

VASILY KRASOVSKY¹⁾ALEXEY KARASEV²⁾

PROPERTIES OF NUMERICAL SOLUTION OF THE DEFORMATION AND STABILITY PROBLEM IN SHALLOW CONICAL SHELLS UNDER EXTERNAL PRESSURE

WŁAŚCIWOŚCI ROZWIĄZANIA NUMERYCZNEGO ZADANIA DEFORMACJI I STATECZNOŚCI MAŁOWYNIOSŁYCH POWŁOK STOŻKOWYCH PODDANYCH DZIAŁANIU CIŚNIENIA ZEWNĘTRZNEGO

STRESZCZENIE. W pracy wykonano analizę rozwiązania numerycznego w środowisku oprogramowania ANSYS trzech zadań wyznaczenia deformacji i stateczności zamkniętych małowyniosłych powłok stożkowych, poddanych działaniu ciśnienia zewnętrznego: 1) zadania liniowego (bifurkacyjnego) określenia wartości krytycznej ciśnienia; 2) geometrycznie nieliniowego zadania deformacji i wybożenia powłoki oraz wyznaczenia ciśnienia granicznego przy wykorzystaniu osiowo-symetrycznych elementów skończonych (ES); 3) rozwiązania zadania 2, lecz przy wykorzystaniu czterowzłowych elementów powłokowych. Przedstawiono rozwiązania stanu stacjonarnego powłoki swobodnie podpartej i utwierdzonej. Małowyniosłe powłoki stożkowe wykorzystywane są jako elementy nośne i ochronne konstrukcji mostowych.

SŁOWA KLUCZOWE: ciśnienie zewnętrzne, deformacje, pakiet oprogramowania, rozwiązanie numeryczne, stateczność, stożkowa powłoka małowyniosła.

ABSTRACT. This paper presents an analysis of a numerical solution in the ANSYS software to three problems related to determination of deformations and stability of closed shallow conical shells under external pressure: 1) linear (bifurcation) problem of determining the critical pressure; 2) geometrically non-linear problem of shell deformation and buckling to determine the limit pressure using axisymmetric finite elements (FE); 3) solution to the same problem as set out in 2, yet using 4-node shell elements. The solutions presented in the paper concern the stationary state of a simply supported and fixed shell. Shallow conical shells are applied as load bearing and protective elements of bridge structures.

KEYWORDS: external pressure, deformations, numerical solution, shallow conical shell, software package, stability.

DOI: 10.7409/rabd.016.008

¹⁾ Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture; Czerniszevskovo 24a blvd, 49600 Dnipropetrovsk, Ukraine; stneh@inbox.ru

²⁾ Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture; Czerniszevskovo 24a blvd, 49600 Dnipropetrovsk, Ukraine; karasev.alexey@mail.ru (✉)

1. WSTĘP

Problem stateczności zamkniętych małowyniosłych sprężystych cienkościennych powłok stożkowych poddanych działaniu ciśnienia zewnętrznego należy do klasycznych problemów teorii powłok. W szczególności typowe rozwiązania dotyczą analizy w zakresie liniowym, jak również badań eksperymentalnych: Alumiaie [1], Bajlaard [2], Weingarten [3], Grigoliuk [4], Dubois [5], Singer [6, 7], Mihasiev i Tovstik [8], Mushtari [9], Miursiepp [10], Preobrazenskij [11], Roditelev [12], Sachenkov [13], Seide [3, 14], Schiffner [15]. Duży wkład w rozwój teorii geometrycznie nieliniowej analizy deformacji i stateczności liniowosprężystych powłok stożkowych wnieśli Alumiaie [1], Valishvili [16], Volmir [17, 18], Galimov [9, 19], Grigoliuk i Kabanov [4], Kornishin [20], Mushtari [9], Novozhilov [21], Shkutin [22-24] oraz Shubin [24]. W wymienionych pracach sformułowano zadania, przedstawiono metody rozwiązania i wyniki, jak również opinie pozwalające ocenić etapy rozwoju badań w dziedzinie nieliniowej mechaniki powłok stożkowych. Zagadnieniami pokrewnymi w stosunku do tematu rozważanego w niniejszym opracowaniu są prace Valishvilia [16], Shkutina [22-24] oraz Shubina [24], w których wykorzystywano nieliniowe równania teorii powłok małowyniosłych.

W ostatnim dziesięcioleciu przeprowadzono na Ukrainie wiele badań laboratoryjnych (ponad 100 próbek) dotyczących stateczności małowyniosłych zamkniętych powłok stożkowych obciążonych ciśnieniem zewnętrznym, w szerokim zakresie zmian ich geometrii [25, 26]. Porównano wyniki doświadczenia z rezultatami obliczeń wykonanych na podstawie wielu znanych teorii i modeli obliczeniowych zbudowanych dla powłok idealnych oraz powłok z początkowymi defektami. Uwzględniono obliczenia z wykorzystaniem pakietów oprogramowania (PO) [25-27], bazujących na metodzie elementów skończonych (MES). Badania te wykazały, że pozostaje szereg nie do końca rozwiązanych zagadnień omawianego problemu o znaczeniu teoretycznym i praktycznym. W szczególności brak jest analizy porównawczej rozwiązań liniowych i nieliniowych zadań stateczności, zmierzającej do identyfikacji modelu niebezpiecznego, przy uwzględnieniu kryterium wyboczenia powłoki. Najskuteczniejszym narzędziem realizacji wymienionych badań i wykonania prawidłowych obliczeń powłok są współczesne pakiety oprogramowania, a w szczególności PO ANSYS. Biorąc pod uwagę fakt, że małowyniosłe powłoki stożkowe są stosowane jako elementy nośne i ochronne konstrukcji, w tym takich o szczególnej odpowiedzialności wykorzystywanych w technice

1. INTRODUCTION

The problem of stability of closed, shallow thin-wall conical shells under external pressure belongs to the group of classical shell-theory problems. In particular, typical solutions concern analyses in the linear range and experimental studies: Alumiaie [1], Bajlaard [2], Weingarten [3], Grigoliuk [4], Dubois [5], Singer [6, 7], Mihasiev and Tovstik [8], Mushtari [9], Miursiepp [10], Preobrazenskij [11], Roditelev [12], Sachenkov [13], Seide [3, 14], Schiffner [15]. The main contributors to the theory of geometrically non-linear analyses of deformation and stability of linear elastic conical shells include Alumiaie [1], Valishvili [16], Volmir [17, 18], Galimov [9, 19], Grigoliuk and Kabanov [4], Kornishin [20], Mushtari [9], Novozhilov [21], Shkutin [22-24] and Shubin [24]. Their studies included problem formulation, presentation of the solution method and of the obtained results, as well as the authors' opinions enabling an investigation of the research progress on the non-linear mechanics of conical shells. Non-linear equations of the shallow shell theory were also used in the works of Valishvili [16], Shkutin [22-24] and Shubin [24], in which the non-linear equations of the shallow conical shell theory were applied.

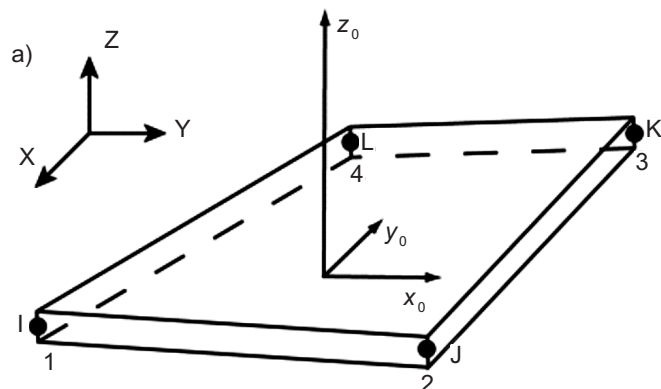
In the last ten years many laboratory research projects were carried out in Ukraine (using over 100 samples), concerning the stability of closed shallow conical shells under external pressure in a large range of geometrical changes [25, 26]. The research included comparing the experimental results with the outcomes of calculations based on a number of accepted theories and computational models built for ideal shells and shells with initial defects. The calculations were carried out with software packages [25-27], based on the finite element method (FEM). The outcome of these research projects shows that there are still many outstanding issues of theoretical and practical significance, which are worth exploring. They include in particular a comparative analysis of linear and non-linear solutions of stability problems with the identification of the unstable model of a shell when applying the buckling criterion. The most effective tool for carrying out such research with correct computations of the analysed shells are the currently available software packages, especially ANSYS. Taking into account the application of shallow conical shells as load bearing and protective elements of structures, used also in applications requiring exceptional reliability such as aircraft and rocket building, chemical and petrochemical industries as well as bridge engineering, development of calculation

samolotowej i raketowej, w przemyśle chemicznym, petrochemicznym oraz konstrukcjach mostowych. W związku z tym opracowanie metod obliczeniowych takich powłok pozostaje ważnym i wciąż aktualnym zadaniem.

Celem niniejszej pracy jest analiza porównawcza wyników rozwiązań numerycznych w środowisku ANSYS (ANSYS Inc. Academic Research, Mechanical Analysis, Release 13.0 customer 298728) trzech zadań wyznaczenia deformacji i wybożenia zamkniętych małowyniosłych powłok stożkowych poddanych działaniu ciśnienia zewnętrznego: 1) zadania liniowego (bifurkacyjnego) w celu określenia ciśnienia krytycznego q^{cr} (zadanie 1); 2) zadania geometrycznie nieliniowego wyznaczenia deformacji i wybożenia powłok w celu określenia ciśnienia granicznego q^{lim} z wykorzystaniem osiowosymetrycznych powłokowych elementów skończonych (ES) (zadanie 2); 3) rozwiązanie zadania 2 z uwzględnieniem czterowęzłowych powłokowych ES (zadanie 3). Rozważane są dwa przypadki podparcia powłoki: przegubowe nieprzesuwne i sztywne zamocowanie.

2. METODYKA ANALIZY NUMERYCZNEJ

Model geometryczny idealnej zamkniętej powłoki stożkowej powstał poprzez obrót tworzącej wokół osi powłoki. Trójwymiarowy model obliczeniowy powłoki stożkowej, wykorzystany do rozwiązania zadań 1 i 3, utworzono z wykorzystaniem elementu czterowęzłowego ANSYS FE SHELL 181, z biblioteki oprogramowania ANSYS. Jest to model z czterema punktami węzłowymi znajdującymi się na powierzchni środkowej, z których każdy ma sześć stopni swobody: przesunięcia w kierunku odpowiednich osi lokalnego układu współrzędnych X, Y, Z oraz obrotów wokół tych osi (Rys. 1a [28]).



methods for such shells remains a major contemporary issue.

The subject of this research is a comparative analysis of the outputs of numerical solutions obtained with the ANSYS software package (ANSYS Inc. Academic Research, Mechanical Analysis, Release 13.0 customer 298728) of three problems with determining the deformations and buckling of closed shallow conical shells under external pressure: 1) linear (bifurcation) problem of critical pressure determination q^{cr} (problem no. 1); 2) geometrically non-linear problem of shell deformation and buckling in order to determine the critical pressure q^{lim} using axisymmetric finite elements (FE) (problem no. 2); 3) solution of problem no. 2, yet using 4-node shell finite elements (problem no. 3). Two supporting conditions are considered for the analysed shell: pinned and fixed.

