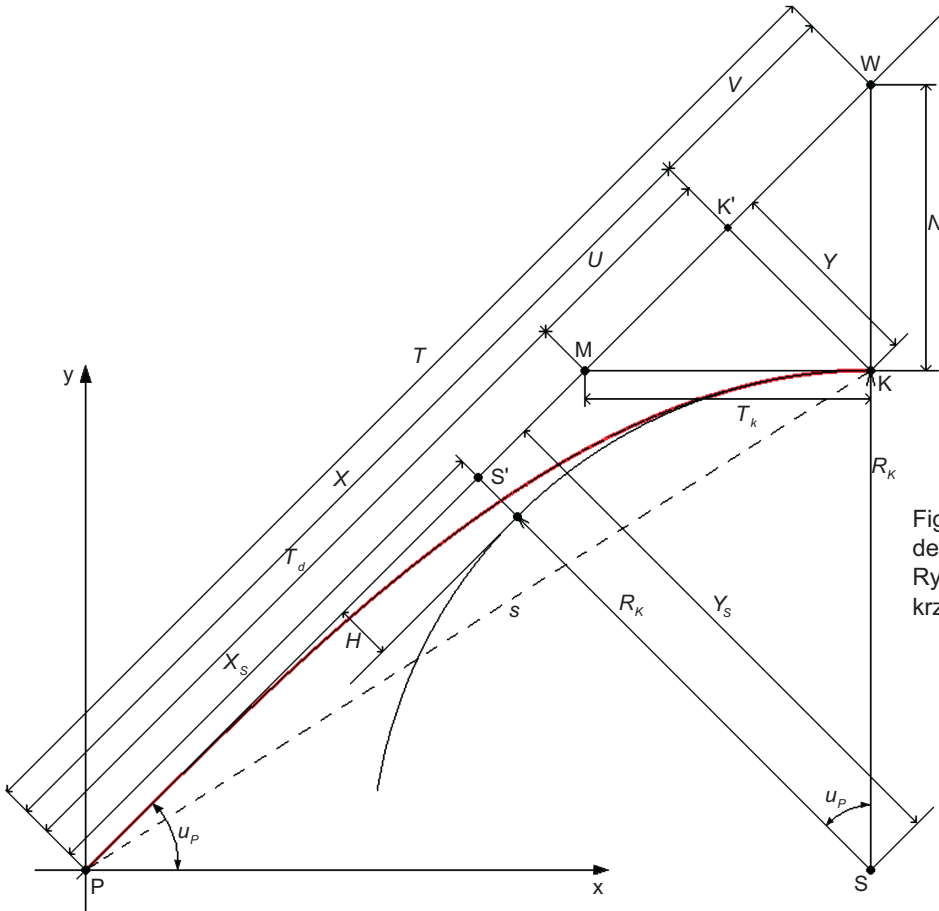


Fig. 3. Designing of an arc composed of curves defined by equation (1) or (3)

Rys. 3. Projektowanie łuku utworzonego przez krzywe zdefiniowane równaniem (1) lub (3)

- długość stycznej T_d (\overline{PM})

$$T_d = \frac{y_K}{\sin u_p}, \quad (11)$$

- normalną N (\overline{WK})

$$N = T \sin u_p - y_K, \quad (12)$$

- krótką styczną T_k (\overline{MK})

$$T_k = \frac{N}{\operatorname{tg} u_p}, \quad (13)$$

- odciętą X końca wielomianowej krzywej przejściowej, odniesioną do stycznej głównej ($\overline{PK'}$)

$$X = T - \overline{K'W}, \quad (14)$$

- rzędną Y końca wielomianowej krzywej przejściowej, liczoną od stycznej głównej ($\overline{K'K}$)

$$Y = N \cos u_p, \quad (15)$$

- odsunięcie koła krzywizny od stycznej głównej H

$$H = \overline{SS'} - R_K, \quad (16)$$

- long tangent line T_d (\overline{PM})

$$T_d = \frac{y_K}{\sin u_p}, \quad (11)$$

- normal line N (\overline{WK})

$$N = T \sin u_p - y_K, \quad (12)$$

- short tangent line T_k (\overline{MK})

$$T_k = \frac{N}{\tan u_p}, \quad (13)$$

- x -coordinate X of the end of polynomial transition curve referred to the tangent line at the point of curvature ($\overline{PK'}$)

$$X = T - \overline{K'W}, \quad (14)$$

- ordinate Y of the end of transition curve measured from the tangent line at the point of curvature ($\overline{K'K}$)

$$Y = N \cos u_p, \quad (15)$$

- offset of curvature circle from the tangent line at the point of curvature H

$$H = \overline{SS'} - R_K, \quad (16)$$

- odciętą X_S środka koła krzywizny ($\overline{PS'}$)

$$X_S = X - R_K \sin u_p, \quad (17)$$

- rzędną Y_S środka koła krzywizny ($\overline{S'S}$)

$$Y_S = H + R_K, \quad (18)$$

- podstyczną U ($\overline{MK'}$)

$$U = T_k \cos u_p, \quad (19)$$

- podnormalną V ($\overline{K'W}$)

$$V = N \sin u_p. \quad (20)$$

- x -coordinate X_S of the centre of circle of curvature ($\overline{PS'}$)

$$X_S = X - R_K \sin u_p, \quad (17)$$

- ordinate Y_S of the centre of circle of curvature ($\overline{S'S}$)

$$Y_S = H + R_K, \quad (18)$$

- sub-tangent line U ($\overline{MK'}$)

$$U = T_k \cos u_p, \quad (19)$$

- sub-normal line V ($\overline{K'W}$)

$$V = N \sin u_p. \quad (20)$$

Korzystając z powyższych równań, a także z zależności (2) oraz (4) i (5), po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymano wzory końcowe, które zestawiono w Tabl. 2. Analogicznie jak w klasycznym podejściu z użyciem kłotoi- dy ([1], [2]), wielkości geometryczne wynikające z przed- stawionych równań mogą znaleźć zastosowanie w wyzna- czaniu łuków złożonych z symetrycznych lub niesy- metrycznych gałęzi krzywych (1) lub (3) w połączeniu z łukiem kołowym. Na identycznych zasadach, jak w przy- padku bikłotoi- dy, możliwe jest też wyznaczenie łuku złożo- nego z symetrycznych lub niesymetrycznych gałęzi krzy- wych (1) lub (3), ale z pominięciem łuku kołowego. Podział całego kąta zwrotu trasy γ na część przypadającą na łuk kołowy i części przypadające na dwa łuki krzywej (1) lub (3) odbywałby się według obowiązujących reguł, czyli zgodnie z warunkiem:

$$\gamma \geq 2u_p. \quad (21)$$

Natomiast do wyznaczenia punktów pośrednich łuku krzy- wej mogą posłużyć wzory definiujące położenie tych pun- któw w odniesieniu do stycznej głównej PW . Przyjmując początek lokalnego układu współrzędnych w punkcie P , stwierdzimy, że współrzędne x' i y' można wyznaczyć ze wzorów transformacyjnych w postaci:

$$x' = x \cos u_p + y \sin u_p \quad (22)$$

oraz

$$y' = x \sin u_p - y \cos u_p. \quad (23)$$

przy czym: $x = t \cdot x_K$ (gdzie $t \in \langle 0, 1 \rangle$), natomiast wartość rzędnej y wynika z równania odpowiedniej krzywej (1) lub (3).

The final formulas compiled in Table 2 are obtained through appropriate transformations of the above equa- tions and relationships (2), (4) and (5). Similarly to the clothoid – based conventional approach ([1], [2]) the geo- metric quantities obtained with these equations can be used for defining arcs composed of symmetric or non symmetric branches of curves (1) or (3) in combination with a circular arc. The same principle as used for biclothoid can be used to define an arc composed of sym- metric or non-symmetric branches of curves (1) or (3), yet without circular arch. The division of the intersection (route turn) angle γ between the circular arc and the two arcs of curve (1) or (3) would follow the same principles, i.e. according to the following condition:

$$\gamma \geq 2u_p. \quad (21)$$

Intermediate points can be determined with the formulas defining their positions in relation to the PW tangent line drawn at the point of curvature. Let the origin of the local system of coordinates be at point P and then coordinates x' and y' can be calculated with transformation formulas written as follows:

$$x' = x \cos u_p + y \sin u_p \quad (22)$$

and

$$y' = x \sin u_p - y \cos u_p. \quad (23)$$

where $x = t \cdot x_K$ with $t \in \langle 0, 1 \rangle$, and the value of y -coordi- nate can be determined from equation of curve (1) or (3) as appropriate.