2. METHODOLOGY OF NUMERICAL ANALYSIS

The geometric model of the ideal closed conical shell was obtained by rotating the generating line around the shell axis. The three-dimensional computational model of the conical shell used to solve problems no. 1 and no. 3 was created with ANSYS FE SHELL 181 4-node element from the ANSYS library. It is a model defined by four nodal points located on the shell middle surface, each having six degrees of freedom: translational along the respective axes X, Y, Z of the local system of coordinates and rotational about these axes (Fig. 1a [28]).

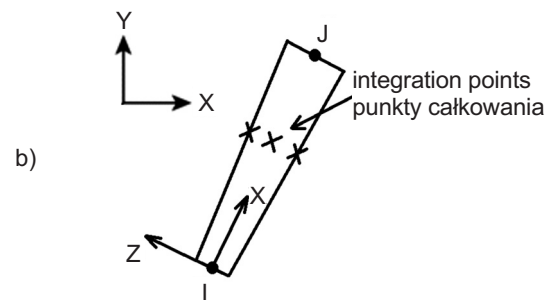


Fig. 1. Geometry of shell elements SHELL 181 (a) and SHELL 208 (b) [28]

Rys. 1. Geometria elementów powłokowych SHELL 181 (a) i SHELL 208 (b) [28]

Element ten, odpowiedni do obliczeń powłok cienkościennych, jest wykorzystywany do rozwiązywania liniowych i nieliniowych zadań z dużymi deformacjami i kątami obrotów. Ma on cechy liniowej sprężystości. Do analizy wykorzystano materiały sprężyste izotropowe, ortotropowe i anizotropowe. Do rozwiązania zadania 2 użyto dwuwęzłowego elementu osiowosymetrycznego SHELL 208 (Rys. 1b [28]). Modele obliczeniowe zostały zbudowane przy użyciu generatora siatek PO. Daną wejściową była długość ES w kierunku promieniowym. Liczba elementów skończonych N została wybrana w procesie zagęszczania siatki aż do uzyskania rozwiązania stabilnego, zarówno w zakresie równowagi statycznej, jak również w przypadku obciążeń krytycznych (Rys. 2).

This element, appropriate for thin shell computations, is used for solving linear and non-linear problems involving big deformations and large angles of rotation. Moreover, it represents linear elastic behaviour. The analysed materials are elastic isotropic, orthotropic or anisotropic. The element used for solving problem no. 2 was axisymmetric 2-node element SHELL 208 (Fig. 1b [28]). The computational models were built with the automatic default grid generator. The input parameter was the radial length of finite element. The number of finite elements N was determined in the process of grid refinement until obtaining a stable solution, both for static and critical loading conditions (Fig. 2).



Fig. 2. Finite element model of conical shell built of $N = 768$ (a) and $N = 3888$ (b) elements
Rys. 2. Model MES powłoki stożkowej złożony z $N = 768$ (a) i $N = 3888$ (b) elementów

Analizę numeryczną przeprowadzono dla zadanej geometrii powłok w szerokim zakresie zmienności współczynnika określającego względną grubość ścianki ($R/h = 100 \div 2000$, gdzie R – promień podstawy stożka, h – grubość powłoki) i kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy ($\alpha = 0,5^\circ \div 20^\circ$). Grubość powłoki wyniosła $h = 0,4 \div 16$ mm (badano głównie powłoki o grubości $h = 4$ mm). Materiał powłoki stanowiła stal 30HGSA (moduł Younga $E = 200$ GPa, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$; granica plastyczności $R_e = 1000$ MPa). Realizowano obciążenie w postaci równomiernie rozłożonego zewnętrznego ciśnienia poprzecznego q . Warunki podparcia podstawy stożka odpowiadały nieprzesuwnemu podparciu przegubowemu i utwierdzeniu. Schemat obliczeniowy powłoki dla przypadku podparcia przegubowego przedstawiono na Rys. 3a. Natomiast ciężar własny powłoki pominięto.

The numerical analysis was carried out for the user-defined shell geometry featuring a wide range of variation of the relative wall thickness index ($R/h = 100 \div 2000$, R – cone radius, h – shell thickness) and the base angle ($\alpha = 0.5^\circ \div 20^\circ$). The shell thickness was in the range of $h = 0.4 \div 16$ mm ($h = 4$ mm was the most common shell thickness in this research). The shell material was 30HGSA steel (Young modulus of $E = 200$ GPa, Poisson ratio of $\nu = 0.3$ and yield strength of $R_e = 1000$ MPa). The load was applied as a uniformly distributed external pressure in the lateral direction q . Both pinned and fixed base supporting conditions of a shell were represented. The loading diagram of a shell with pinned ends is presented in Fig. 3a. The self-weight of the shell was not taken into account.

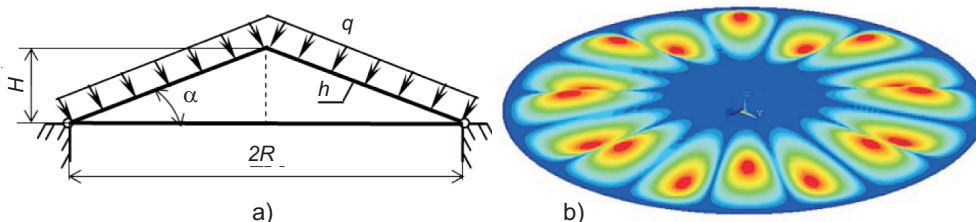


Fig. 3. Loading diagram of the shell with pinned ends (a) and a mode of stability loss in problem no. 1 (b)
Rys. 3. Schemat obliczeniowy powłoki przegubowo-podpartej (a) i postać utraty stateczności w zadaniu 1 (b)

3. WYNIKI ANALIZY NUMERYCZNEJ

3.1. ZADANIE 1

W wyniku rozwiązania problemu liniowego można określić ciśnienie krytyczne q_{cr} jako wartość ciśnienia odpowiadającą najmniejszej wartości własnej zadania stateczności oraz odpowiadającą jej postaci wybożenia w postaci regularnych wgłębień i wybrzuszeń przebiegających wzdłuż tworzącej (Rys. 3b). Przy rozwiązywaniu liniowego zadania wartości własnych uwzględniono deformacje powłoki w zakresie dokrytycznym.

Wiadomo, że wartość w klasie rozważanych powłok q_{cr} zależy od dwóch bezwymiarowych parametrów geometrycznych (R/h i kąta α) oraz od wskaźników sprężystości materiału. Nie zależy natomiast od skali (wymiarów bezwzględnych). Na tej podstawie możliwa jest ocena dokładności otrzymanych rozwiązań liniowych. W Tabl. 1 przedstawiono, w szerokim zakresie grubości powłoki oraz dla różnej liczby elementów N , wartości krytyczne ciśnienia q_{cr} dla dwóch przypadków podparcia krawędzi powłoki: utwierdzenia (*utw*) i podparcia przegubowego (*prz*). Zapisano również liczbę fal wybożenia w kierunku obwodowym n .

Table 1. Values of q_{cr} and n for shells with different outside dimensions of $R/h = 500$; $\alpha = 10^\circ$ and different N
 Tablica 1. Wartości q_{cr} i n powłok o różnych wymiarach zewnętrznych o $R/h = 500$; $\alpha = 10^\circ$ i różnym N

h [m]	0.001 ÷ 0.010	0.011	0.012	0.013	0.014	0.015	0.016
R [m]	0.5 ÷ 5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
N (FE numer / Liczba ES)	4800	5292	5808	6342	6342	6912	7500
q_{cr} (<i>utw</i>) [Pa]	9677	9664	9653	9644	9644	9635	9628
q_{cr} (<i>prz</i>) [Pa]	8675	8663	8652	8643	8643	8635	8628
n	8/8	8/8	8/8	8/8	8/8	8/8	8/8

Wszystkie powłoki miały takie same parametry geometryczne $R/h = 500$ i $\alpha = 10^\circ$ dla różnych grubości zmieniających się od 1 mm do 16 mm (z krokiem do 1 mm). Odpowiednio zmieniane były wartości promienia podstawy R . Liczba *ES* dla powłok o grubości $h = 1 \div 10$ mm była taka sama i wynosiła $N = 4800$. Otrzymane wartości ciśnienia krytycznego w wymienionym powyżej zakresie h , wyznaczone z dokładnością do 4 cyfr znaczących, były identyczne. Dla $h = 10 \div 16$ mm, liczba N wzrosła od 4800 do 7500. Okazało się, że tak istotnie zwiększenie N (aż do 56,25%) spowodowało nieznaczne obniżenie wartości ciśnienia krytycznego q_{cr} , którego maksymalna wartość (dla $N = 7500$) wyniosła tylko 0,51%.

3. NUMERICAL ANALYSIS RESULTS

3.1. PROBLEM NO. 1

The solution of the linear problem enables determining the critical pressure q_{cr} as a value corresponding to the lowest eigenvalue of the stability problem and the corresponding buckling mode, including regular inward and outward dimples along the generating line (Fig. 3b). The linear eigenvalue problem was solved taking into account pre-critical shell deformations.

It is known that in the considered class of shells the value of q_{cr} depends on two dimensionless geometric parameters (R/h and angle α), and on the elastic modulus of the material. On the other hand it does not depend on the scale (the absolute dimensions). On this basis it is possible to assess the accuracy of the obtained linear solutions. Table 1 presents the critical pressure values q_{cr} for a wide range of shell thickness and different numbers of finite elements N for fixed (*utw*) and pinned (*prz*) supporting conditions. It gives also the number of circumferential waves in n buckling.

All the shells had the same values of $R/h = 500$ and $\alpha = 10^\circ$ with wall thickness in the range of 1-16 mm (at max. 1 mm increments). The R radius values were changed as required. For all the shells in the thickness range of $h = 1 \div 10$ mm the number of finite elements was $N = 4800$. The critical pressure values obtained in the above-mentioned range of h were the same (to four significant figures). For $h = 10 \div 16$ mm, the value of N increased from 4800 to 7500. With such a significant increase in the value of N (up to 56.25%) the value of critical pressure q_{cr} decreased only slightly, by a maximum of 0.51% for $N = 7500$.

Na Rys. 4 przedstawiono zależności ciśnienia krytycznego od kąta α , $q_{cr} = q_{cr}(\alpha)$, powłok o $R/h = 500$ w całym badanym zakresie zmian kąta α (Rys. 4a) oraz w obszarze małych kątów α (Rys. 4b). Uwzględniono warunki sztywnego podparcia (krzywa 1) i podparcia przegubowego (krzywa 2) krawędzi powłoki. Należy zauważyć, że w zakresie zmian kąta $\alpha = 0^\circ - 10^\circ$, q_{cr} wzrasta z niewielką nieliniowością wywołującą usztywnienie konstrukcji, natomiast w obszarze $\alpha = 10^\circ - 20^\circ$ wzrost q_{cr} jest bliski zależności liniowej.

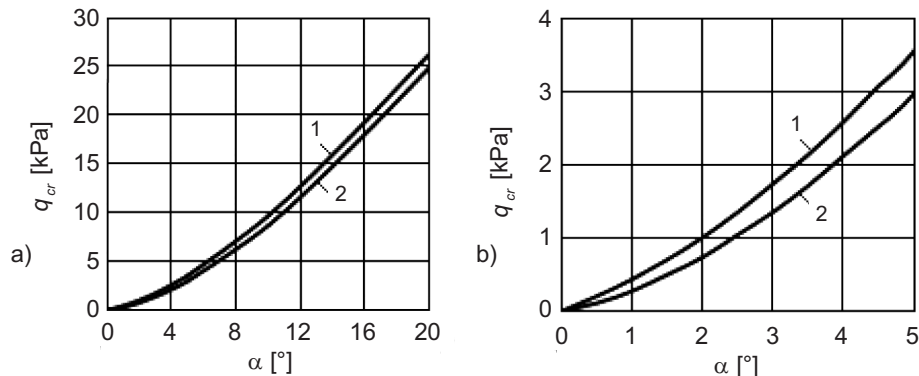


Fig. 4. $q_{cr} = q_{cr}(\alpha)$ relationship for shells of $R/h = 500$ in the whole range of α (a) and in the small α angle region (b)
Rys. 4. Zależność $q_{cr} = q_{cr}(\alpha)$ dla powłok o $R/h = 500$ w całym analizowanym zakresie zmian kąta α (a) oraz w zakresie małych kątów α (b)

3.2. ZADANIE 2

Celem rozwiązania zadania geometrycznie nieliniowego jest określenie zależności przemieszczeń (ugięć) powłoki, głównie jej wierzchołka, a także poszczególnych punktów na powierzchni, od ciśnienia q . W tym przypadku badano deformacje i wyboczenie powłoki oraz określono graniczną wartość ciśnienia q_{lim} . Na Rys. 5 przedstawiono zależności $q = q(u_z)$, przemieszczenia u_z wierzchołka stożka cienkościennego od wartości ciśnienia q , dla powłoki o $R/h = 500$ (tu i we wszystkich dalszych zadaniach grubość powłoki $h = 4$ mm). Uwzględniono trzy różne kąty nachylenia tworzącej do podstawy stożka. W obliczeniach wykorzystano osiowosymetryczne elementy powłokowe SHELL 208. Należy zauważyć, że w pracy uwzględniono obciążone sterowanie przemieszczeniem wierzchołka stożka, realizowane w badaniach eksperymentalnych [24-26], jak i w praktyce inżynierskiej.

Na rysunkach w sposób graficzny przedstawiono proces utraty stateczności w postaci osiowo-symetrycznego „przewijania płaszcza powłoki”. Przy stałym ciśnieniu równym jego wartości granicznej $q = q_{lim}$ następuje skokowy wzrost przemieszczenia, bezpośrednio, w przybliżeniu do wartości podwójonej wysokości stożka (deformacje powłoki pokazano na Rys. 5a, górna część stożka jako element sztywny nie ulega „przewinięciu”). Na wykresach „przeskoki” zaznaczono jako strzałki poprowadzone od pierwszego maksimum do statecznie rosnącej części wykresu.

Fig. 4 presents the relationship between the critical pressure and α angle, $q_{cr} = q_{cr}(\alpha)$ for shells of $R/h = 500$ in the whole range of variation of α (Fig. 4a), and in the small angle region (Fig. 4b). Two edge supporting conditions are considered: fixed (curve 1) and pinned (curve 2). Note that in the angle variation region of $\alpha = 0^\circ - 10^\circ$ the increase of q_{cr} is slightly non-linear, resulting in stiffening of the structure, becoming almost linear in the region of $\alpha = 10^\circ - 20^\circ$.

3.2. PROBLEM NO. 2

The purpose of solving a geometrically non-linear problem consists in determining the relationships between pressure q and displacements (deflections) of the shell, mainly the apex, but also different points on its surface. The deformations and buckling of the analysed shell were examined in this case in order to determine the limit pressure value q_{lim} . The graph in Fig. 5 represents the relationship $q = q(u_z)$ between the displacement of the apex of thin conical shell u_z and the value of pressure q for a shell of $R/h = 500$ (the wall thickness from this point on is $h = 4$ mm). Three different base angles are considered. The calculations are based on a model built of axisymmetric elements SHELL 208. It is worth considering that the load application control of the apex displacements, applied both in the experimental research projects [24-26] and engineering practice, has been taken into consideration in the study.

The figures illustrate the loss of stability as axisymmetric snapping through of the shell skin. At a constant pressure equalling the limit value of $q = q_{lim}$ the displacement values soar up to about twice the cone height (the shell deformations are shown in Fig. 5a and as it can be seen in the graph the top part of the cone, being a stiff element, does not snap through). The “jumps” are marked with arrows drawn from the first maximum to the region of steadily growing part of the curve.

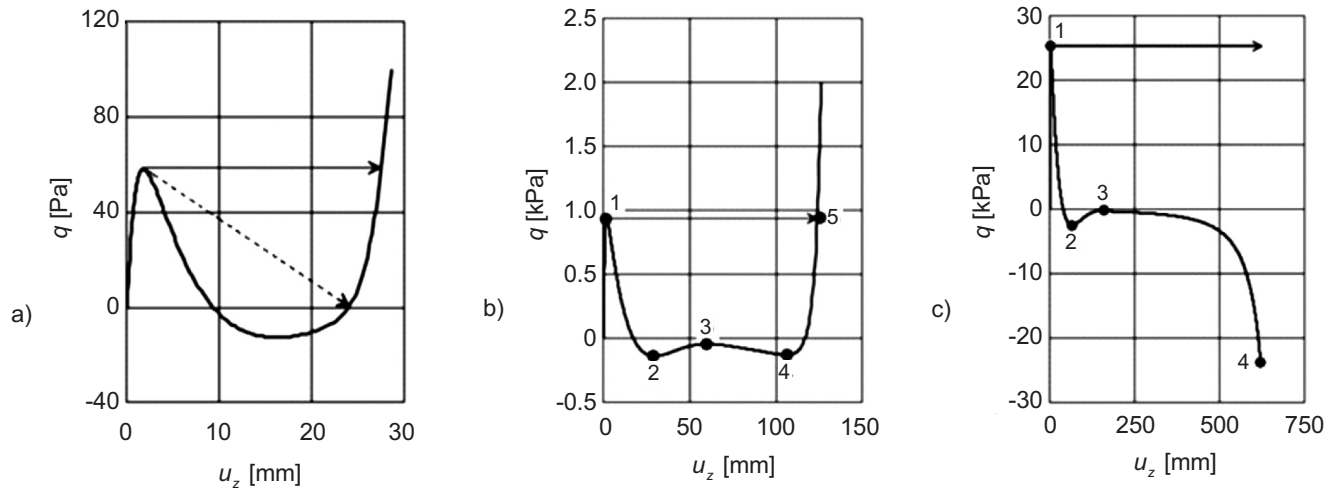


Fig. 5. Graph of $q = q(u_z)$ relationship for an apex of conical shell of $R/h = 500$: a) $\alpha = 0.5^\circ$, b) $\alpha = 2^\circ$, c) $\alpha = 10^\circ$
 Rys. 5. Wykres zależności $q = q(u_z)$ wierzchołka powłoki stożkowej o $R/h = 500$: a) $\alpha = 0,5^\circ$, b) $\alpha = 2^\circ$, c) $\alpha = 10^\circ$

Należy wziąć po uwagę, że w pracy rozwiązano zadanie statyki i celem było określenie kolejnych stanów równowagi powłoki. Ponadto efekty dynamiczne nie są uwzględnione. W rzeczywistej sytuacji, gdy w zakresie pokrytycznym ciśnienie nie zmienia się, „przeskok” do statecznego położenia równowagi na kolejnej gałęzi ścieżki obciążenia (zapisanej funkcją rosnącą) zachodzi tak, jak zaznaczono strzałką (linia ciągła) na Rys. 5. Jeżeli poza punktem granicznym ciśnienie zewnętrzne maleje do zera, „przeskok” będzie przebiegał w kierunku określonym linią przerywaną (Rys. 5, $\alpha = 0,5^\circ$).

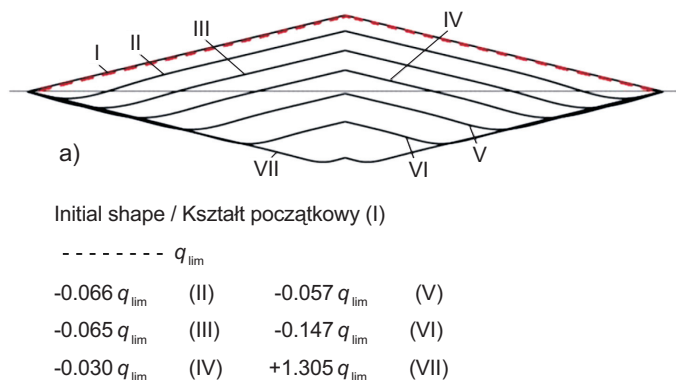
Należy zauważyć zmianę kształtu pokrytycznej ścieżki równowagi przy wzroście kąta α . Po przewinięciu stożka, z powodu pojawienia się ujemnych wartości ciśnienia q następuje jakościowa zmiana deformacji pokrytycznych. Ścieżka równowagi ma dwa lokalne minima (pkt 2 i 4, w wartościach bezwzględnych – maksima): pierwsze – dla małych przemieszczeń wierzchołka stożka, drugi (bardziej wyraźne) – w zakresie dużych przemieszczeń. Pomiędzy nimi podciśnienie osiąga prawie zero, tworząc w ten sposób lokalne maksimum (pkt 3, w wartościach bezwzględnych – minimum). Zwiększanie kąta α powoduje szybki wzrost drugiego lokalnego minimum. Ponadto dla $\alpha \geq (7^\circ-8^\circ)$ o ($R/H = 500$) nie zawsze występuje stabilizacja powłoki w zakresie pokrytycznym (obserwowana jako ścieżka równowagi w postaci funkcji rosnącej). Jest to związane z gwałtownym załamaniem przy przejściu ze ścieżki malejącej na rosnącą (w obszarze załamania obydwie części powłoki są praktycznie równoległe). Wybór parametrów obliczeniowych (4 wskaźniki), które mogą jednocześnie z powodzeniem zidentyfikować wartość granicznego ciśnienia q_{lim} ,

It should be taken into consideration that the problem of statics has been solved in the study in order to determine the subsequent shell equilibrium states. Moreover, the dynamic effects are not taken into account. In the experimental conditions, when the pressure does not change in the post-critical range, a “jump” to the stable equilibrium application on a subsequent branch of a loading path (marked as the rising function) proceeds the same as it has been marked by an arrow (a solid line) in Fig. 5. If the external pressure is reduced to zero beyond the limit point, the “jump” will proceed towards the direction marked by a dashed line (Fig. 5, $\alpha = 0.5^\circ$).

Note the change of shape of the post-critical equilibrium path with the increase of α angle. After snapping through, a qualitative change of post-critical deformations can be noted. The equilibrium path has two local minima (points 2 and 4 – becoming maximums when absolute values are taken): the first one – for small displacements of the cone apex, the second one (more prominent) – in the larger displacements region. Between these two minima the negative pressure reaches almost zero, creating in this way a local maximum (point 3 – becoming a minimum when absolute values are taken). With an increase of α the second local minimum starts to grow rapidly. Moreover, for $\alpha \geq (7^\circ-8^\circ)$ ($R/H=500$) the shell does not always stabilise in the post-critical region (the equilibrium path is represented by an increasing curve). This is related to a sudden change of direction at the transition from the decreasing to the increasing path (at the turning point region both parts of the shell are virtually parallel). The choice of computational parameters (four indexes), which can also

jak również najmniejszej wartości obciążenia krytycznego, jest niezwykle czasochłonny przy zastosowaniu metody optymalnej długości łuku. Z drugiej strony, jako że w zakresie nadkrytycznym gałąź rosnąca jest niemal pionowa, poprawność uzyskanego rozwiązania można oszacować na podstawie przemieszczeń odpowiadających gałęzi malejącej. Te przemieszczenia powinny być bliskie (z niedomiarem) dwukrotnej wysokości powłoki. Jednocześnie zadanie określania ciśnienia granicznego q_{lim} przy pomocy osiowosymetrycznego elementu SHELL 208 można rozwiązać z powodzeniem w całym badanym zakresie parametrów geometrii powłoki.