Table 2. Formulas describing the quantities required for defining of arch with the use of curves (1) and (3)
 Tablica 2. Wzory opisujące wielkości niezbędne do wyznaczenia łuku z użyciem krzywych opisanych (1) oraz (3)

Quantity Wielkość	Equation / Wzór	
	curves / krzywe (1)	curves / krzywe (3)
Tangent line at the point of curvature Styczna główna	$T = R_K \frac{\tan u_p}{\cos u_p} \frac{1}{C}$	$T = R_K \frac{\tan u_p}{\cos u_p} \frac{1}{C}$
Long tangent line Długa styczna	$T_d = R_K \frac{\tan u_p}{\cos u_p} \frac{5C + 1}{10C^2}$	$T_d = R_K \frac{\tan u_p}{\cos u_p} \frac{6C + 1}{12C^2}$
Normal line Normalna	$N = R_K \tan^2 u_p \frac{5C - 1}{10C^2}$	$N = R_K \tan^2 u_p \frac{6C - 1}{12C^2}$
Short tangent line Krótka styczna	$T_K = R_K \tan u_p \frac{5C - 1}{10C^2}$	$T_K = R_K \tan u_p \frac{6C - 1}{12C^2}$
PT x-coordinate related to the tangent line drawn at the point of tangency Odcięta końca odniesiona do stycznej głównej	$X = R_K \frac{\tan u_p}{\cos u_p} \left(\frac{1}{C} - \sin^2 u_p \frac{5C - 1}{10C^2} \right)$	$X = R_K \frac{\tan u_p}{\cos u_p} \left(\frac{1}{C} - \sin^2 u_p \frac{6C - 1}{12C^2} \right)$
PT y-coordinate measured from the tangent line drawn at the point of tangency Rzędna końca liczona od stycznej głównej	$Y = R_K \tan^2 u_p \cos u_p \frac{5C - 1}{10C^2}$	$Y = R_K \tan^2 u_p \cos u_p \frac{6C - 1}{12C^2}$
Offset of the circle of curvature Odsunięcie koła krzywizny	$H = R_K \left[\cos u_p \left(\tan^2 u_p \frac{5C - 1}{10C^2} + 1 \right) - 1 \right]$	$H = R_K \left[\cos u_p \left(\tan^2 u_p \frac{6C - 1}{12C^2} + 1 \right) - 1 \right]$
x-coordinate of the circle of curvature centre Odcięta środka koła krzywizny	$X_S = R_K \sin u_p \left[\frac{1}{\cos^2 u_p} \left(\frac{1}{C} - \sin^2 u_p \frac{5C - 1}{10C^2} \right) - 1 \right]$	$X_S = R_K \sin u_p \left[\frac{1}{\cos^2 u_p} \left(\frac{1}{C} - \sin^2 u_p \frac{6C - 1}{12C^2} \right) - 1 \right]$
y-coordinate of the circle of curvature centre Rzędna środka koła krzywizny	$Y_S = R_K \cos u_p \left(\tan^2 u_p \frac{5C - 1}{10C^2} + 1 \right)$	$Y_S = R_K \cos u_p \left(\tan^2 u_p \frac{6C - 1}{12C^2} + 1 \right)$
Sub-tangent Podstyczna	$U = R_K \sin u_p \frac{5C - 1}{10C^2}$	$U = R_K \sin u_p \frac{6C - 1}{12C^2}$
Sub-normal Podnormalna	$Y = R_K \sin u_p \tan^2 u_p \frac{5C - 1}{10C^2}$	$Y = R_K \sin u_p \tan^2 u_p \frac{6C - 1}{12C^2}$

4. WNIOSKI

Przedstawione równania pozwalają na wprowadzenie wielomianowych krzywych przejściowych do praktyki projektowej w zakresie wyznaczania krzywoliniowych odcinków tras drogowych. Zależności (2), (4) oraz (5) umożliwiają wygodne powiązanie ze sobą podstawowych parametrów projektowych tych krzywych, takich jak: minimalny promień krzywizny, nachylenie stycznej początkowej oraz rozpiętość łuku krzywej, wyrażona pośrednio za pomocą odciętej i rzędnej punktu końcowego. Pozostałe wzory szczegółowe umożliwiają obliczenie niezbędnych danych do wyznaczenia łuku wielomianowej krzywej przejściowej w terenie.

4. CONCLUSIONS

These equations enable introducing polynomial transition curves into design practice for designing curvilinear sections of road alignments. The relationships (2), (4) and (5) enable relating, in a convenient manner, the key design parameters including: the minimum radius of curvature, slope of tangent line at the point of curvature and long chord length expressed indirectly by the x and y coordinates of the point of tangency. The remaining detailed formulas enable calculating the data required for setting out the arc of polynomial transition curve in field.