Na Rys. 6 dla powłoki przegubowo podpartej o $R/h = 500$ i $\alpha = 4^\circ$ przedstawiono przekrój pionowy odkształconej powłoki odpowiadający kolejnym etapom obciążenia (Rys. 6a), a także zależność przemieszczeń wierzchołka stożka ciśnienia (Rys. 6b). W zakresie dokrytycznym w powłoce powstają obwodowe i promieniowe naprężenia stanu membranowego. Po osiągnięciu punktu granicznego na krawędzi powłoki powstaje obrotowo symetryczne zagięcie w kierunku promieniowym, które w zakresie pokrytycznym przemieszcza się od krawędzi do środka powłoki. Równocześnie, w zależności od występującego kształtu osiowosymetrycznej formy własnej, wraz z membranowymi naprężeniami ściskającymi (obszar w pobliżu wierzchołka stożka) pojawiają się naprężenia promieniowe od zginania, oraz promieniowe naprężenia rozciągające, które powstają na krawędzi powłoki. W zakresie podkrytycznym spectrum naprężeń promieniowych ściskających zmniejsza się, przesuując się w kierunku górnej części stożka.



be used effectively to identify the limit pressure value q_{lim} and the smallest critical load value with the arch-length method, is a very time-consuming process. On the other hand, with almost vertically rising curve in the post-critical region, the obtained solution can be verified on the basis of displacements corresponding to the decreasing part of the curve. The displacement values should be close to but less than twice the shell height. At the same time, with the axisymmetric finite element SHELL 208 the problem of determining the limit pressure q_{lim} can be effectively solved in the whole range of geometrical parameters of the shell.

Fig. 6 presents the deformation progress in a vertical cross-section of a shell with pinned ends of $R/h = 500$ and $\alpha = 4^\circ$ with in the subsequent load application stages (Fig. 6a), and the apex displacements vs. pressure curve (Fig. 6b). The circumferential and radial stresses of the membrane state appear in the shell pre-critical range. After reaching the limit point a rotational-symmetric fold in the radial direction shows up on the shell edge. It travels in the post-critical range from the edge to the centre of the shell. At the same time, depending on a shape of an axisymmetric eigenmode, the radial stresses from bending and the radial tensile stresses, which appear on the shell edge, show up with the membrane compressive stresses (the area near the cone apex). In the post-critical range the spectrum of radial compressive stresses decreases, moving towards the upper part of the cone.

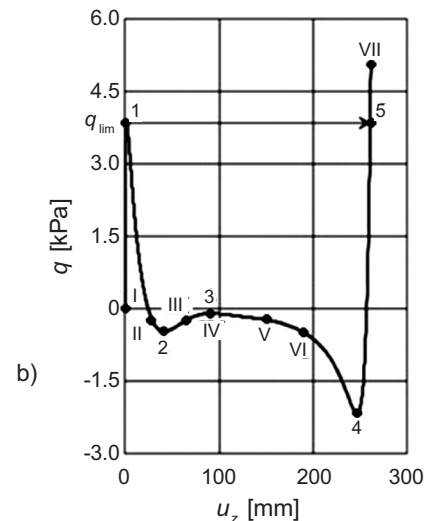


Fig. 6. Vertical cross-section of the shell with $\alpha = 4^\circ$ in the process of deformation (a) and apex displacement vs. pressure relationship (b)
Rys. 6. Kształt przekroju pionowego powłoki o $\alpha = 4^\circ$ w procesie odkształcenia (a) oraz zależność przemieszczenia wierzchołka stożka od ciśnienia (b)

Na Rys. 6a zaznaczono względne wartości ciśnienia, odpowiadające kolejnym postaciom wyoboczenia (oznaczone

The relative pressure values, corresponding to the subsequent forms of buckling (marked with Roman numerals),

cyframi rzymskimi). Należy zauważyć, że kształt odpowiadający ciśnieniu granicznemu (oznaczony linią przerywaną) różni się nieznacznie od pierwotnego (wartości przemieszczeń są mniejsze od grubość powłoki $h = 4$ mm). Strefa największego ugięcia, która jest jednocześnie strefą największych skróceń i krzywizny powłoki, jak wspomniano powyżej, przemieszcza się w procesie odkształceń od krawędzi powłoki do jej środka. Ponadto nie osiągnięto rezultatu całkowitego „odwrócenia” powłoki, nie uzyskano także kształtu symetrycznego względem osi poziomej. Jest to spowodowane, jak wspomniano powyżej, dużą sztywnością wierzchołka stożka, a także warunkami podparcia krawędzi powłoki (np. w utwierdzeniu).

Należy również zauważyć gwałtowny wzrost wartości ciśnienia granicznego q_{lim} jako funkcji kąta α . Jest to związane ze znacznym wzrostem zarówno naprężeń membranowych, jak i zginających w powłoce. W związku z tym, w Tabl. 2 w punktach ekstremalnych wartości $q = q(u_z)$ rozpatrywanych powłok podano maksymalne wartości naprężeń zredukowanych według Misesa σ_{Mis} .

Table 2. Maximum von Mises stress σ_{Mis} [MPa] for shells with pinned ends of $R/h = 500$ in different states of equilibrium

Tablica 2. Maksymalne naprężenie zredukowane wg Misesa σ_{Mis} [MPa] dla powłok podpartych przegubowo o $R/h = 500$ dla różnych stanów równowagi

Angle / Kąt	Maximum von Mises stress / Maksymalne naprężenie zredukowane według Misesa σ_{Mis} [MPa]				
	Point No. / Nr punktu				
	1	2	3	4	5
$\alpha = 2^\circ$	24.2	62.9	59.8	56.5	117
$\alpha = 4^\circ$	63.2	176	160	352	434
$\alpha = 10^\circ$	222	690	600	1480	–

W Tabl. 2 punktami 1-5 oznaczono: 1 – punkt graniczny; 2 – pierwsze lokalne minimum; 3 – lokalne maksimum; 4 – drugie lokalne minimum; 5 – punkt na statecznej ścieżce pokrywającej (funkcja rosnąca), odpowiadający granicznej wartości ciśnienia q_{lim} . Na Rys. 5 punkty naniesiono na krzywych odpowiednich zależności $q = q(u_z)$. Powyższa tablica pokazuje, że wzrost kąta α , tak jak w przypadku ciśnienia granicznego, prowadzi do gwałtownego wzrostu naprężeń w powłoce. Co więcej, wielkość maksymalnych naprężeń zredukowanych zależy nie tyle od wartości ciśnienia q , co od rodzaju deformacji sprężystych powłoki odpowiadających badanym stanom równowagi. Można również zaobserwować, że najmniejsze spośród maksymalnych wartości naprężeń zredukowanych okazują się być te, które powstają w powłoce po osiągnięciu punktu granicznego,

were shown on the Fig. 6a. Note that the shape corresponding to the limit pressure (marked with a dashed line) with displacements smaller than the shell thickness of $h = 4$ mm differs only slightly from the initial shape. The zone of the greatest deflection, being at the same time the zone of the greatest contractions and the smallest curvature radius, travels in the process of deformation from the edge to the centre of the shell. Moreover, neither complete inversion of the shell nor a shape symmetrical about the horizontal axis were obtained. This results from highly stiff apex and edge supporting conditions (for example fixed).

Note also a sudden increase in the value of limit pressure q_{lim} as a function of angle α . This is related to a significant increase of both membrane and bending stresses in the shell. As such, Table 2 gives the maximum values of von Mises stress σ_{Mis} for the points of extreme values $q = q(u_z)$ for the investigated shells.

The points designated 1-5 are: 1 – boundary point; 2 – the first local minimum; 3 – local maximum; 4 – the second local minimum; 5 – point on the stable post-critical path (rising function) corresponding to the limit pressure q_{lim} . These data are plotted in the appropriate curves of $q = q(u_z)$ relationship as presented in Fig. 5. According to the tabled data, the increase of α angle causes a rapid increase in the stresses generated in the shell, similar to the increase of the limit pressure. Moreover, the value of maximum von Mises stresses depends not as much on the value of pressure q as on the strain type, corresponding to the examined states of equilibrium. Note also that the smallest von Mises stress values are generated in the shell after reaching the limit point, i.e. equalling the limit pressure q_{lim} (point 1). These stresses occur at the shell

tn. naprężenia odpowiadające ciśnieniu granicznemu q_{lim} (pkt 1). Te naprężenia pojawiają się na krawędzi powłoki i we wszystkich powyższych przypadkach są one znacznie niższe od granicy plastyczności materiału. Największe naprężenia zredukowane powstają w powłoce w „przeskoku”, gdy ciśnienie osiągnie wartość graniczną $q = q_{lim}$. Naprężenia te są zlokalizowane w pobliżu wierzchołka powłoki, ich wartość przy dużych wartościach kąta α może być znacznie większa od wartości granicznej wszystkich charakterystyk wytrzymałościowych materiału.

Na wszystkich etapach obciążenia powłoki jej deformacje są osiowo symetryczne. Od relacji wartości maksymalnych naprężeń membranowych i zginających, jak również maksymalnych naprężeń normalnych promieniowych i obwodowych dla badanych 5 równoważnych stanów równowagi można oszacować wartości największych naprężeń dla powłoki o $R/h = 500$ i $\alpha = 4^\circ$, przedstawionych w Tabl. 3. Zaprezentowano tam maksymalne naprężenia: zredukowane (wg Misesa) σ_{Mis} , równoważne membranowe (wg Misesa) σ_{Mis}^m , membranowe promieniowe σ_r^m oraz membranowe obwodowe σ_c^m . Widać tam również, że do punktu granicznego w powłoce przeważają membranowe naprężenia zredukowane, których wartość odpowiada około 2/3 zsumowanych wszystkich naprężeń normalnych, z których w przybliżeniu 2/3 stanowią naprężenie obwodowe. W stanie pokrytycznym związek pomiędzy równoważnymi naprężeniami membranowymi i zginającymi zmienia się znacząco. Tutaj naprężenia zginające stanowią 2/3 zsumowanych naprężeń całkowitych, a membranowe naprężenia promieniowe stanowią w głównej części obszaru nadkrytycznego 1/5 obwodowych naprężeń membranowych i wraz z rozwojem odkształceń nadkrytycznych osiągają poziom 3/4.

Table 3. Maximum normal stresses for simply supported shell of $R/h = 500$ and $\alpha = 4^\circ$ in different states of equilibrium
Tablica 3. Maksymalne naprężenia normalne powłoki swobodnie podpartej o $R/h = 500$ i $\alpha = 4^\circ$ dla różnych stanów równowagi

Point No. / Nr punktu	Maximum normal stresses / Maksymalne naprężenia normalne			
	σ_{Mis} [MPa]	σ_{Mis}^m [MPa]	σ_r^m [MPa]	σ_c^m [MPa]
1	63.2	41.5	-16.9	-46.6
2	176	50.8	-10.6	-53.7
3	160	45.3	-11.4	-48.7
4	352	112	-70.9	-129
5	434	145	-123	-166

Tak więc w zakresie dokrytycznym rozpatrywanych powłok dominują odkształcenia ściskające i rozciągające, a w zakresie pokrytycznym – odkształcenia gięte. Jest to zgodne z intuicyjną interpretacją fizyczną zadania.