The above analyses allow us to conclude that owing to extensive shaping capabilities polynomial transition curves

Podsumowując, należy stwierdzić, że wielomianowe krzywe przejściowe mogą być użytecznym narzędziem projektowym w trasowaniu tras drogowych, z uwagi na szerokie możliwości kształtowania ich geometrii. Potwierdzeniem tego potencjału aplikacyjnego są bez wątpienia wyniki przykładowych obliczeń wybranych parametrów geometrycznych.

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Lipiński M.*: Geometria i tyczenie tras drogowych. Rozdział 1 w pracy zbiorowej „Geodezja inżynierska”, tom 3, Polskie Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, Warszawa-Wrocław, 1993
- [2] *Grabowski R.J., Kobryń A.*: Fotogrametria i techniki numeryczne w projektowaniu tras komunikacyjnych. Rozdział 2 w pracy zbiorowej „Geodezja inżynierska”, tom 3, Polskie Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, Warszawa-Wrocław, 1993
- [3] *Brockenbrough R.L.* (Ed.): Highway engineering handbook. 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 2009
- [4] *Lamm R., Psarianos B., Mailänder T.*: Highway design and traffic safety engineering handbook. McGraw-Hill, New York, 1999
- [5] *Wolhuter K.M.*: Geometric design of roads handbook. CRC Press, Boca Raton, 2015
- [6] *Grabowski R.J., Kobryń A.*: Krzywe przejściowe z gładkim wykresem krzywizny jako element geometrii trasy drogowej. *Drogownictwo*, **LII**, 7, 1997, 212-214
- [7] *Kobryń A.*: Klotoidea i inne krzywe przejściowe. *Drogownictwo*, **LXIII**, 6-7, 2008, 189-195
- [8] *Kobryń A.*: Nowe typy krzywych przejściowych do definiowania tras komunikacyjnych. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **7**, 3, 2008, 5-8
- [9] *Koc W.*: Analytical method of modeling the geometric systems of communication route. *Mathematical Problems in Engineering*, **vol. 2014**, 2014, 1-13
- [10] *Mauga T.*: New spiral curves for appropriate transition of minimum roadside clearance on simple curves. *Journal of Transportation Technologies*, **5**, 3, 2015, 141-148
- [11] *Baykal O., Tari E., Coskun Z., Sahin M.*: New transition curve joining two straight lines. *Journal of Transportation Engineering*, **123**, 5, 1997, 337-345
- [12] *Tari E., Baykal O.*: A new transition curve with enhanced properties. *Canadian Journal of Civil Engineering*, **32**, 5, 2005, 913-923
- [13] *Grabowski R.J.*: Gładkie przejścia krzywoliniowe w drogach kołowych i kolejowych. *Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja*, 82, 1984, Kraków
- [14] *Lipičnik M.*: New form of road/railway transition curve. *Journal of Transportation Engineering*, **124**, 6, 1998, 546-556
- [15] *Eliou N., Kaliabetsos G.*: A new, simple and accurate transition curve type for use in road and railway alignment design. *European Transport Research Review*, **6**, 2, 2014, 171-179
- [16] *Pirti A., Yüncel A., Ocalan T.*: Transrapid and the transition curve as sinusoid. *Technički vjestnik*, **23**, 1, 2016, 315-320
- [17] *Easa S.M., Hassan Y.*: Development of transitioned vertical curve: I properties. *Transportation Research Part A*, **34**, 6, 2000, 481-486
- [18] *Easa S.M., Hassan Y.*: Development of transitioned vertical curve: II. sight distance. *Transportation Research Part A*, **34**, 7, 2000, 565-584
- [19] *Kobryń A.*: Wielomianowe krzywe przejściowe w projektowaniu niwelety tras drogowych. *Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Rozprawy Naukowe nr 100*, Białystok, 2002
- [20] *Kobryń A.*: Wielomianowe kształtowanie krzywych przejściowych. *Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Rozprawy Naukowe nr 167*, Białystok, 2009
- [21] *Kobryń A.*: Transition curves in vertical alignment as a method for reducing fuel consumption. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*, **9**, 4, 2014, 260-268
- [22] *Kobryń A.*: Vertical arcs design using polynomial transition curves. *KSCE Journal of Civil Engineering*, **20**, 1, 2016, 376-384
- [23] *Kobryń A.*: Ekonomiczno-geometryczne aspekty projektowania łuków pionowych. *Drogownictwo*, **LXVI**, 1, 2011, 14-20
- [24] *Kobryń A.*: Sinusoida jako krzywa przejściowa. *Drogownictwo*, **LXI**, 7, 2006, 242-245