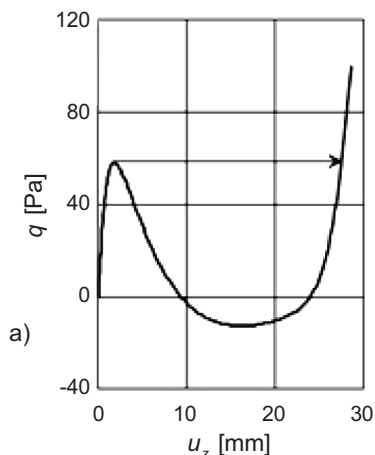
edge and are much lower than the yield point of the material for all the above-mentioned cases. The highest von-Mises stresses are generated in the shell within the “jump”, when the pressure reaches the limit value of $q = q_{lim}$. These stresses occur near the apex, and for larger values of base angle α can exceed the limit values of all the stress-strain properties of the material.

The deformations are axisymmetric at all loading phases of the shell. From the relationships of the values of maximum membrane and bending stresses, as well as the maximum normal radial and circumferential stresses for the five examined equivalent states of equilibrium, the greatest stress values for the shell of $R/h = 500$ and $\alpha = 4^\circ$ can be estimated, as presented in Table 3. It gives the maximum stresses: von Mises stresses σ_{Mis} , membrane stresses (computed as equivalent von Mises stresses σ_{Mis}^m), radial membrane stresses σ_r^m and circumferential membrane stresses σ_c^m . Note also that up to the limit point of the shell von Mises stresses prevail in the membrane equalling ca. 2/3 of the sum of all normal stresses, 2/3 of which are circumferential stresses. In the post-critical state the relationship between the membrane and bending stresses (computed as von Mises stresses) changes significantly. Now the bending stresses make up 2/3 of the sum of total stresses, and radial membrane stresses in the main part of the post-critical region make up 1/5 of the circumferential membrane stresses, increasing their share to 3/4 with the development of post-critical deformations.

Therefore, it turns out that for the investigated shells compressive and tensile deformations prevail in the pre-critical region and bending deformations prevail in the post-critical region. This is in line with the intuitive physical interpretation of the problem.

3.3. ZADANIE 3

Rozwiązanie zadania odkształceń geometrycznie nieliniowych i wyboczenia powłok otrzymane z wykorzystaniem czterowęzłowych elementów SHELL 181, w przeciwieństwie do poprzednio opisanych rozwiązań otrzymanych z wykorzystaniem osiowo symetrycznego SHELL 208, ma szereg ważnych własności. W przypadku małego kąta α , dla którego wartość ciśnienia krytycznego q_{cr} jest większa niż wartość graniczna q_{lim} , jak również przy wykorzystaniu osiowosymetrycznych SHELL 208, podczas zwiększania ciśnienia powstają osiowosymetryczne deformacje podkrytyczne, a następnie (po osiągnięciu ciśnienia granicznego) również odkształcenia nadkrytyczne. Przy tym wartości ciśnień granicznych (wartości górna i dolna) są zgodne z wynikami uzyskanymi przy użyciu osiowosymetrycznego elementu skończonego. Jako przykład na Rys. 7a przedstawiono zależność $q = q(u_z)$ wierzchołka powłoki swobodnie podpartej o $R/h = 500$ i $\alpha = 0,5^\circ$. Porównując ten związek z zależnością przedstawioną na Rys. 5, $\alpha = 0,5^\circ$ stwierdzono ich całkowitą identyczność. Na Rys. 7 zaprezentowano również formy deformacji powłoki obciążonej ciśnieniem $q = q_{lim}$ w chwili osiągnięcia punktu granicznego (pkt 1) w zakresie dokrytycznym (Rys. 7b), a także w zakresie statecznej ścieżki pokrytycznej (pkt 2) (Rys. 7c), które potwierdzają osiowosymetryczne do- i podkrytyczne zachowanie rozpatrywanego stożka cienkościennego.



3.3. PROBLEM NO. 3

The solution to the problem of geometrically non-linear deformations and buckling of shells obtained with the 4-node finite elements SHELL 181 has a number of important characteristics, other than the previously described solutions obtained with the use of axisymmetric finite element SHELL 208. In case of a small α angle, for which the value of critical pressure q_{cr} is greater than the limit value q_{lim} , and also in models built of axisymmetric finite elements SHELL 208, pre-critical axisymmetric deformations occur during increasing the pressure accompanied with post-critical deformations when the limit pressure is obtained. Note that the limit pressure values (upper and lower) are consistent with the results obtained with the axisymmetric finite element model. An example curve of $q = q(u_z)$ function for the apex of simply supported shell of $R/h = 500$ and $\alpha = 0.5^\circ$ is presented in Fig. 7a. Comparing the curves in Fig. 7a and in Fig. 5 for $\alpha = 0.5^\circ$ it can be seen that they are identical. Fig. 7 presents also the deformation modes of a shell exposed to the external pressure of $q = q_{lim}$ at the limit point (point 1) in the pre-critical region (Fig. 7b) and also in the region of stable post-critical path (point 2) (Fig. 7c). It confirms the axisymmetric behaviour of the analysed thin wall conical shell in bothal regions of the curves.

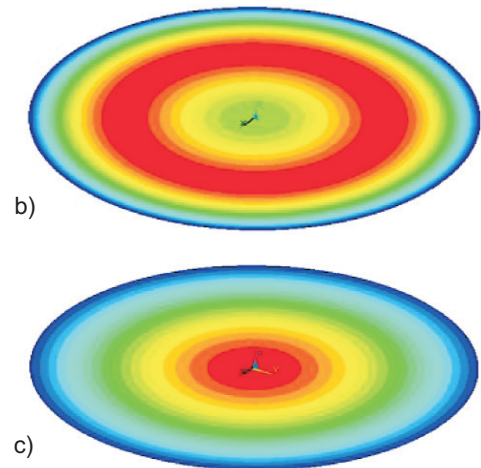


Fig. 7. Relationship $q = q(u_z)$ of a shell with pinned ends of $R/h = 500$ and $\alpha = 0.5$: a) eigenmodes for $q = q_{lim}$ in the pre-critical, b) post-critical, c) in the states of equilibrium

Rys. 7. Zależność $q = q(u_z)$ powłoki podpartej przegubowo o $R/h = 500$ i $\alpha = 0,5^\circ$: a) kształtu postaci form własnych dla $q = q_{lim}$ w zakresie dokrytycznych, b) w zakresie pokrytycznych, c) stanów równowagi

W przypadku zwiększania kąta α do wartości, przy której wartości ciśnienia granicznego q_{lim} okazują się bliskie (oszacowanie dolne), jak również większe od minimalnej wartości ciśnienia krytycznego q_{cr} (ze spektrum ciśnień

For the value of α angle at which the limit pressure q_{lim} approaches (lower-bound estimate) and also exceeds the minimum critical pressure value q_{cr} (from the critical pressures spectrum of linear stability problem), there are

krytycznych zadania liniowego stateczności), istnieją trzy możliwe wyniki rozwiązania zadania nieliniowego otrzymanego z wykorzystaniem czterowęzłowego elementu powłokowego SHELL 181. Pierwsze rozwiązanie ma miejsce, gdy jego parametry (wielkość obciążenia, krok iteracji, parametry metody optymalnej długości łuku) są dobrane w taki sposób, że przy obciążeniu w pobliżu punktu bifurkacji, w trakcie obliczeń związanych z poszukiwaniem stanu równowagi, pomimo obecności bliskich nieosiowosymetrycznych stanów równowagi, rozwiązaniem jest stan osiowosymetryczny.

Przykład rozwiązania zadania nieliniowego z wykorzystaniem elementu SHELL 181 przedstawiono na Rys. 8a, gdzie uwzględniono zależność $q = q(u_z)$ dla wierzchołka powłoki o $R/h = 500$ oraz $\alpha = 2^\circ$. Ta zależność jakościowo i ilościowo odpowiada ściśle w zależności pokazanej na Rys. 5 ($\alpha = 2^\circ$), otrzymanej przy wykorzystaniu elementu SHELL 208.

three possible solutions of non-linear problems obtained with 4-node finite element SHELL 181. The first solution is when the input parameters (load value, iteration step, parameters of the arc-length method) are such that with a load near the point of bifurcation in the process of computations to find the state of equilibrium the axisymmetric state is obtained, despite the nearby presence of non-axisymmetric states of equilibrium.

Fig. 8a presents an example solution of a non-linear problem using the finite element SHELL 181 taking into account the relationship $q = q(u_z)$ for displacement of apex of shell of $R/h = 500$ and $\alpha = 2^\circ$. This relationship precisely matches the relationship presented in Fig. 5 ($\alpha = 2^\circ$), obtained with finite element SHELL 208.

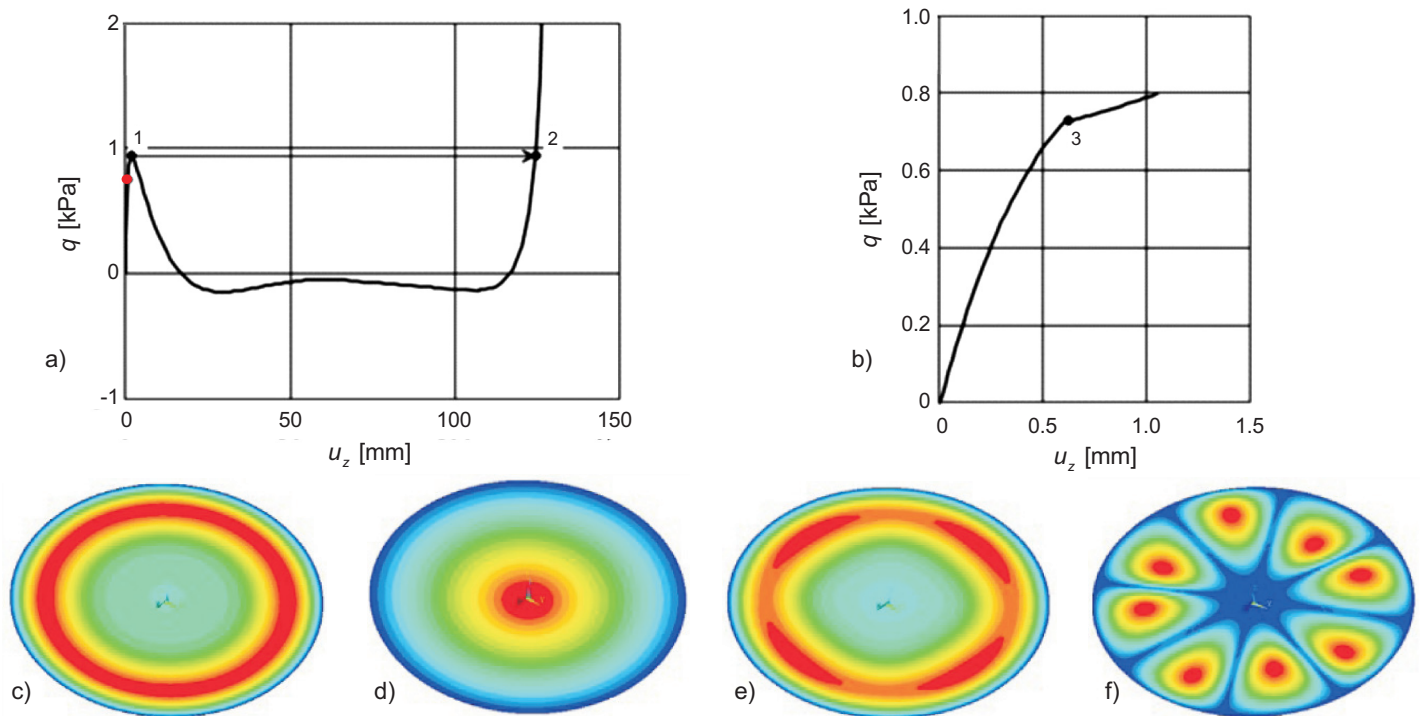


Fig. 8. Relationship $q = q(u_z)$ for shells of $R/h = 500$ and $\alpha = 2^\circ$ (a, b), and eigenmodes for $q = q_{lim}$ in the pre-critical (c), post-critical stable states of equilibrium (d, e), and for the buckling modes of bifurcation solution (f)

Rys. 8. Zależności $q = q(u_z)$ dla powłok o $R/h = 500$ i $\alpha = 2^\circ$ (a, b) i kształtu postaci form własnych dla $q = q_{lim}$, w zakresie dokrytycznych (c), statecznych pokrytycznych stanów równowagi (d, e) oraz postaci wyboczenia rozwiązania bifurkacyjnego (f)

Najmniejsza wartość ciśnienia krytycznego q_{cr} , uzyskana z rozwiązania liniowego zadania stateczności (zadanie 1) powłoki, okazała się nieco mniejsza od obciążenia granicznego q_{lim} . Na wykresie zależności $q = q(u_z)$ wartość q_{cr} zaznaczono kropką. W tym przypadku proces osiowosyme-

The smallest value of critical pressure q_{cr} , obtained from the solution to linear stability problem of the shell (problem no. 1), turned out to be slightly smaller than the limit pressure q_{lim} . In the curve of relationship $q = q(u_z)$ the value of q_{cr} is marked with a dot. In this case the process of

trycznej deformacji powłoki był kontynuowany aż do punktu granicznego (punkt 1) (kształt powłoki na Rys. 8c) i został zakończony (w przypadku stałej wartości ciśnienia q_{lim}) „przeskokiem” do zakresu nadkrytycznego. Przeskok spowodowany osiowosymetrycznym „przewinięciem” powłoki (punkt 2) (postać pokrytyczna odkształceń powłoki przedstawiono na Rys. 8d) nastąpił, gdy ciśnienie osiągnęło dokładnie wartość graniczną q_{lim} , otrzymaną przy wykorzystaniu osiowosymetrycznego elementu SHELL 208.

Drugie rozwiązanie zadania nieliniowego z wykorzystaniem elementu czterowęzłowego SHELL 181 otrzymano dla przypadku, gdy parametry rozwiązania reagują na obecność ścieżki nieosiowosymetrycznego stanu równowagi i przechodzą na nią. Jeśli jest to ścieżka stateczna (funkcja rosnąca) na wykresie $q = q(u_z)$, to przejście jest widoczne w postaci przeskoku lub załamania krzywej. Takie przekształcenie można nazwać lokalnym wyboczeniem (bifurkacją), a odpowiadającą wartość ciśnienia – lokalnym ciśnieniem granicznym q_{lim}^{loc} . Istotą lokalnego wyboczenia jest bifurkacja geometrycznie nieliniowego procesu deformacji w zakresie dokrytycznym. Proces obliczania z przyjętym krokiem początkowym w tym przypadku jest kontynuowany na statecznej ścieżce równowagi. Wizualizacją tego procesu jest postać okresowych fal wyboczenia w kierunku obwodowym, położonych w ściskanej części powłoki w pobliżu jej krawędzi. Przykładem takiego rozwiązania jest zależność $q = q(u_z)$ otrzymana dla wierzchołka powłoki, pokazana na Rys. 8b. Lokalnemu obciążeniu granicznemu o wartości $q_{lim}^{loc} = 0,715$ kPa odpowiada tutaj załamanie gładkiej krzywej. Należy zauważyć, że ciśnienie krytyczne dla tej powłoki wynosi $q_{cr} = 0,734$ kPa i jest nieco większe od wartości q_{lim}^{loc} . Na Rys. 8e przedstawiono postać wyboczenia powłoki (pkt 3), wykazującą cztery strefy fal wyboczenia okresowo rozmieszczone w kierunku obwodowym na krawędzi powłoki, a na Rys. 8f – postać wyboczenia powłoki otrzymaną z rozwiązania liniowego zadania 1. Istotnym wnioskiem tej części analizy jest fakt, że w rozwiązaniu liniowym liczba fal w kierunku obwodowym również jest równa cztery.

Należy wziąć pod uwagę zależność $q = q(u_z)$ przedstawioną na Rys. 8b i uzupełnić jego liniową dokrytyczną część ścieżki równowagi (prosta 1). Ścieżkę tę przedłużono uwzględniając nieliniowe osiowosymetryczne deformacje pokrytyczne (krzywa 2). Obydwie ścieżki równowagi oznaczono etykietami odpowiadającymi punktowi bifurkacji ($q_{cr} = 0,734$ kPa) i lokalnego ciśnienia granicznego ($q_{lim}^{loc} = 0,715$ kPa), a także naniesiono ścieżkę stanów równowagi powłoki z 4 zagęszczeniami (krzywa 3). Poprowadzono

axisymmetric deformation of the shell was continued up to the limit point (point 1) (shell shape presented in Fig. 8c), ending with a “jump” to the post-critical region (with a constant pressure value of q_{lim}). The jump, caused by axisymmetric snapping through of the shell (point 2) (the post-critical deformation mode is presented in Fig. 8d), occurred when the pressure reached exactly the limit value of q_{lim} obtained with axisymmetric finite element SHELL 208.

The second solution of the non-linear problem obtained with 4-node finite element SHELL 181 is obtained when the parameters react to the presence of non-axisymmetric equilibrium path, and divert to follow its shape. In the case of stable path (rising function) on the $q = q(u_z)$ graph such diversion is represented by a jump or turning point on the curve. This effect may be called local buckling (bifurcation), and the corresponding pressure can be called local limit pressure q_{lim}^{loc} . The essence of local buckling is bifurcation of the geometrically non-linear process of deformation in the pre-critical region of the curve. The computation process with a user-defined initial step is in this case continued on the stable equilibrium path. This process is displayed by periodic circumferential waves in buckling located in the compressed part of the shell near the edge. An example of such solution is the $q = q(u_z)$ relationship obtained for the shell apex (Fig. 8b). The local limit load of $q_{lim}^{loc} = 0.715$ kPa is located on the turning point of a smooth portion of the curve. Note that for this shell the critical pressure of $q_{cr} = 0.734$ kPa is slightly higher than q_{lim}^{loc} . Fig. 8 presents the shell buckling mode (point 3), exhibiting four zones of buckling waves distributed periodically in the circumferential direction on the shell edge. Fig. 8f shows the shell buckling mode obtained from the linear solution of problem no. 1. An important observation of this part of analysis is that in the linear solution there are also four circumferential waves.

The relationship $q = q(u_z)$ presented in Fig. 8b should be taken into consideration and supplemented with the linear pre-critical part of the equilibrium path (straight line 1). This path was extended taking into account the non-linear axisymmetric pre-critical deformations (curve 2). Both equilibrium paths are labelled at the bifurcation point ($q_{cr} = 0.734$ kPa) and at the local limit pressure ($q_{lim}^{loc} = 0.715$ kPa). Moreover, an equilibrium path for the shell with four compression areas (curve 3) was added to the graph. Curve 4 was drawn with the appropriate shape through the above-mentioned bifurcation and limit pressure points. The solid and dashed lines represented stable and unstable equilibrium paths respectively. The resulting

także przez dwa ww. punkty (bifurkacje i ciśnienia granicznego) odpowiednią krzywą 4. Liniami ciągłymi naniesiono ścieżki stateczne stanu równowagi, przerywaną – niestateczne. W rezultacie otrzymano wykres przedstawiony na Rys. 9. Obejmuje on cały opisany powyżej proces bifurkacji geometrycznie nieliniowych deformacji w zakresie odkształceń dokrytycznych i wyoboczenia rozważanej powłoki. Wracając do możliwych rozwiązań badanych problemów z wykorzystaniem elementem skończonego SHELL 181 można zauważyć, że jeśli ścieżka równowagi, do której następuje przejście, jest niestabilna, proces ulega odwróceniu z sekwencyjnym spadkiem pierwotnego ciśnienia lub przez gwałtowne „skokowe” zmniejszenie ciśnienia i zakończenie procesu obliczeniowego. Jest to trzeci wynik geometrycznie nieliniowej analizy powłok tej klasy.

W przypadku poruszania się po stabilnej ścieżce nieosiowosymetrycznego stanu równowagi można zwrócić uwagę na następujące zachowanie. W wyniku dalszego obciążania powłoki rozwija się postać nieosiowosymetryczna (przemieszczenie może wynosić kilka grubości), a proces jej rozwoju trwa aż do punktu granicznego i prowadzi do „przeskoku” na stateczną ścieżkę równowagi, jak również do nieosiowosymetrycznego stanu równowagi z inną liczbą fal wyoboczenia lub do wspomnianego powyżej zakończenie procesu obliczeniowego. Zdaniem autorów pomyślnie zakończenie obliczeń to takie, dla którego przemieszczenie wierzchołka stożka jest zbliżone do odpowiedniej wartości uzyskanej w rozwiązaniu zadania z wykorzystaniem osiowosymetrycznego elementu skończonego SHELL 208.

W przypadku powłok stożkowych o średnich i dużych kątach α wartości szerokiego spektrum krytycznych wartości ciśnienia, otrzymanych z rozwiązania liniowego zadania stateczności, okazują się mniejsze od wartości granicznej wyoboczenia osiowosymetrycznego otrzymanej przy wykorzystaniu elementów SHELL 181. W tym przypadku zależność przemieszczenia punktów powłoki od ciśnienia w jeszcze większym stopniu zależy od założonych pierwotnie parametrów zadania. Jest to związane ze znacznym wzrostem możliwości wyoboczenia lokalnego jako przejścia do zarówno stabilnego, jak i niestabilnego nieosiowosymetrycznego stanu równowagi. Na Rys. 10a pokazano jakościową zależność $q = q(u_z)$ dla wierzchołka powłoki o $R/h = 500$ i $\alpha = 4^\circ$, określoną na podstawie różnych wartości parametrów zadania.

Na Rys. 10a przedstawiono fragment zależności przy wyoboczeniu lokalnym. Kształt tego wyoboczenia, które wystąpiło przy wartości $q_{lim}^{loc} = 2,120$ kPa (pkt 1), pokazano na Rys. 10b. Jednakże, gdy ciśnienie osiągnie wartość

graph is presented in Fig. 9. It depicts the entire above-described process of bifurcation of geometrically non-linear deformations in the region of pre-critical deformations and buckling of the analysed shell. Coming back to the issue of solutions to the investigated problems as may be obtained with the finite element SHELL 181, it can be noticed that if the equilibrium path to which the curve diverts is unstable, the process becomes reversed with a sequential drop of the initial pressure or by rapid, “stepped” decrease of pressure and termination of the calculation process. It is the third result of geometrically non-linear analysis of this shell category.

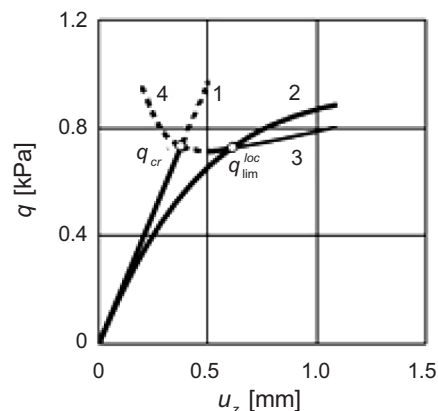


Fig. 9. Equilibrium states of a shell with pinned ends of $R/h = 500$ and $\alpha = 2^\circ$

Rys. 9. Stany równowagi powłoki przegubowo podpartej o $R/h = 500$ i $\alpha = 2^\circ$

When moving on the stable path of non-axisymmetric state of equilibrium, the following behaviour is observed. With continued loading of the shell non-axisymmetric mode of deformation develops (with displacement of a few times the wall thickness) up to the limit point, leading to the “jump” to the stable equilibrium path and to non-axisymmetric state of equilibrium with a different number of buckling waves, or to the above-mentioned termination of the calculation process. According to the authors,, the successful termination of the calculation process should give apex displacement approximating the appropriate value obtained when solving the problem with axisymmetric finite element SHELL 208.

Consider conical shells in the range of medium and large α angle, for which the values of the wide spectrum of critical pressures obtained from the solution of linear stability problem turn out to be smaller than the limit value of axisymmetric buckling obtained with the use of SHELL 181. In that case the relationship of the shell points displacement versus the pressure is even more sensitive to

graniczną ($q_{lim} = 3,483$ kPa) konfiguracja odkształceń ulega zmianie (pkt 2) (Rys. 10c). Jako że liczba fal wybożenia zwiększyła się, w procesie obciążania powłoki zaszło jeszcze co najmniej jedno przejście do nowej postaci odkształcenia, której nie widać na wykresie $q = q(u_z)$. Jak już wspomniano, zależność przedstawiona na Rys. 10a ma charakter jakościowy i w zasadzie jest charakterystyką powłok o średniej wartości R/h , a także średniej wartości kąta α . Co więcej, przy zwiększeniu kąta α powiększa się możliwość bifurkacji osiowosymetrycznych deformacji na liczne nieosiowosymetryczne postaci równowagi, ponieważ znacznie rozszerza się spektrum tych form. Pośrednim na to dowodem jest rozszerzenie spektrów krytycznych ciśnienia liniowego zadania stateczności, poddanych obciążeniu granicznemu. Mając to na uwadze, na Rys. 11 dla powłoki podpartej przegubowo o $R/h = 500$ i $\alpha = 4^\circ$ przedstawiono widmo pierwszych 10 postaci wybożenia zadania liniowego i odpowiednie wartości ciśnienia krytycznego q_{cr} , jak również liczbę fal w kierunku obwodowym n .

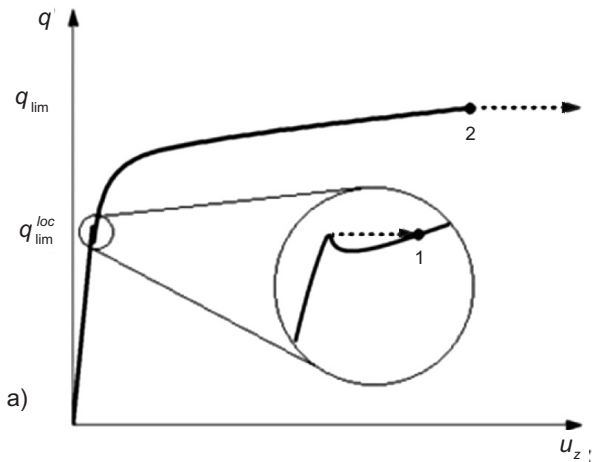
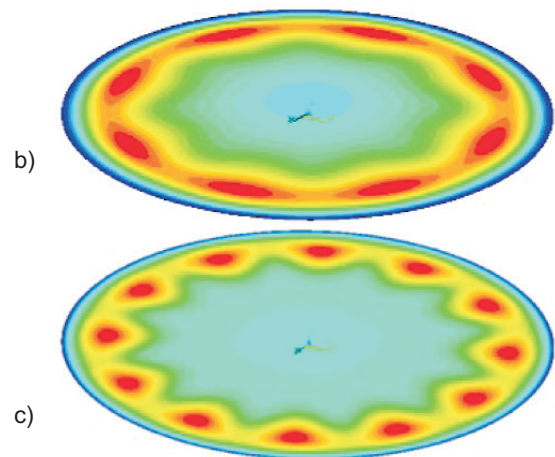


Fig. 10. Qualitative relationship $q = q(u_z)$ for the shell apex with mid-range values of R/h , α angle (a) and buckling mode shapes for q_{lim}^{loc} (b) and q_{lim} (c)

Rys. 10. Jakościowa zależność $q = q(u_z)$ dla wierzchołka powłoki o średnich wartości R/h i kąta α (a) oraz na postaci wybożenia dla q_{lim}^{loc} (b) i q_{lim} (c)

the user-defined input parameters. This is related to a much more probable local buckling resulting in transition to non-axisymmetric state of equilibrium, both stable and unstable. Fig. 10a presents the qualitative relationship $q = q(u_z)$ for the apex of the shell of $R/h = 500$ and $\alpha = 4^\circ$, determined with different input parameters values.

The Fig. 10a presents a fragment of relationship for local buckling. The mode shape of this buckling which occurred at $q_{lim}^{loc} = 2.120$ kPa (point 1) is presented in Fig. 10b. The deformation pattern changes when the pressure reaches the limit value of $q_{lim} = 3.483$ kPa (point 2) (Fig. 10c). The increase in the number of buckling waves indicates at least one more transition to a new deformation mode shape which cannot be seen on the graph of $q = q(u_z)$ relationship. The relationship in Fig. 10a is of qualitative nature and generally applies only to shells of mid-range values of R/h and α angle. Moreover, the increase of the α angle value enhances the bifurcation of axisymmetric deformations to numerous non-axisymmetric forms of equilibrium due to significantly increased spectrum of such forms. This is indirectly proven by the widening of the critical pressures spectrum of a linear stability problem under the limit load. This is taken into account in Fig. 11 which presents the spectrums of the first ten mode shapes for a linear problem of buckling of a shell with pinned ends of $R/h = 500$ and $\alpha = 4^\circ$, giving the associated critical pressure values q_{cr} and the circumferential waves number n .



Note the peculiar transition from axisymmetric to non-axisymmetric deformation of the shell at relatively low limit pressure, and the spectrum of critical pressure values, close to the limit pressure, includes only one or two mode shapes ($R/h = 500$, $\alpha = 2^\circ$, Fig. 8-9), as well as in the case of shells for which the limit pressure is

Należy zauważyć osobliwość przejścia od deformacji osiowosymetrycznej powłoki do deformacji nieosiowosymetrycznej w przypadku, kiedy ciśnienie graniczne jest stosunkowo niskie, a widmo ciśnień krytycznych, bliskich ciśnieniu granicznemu, składa się tylko z jednej lub dwóch postaci ($R/h = 500$, $\alpha = 2^\circ$, Rys. 8-9), oraz powłok, w których

ciśnienie graniczne jej poprzedzone szerokim widmem obciążeń krytycznych ($R/h = 500$, $\alpha = 4^\circ$, Rys. 10-11). W pierwszym przypadku ma miejsce przejście do konfiguracji, która dokładnie pokrywa się z postacią bifurkacji wyoboczenia (4 fale w kierunku obwodowym) przy ciśnieniu krytycznym bliskim granicznemu. W drugim przypadku nie ma tej zbieżności. Natomiast gdy wartości krytyczne i graniczne obciążeń są sobie bliskie liczba fal wyoboczenia w przypadku obliczeń nieliniowych jest większa niż w przypadku bifurkacji. W powyższych przykładach ta nadwyżka wynosi 1-2 zagęszczenia (fale).

preceded by a wide spectrum of critical buckling loads ($R/h = 500$, $\alpha = 4^\circ$, Fig. 10-11). In the first case there is a transition to a pattern matching the bifurcation mode shape of buckling (four circumferential waves) at critical pressure approaching the limit pressure value. Such matching does not occur in the second case. Conversely, when the critical values are close to the limit ones, the buckling waves numbers are higher in the cases of non-linear calculations as compared to bifurcation. In the above described cases this surplus is 1-2 compression areas (waves).

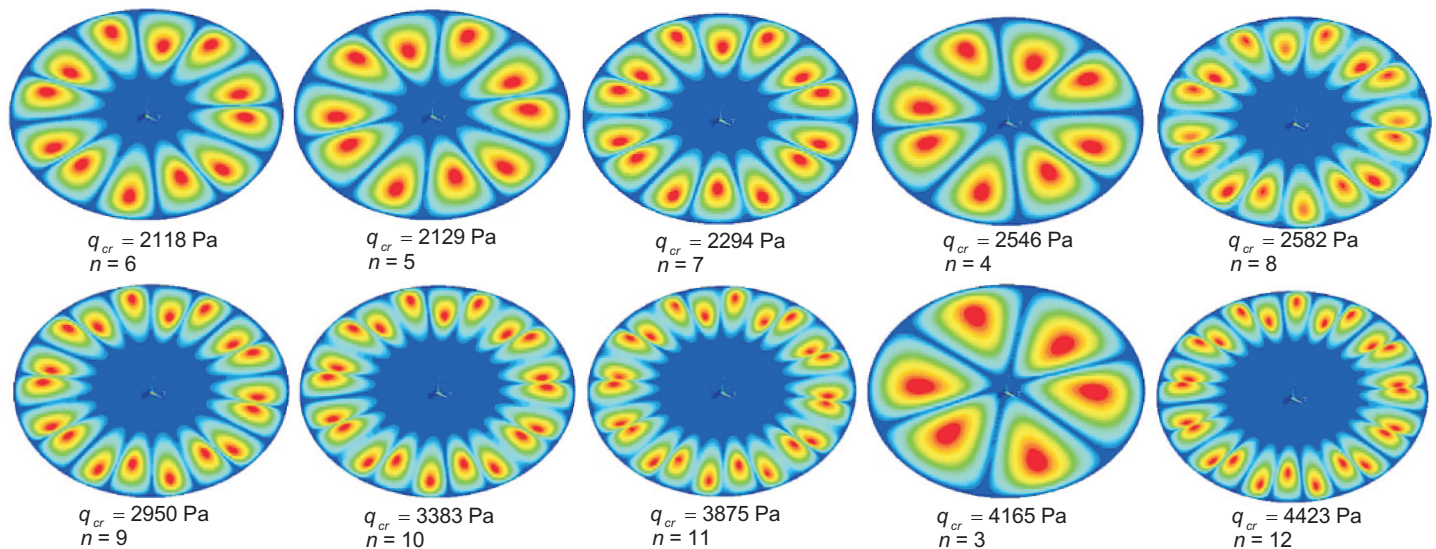


Fig. 11. Lower buckling eigenmodes and the values of q_{cr} and n for a simply supported shell with $R/h = 500$ and $\alpha = 4^\circ$

Rys. 11. Widmo niższych form własnych wyoboczenia i wartości q_{cr} oraz n dla powłoki swobodnie podpartej o $R/h = 500$ i $\alpha = 4^\circ$

Podobnie jak w przypadku ciśnienia krytycznego, otrzymanego z rozwiązania zadania liniowego, wartość ciśnienia granicznego zadania geometrycznie nieliniowego przy danym kącie α nie zależy od wartości bezwzględnych wymiarów powłoki i jest w pełni określona względnym parametrem R/h oraz wartością modułu sprężystości materiału.

Similarly to the critical pressure obtained from the linear problem solution, the limit pressure of the geometrically non-linear problem at a given value of α angle does not depend on the absolute dimensions of the shell, and instead it is fully defined by the values of the relative parameter R/h and E -modulus of the material. According to

Table 4. Values of critical pressure q_{lim} for shells with fixed ends of $\alpha = 4^\circ$

Tablica 4. Wartości obciążenia granicznego q_{lim} dla powłok utwierdzonych o $\alpha = 4^\circ$

			q_{lim} [kPa]					
			R/h					
			100	250	500	1000	2000	
FE / ES	SHELL 181	h [mm]	0.4	189.1	27.97	5.231	1.490	0.155
			4.0	189.1	27.97	5.238	1.492	0.157
	SHELL 208		0.4	188.1	33.15	6.820	1.682	0.419
			4.0	188.1	33.15	6.820	1.682	0.419

Z Tabl. 4 wynika, że wniosek ten jest aktualny zarówno dla osiowosymetrycznego elementu SHELL 208, jak i cztero-węzłowego elementu SHELL 181. Jednocześnie należy zauważyć, że wartość q_{lim} , którą otrzymywano z wykorzystaniem osiowo symetrycznych elementów skończonych SHELL 208 i cztero-węzłowego elementu SHELL 181, jest taka sama dla małych kątów α .

4. WNIOSKI

1. W środowisku oprogramowania ANSYS rozwiązano numerycznie trzy zadania wyznaczenia deformacji i wyboczenia zamkniętych małowyniosłych sprężystych powłok stożkowych obciążonych ciśnieniem zewnętrznym prostopadłym do powierzchni powłoki: 1) zadania liniowego (bifurkacyjnego), wyznaczenia ciśnienia krytycznego q_{cr} , deformacji w liniowym zakresie dokrytycznym i wyboczenia przy użyciu powłokowych elementów czworokątnych SHELL 181 (zadanie 1); 2) zadania geometrycznie nieliniowego osiowosymetrycznego w zakresie deformacji dokrytycznych i pokrytycznych z określeniem granicznej wartości ciśnienia q_{lim} przy wykorzystaniu osiowosymetrycznego skończonego elementu powłokowego SHELL 208 (zadanie 2); 3) zadania geometrycznie nieliniowego deformacji w zakresie dokrytycznym i pokrytycznym z wyznaczeniem ciśnienia granicznego q_{lim} przy wykorzystaniu cztero-węzłowego elementu powłokowego FE SHELL 181 (zadanie 3). Badania przeprowadzono dla przypadków sztywnego zamocowania i nieprzesuwanego swobodnego podparcia w zakresie zmian parametrów geometrycznych ($100 \leq R/h \leq 2000$ i $0,5^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$).
2. Stwierdzono wysoką dokładność obliczeń zadania 1, liniowych rozwiązań w całym zakresie geometrii rozpatrywanych powłok.
3. Przedstawiono interpretację geometryczną nieliniowego rozwiązania zadania 2, realizującego w procesie obciążenia powłoki jej osiowosymetryczne deformacje na wszystkich etapach: przed i za punktem granicznym, aż do przewinięcia materiału (z wyjątkiem obszaru wierzchołka stożka). Pomyślnie rozwiązanie tego problemu jest możliwe tylko dla wartości $\alpha < (7^\circ-8^\circ)$, co jest związane ze złożonością doboru parametrów wejściowych zadania. Jednocześnie zadanie określenia ciśnienia granicznego z wykorzystaniem osiowosymetrycznego elementu SHELL 208 q_{lim}^{208} jest z powodzeniem rozwiązywane w całym badanym zakresie zmian parametrów geometrycznych powłoki.

Table 4 this thesis holds true both for the axisymmetric finite element SHELL 208 and for the 4-node finite element SHELL 181. It is important to note that for small α angles the same values of q_{lim} are obtained for both the axisymmetric finite elements SHELL 208 and 4-node finite elements SHELL 181.

4. CONCLUSIONS

1. In this study ANSYS software package was used to obtain numerical solutions of three problems of determining the deformations and buckling of closed, elastic, shallow conical shells under external pressure perpendicular to the shell surface as described below: 1) linear (bifurcation) problem of determining the critical pressure q_{cr} , deformations in the pre-critical linear region and buckling of shell using rectangular finite elements SHELL 181 (problem no. 1); 2) geometrically non-linear problem related to pre- and post-critical deformations to determine the limit pressure q_{lim} using axisymmetric finite element SHELL 208; 3) geometrically non-linear problem in the pre- and post-critical region to determine the limit pressure q_{lim} using 4-node finite element SHELL 181 (problem no. 3). Two cases of supporting conditions were considered fixed and pinned ones, with the following ranges of geometrical parameters: $100 \leq R/h \leq 2000$ and $0.5^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$.
2. The linear solutions of problem no. 1 were found to be highly accurate in the whole range of geometrical parameters of the analysed shells.
3. The paper presents geometrical interpretation of the non-linear solution to problem no. 2, effecting in the loading process the axisymmetric deformations of the shell in all phases: before and after the limit point, up to snapping through of the material (except for the apex region). A successful solution to this problem is possible only for the angle values of $\alpha < (7^\circ-8^\circ)$ due to the complexity of selection of the input parameters. Conversely, the problem of determining the critical pressure is successfully solved in the whole studied range of changes of the geometrical shell parameters when using the axisymmetric finite element SHELL 208 q_{lim}^{208} .
4. The outcome of the analysis with finite element SHELL 181 (problem no. 3) matches the solution to problem no. 2, when the minimum value of critical pressure q_{cr} in problem no. 1 is lower than the limit pressure q_{lim}^{208} determined in the problem no. 2, which is typical

4. Zastosowanie elementu skończonego SHELL 181 (zadanie 3) daje wynik całkowicie zgodny z opisanym powyżej rozwiązaniem zadania 2 w przypadku, gdy minimalna wartość ciśnienia krytycznego q_{cr} liniowego zadania 1 jest niższa od ciśnienia granicznego q_{lim}^{208} określonego w zadaniu 2, typowego dla małych kątów α i małych wartości R/h . W przypadku, gdy $q_{cr} \leq q_{lim}^{208}$ charakter deformacji w zakresie dokrytycznym i wynik obliczeń istotnie zależą od przyjętych wartości parametrów układu. W miarę zwiększania obciążenia oryginalne rozwiązanie na ścieżce osiowosymetrycznych stanów równowagi, po osiągnięciu określonych punktów osobliwych, których położenie zależy od wartości parametrów początkowych, przechodzi zazwyczaj na ścieżki równowagi charakteryzujące się okresowymi zagęszczeniami w kierunku obwodowym. Istotą tego przejścia jest bifurkacja pierwotnie nieliniowych osiowosymetrycznych deformacji w zakresie dokrytycznym. Wartość ciśnienia granicznego q_{lim}^{181} w zadaniu 3 w tym przypadku zmniejsza się i zależy od początkowych wartości parametrów obliczeń. Weryfikacja prawidłowości powstałych rozwiązań i wartości q_{lim}^{181} odbywa się poprzez obserwację przemieszczenia wierzchołka stożka, które powinno być wartością zbliżoną do podwojonej wysokości powłoki (z wyłączeniem powłok o $\alpha \sim (15^\circ - 20^\circ)$).
5. Dla danej wartości kąta α wartości q_{lim} zadania geometrycznie nieliniowego, jak również wartości q_{cr} , nie zależą od bezwzględnych rozmiarów powłoki. Są natomiast w pełni określone przez parametry R/h , moduł sprężystości materiału, co potwierdziło rozwiązanie zadania 2 i zadania 3. Jednakże wartości graniczne q_{lim} uzyskane z wykorzystaniem tych elementów skończonych są zgodne tylko dla małych kątów α .
6. W wykorzystanej przez autorów wersji PC ANSYS nie zaimplementowano opcji realizujących zadanie bifurkacji geometrycznie nieliniowego zadania wyznaczania deformacji w zakresie dokrytycznym.

INFORMACJE DODATKOWE

Badania realizowano w ramach projektu badawczego fundacji Humboldta Nr 3.4-Fokoop - UKR/1070297.

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Alumae N.A.*: Ob opredelenii sostoyaniy ravnovesiya krugovoy konicheskoy obolochki pri osesimmetrichnyih nagruzkah. Prikladnaya Matematika i Mehanika, **17**, 5, 1953, 23-26

for small values of α angle and R/h ratio. For $q_{cr} \leq q_{lim}^{208}$ the character of deformations in the pre-critical region and the result of calculations depend on the adopted system parameters. With the increasing load the original solution on the axisymmetric equilibrium path, upon reaching the specific singular points whose location depends on the input parameters, usually diverts to the equilibrium paths featuring periodic compressions in the circumferential direction. The essence of this diversion is bifurcation of originally non-linear axisymmetric deformations in the pre-critical region. The value of limit pressure q_{lim}^{181} in the problem no. 3 in this case decreases and depends on the input parameters. The obtained solutions and values of q_{lim}^{181} are verified by observing the apex displacement value which should approximate twice the shell height (except for the shells with $\alpha \sim (15^\circ - 20^\circ)$).

5. For a given value of α angle the values of q_{lim} and q_{cr} of a geometrically non-linear problem do not depend on the absolute dimensions of the shell. On the other hand, these values are fully defined by the R/h ratio and the E -modulus of the material, as confirmed by the solutions to the problems no. 2 and no. 3. However, the pressure limit values q_{lim} obtained with these finite elements are consistent only for small α angles.
6. The ANSYS software package used in this project does not include the option for bifurcation of geometrically non-linear problem of determining the deformations in the pre-critical region.

ACKNOWLEDGEMENT

This study was carried out in the framework of the Humboldt Foundation's research project No. 3.4-Fokoop - UKR/1070297.

- [2] *Bajlaard P.P.*: Buckling of conical shells under external pressure. NASA TN D-1510, 1962
- [3] *Weingarten V. I., Seide P.*: Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under combined external pressure and axial compression. AIAA Journal, **3**, 5, 1965, 913-920

- [4] *Grigolyuk E.I., Kabanov V.V.*: Ustoychivost obolochek. Nauka, Moskva, 1978
- [5] *Dubois F.*: Über die Festigkeit der Kegelschale. Technische Hochschule, Zürich, 1917
- [6] *Hoff N.J., Singer J.*: Buckling of circular conical shells under external pressure. Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Delt, Holland, 1959, 363-388
- [7] *Singer J. et al.*: Buckling of isotropic, orthotropic and ring-stiffened conical shells. Israel Institute of Technology, Haifa, 1963
- [8] *Mikhasev G.I., Tovstik P.E.*: Ustoychivost konicheskikh obolochek pod deystviem vneshnego davleniya. Mehanika Tvyordogo Tela, **4**, 1990, 99-104
- [9] *Mushtari J.M., Galimov K.Z.*: Nelineynaya teoriya uprugih obolochek. Tatknigoizdat, Kazan, 1957
- [10] *Miursepp P.V.*: Ob opredelenii kriticheskikh nagruzok konicheskikh i tsilindricheskikh obolochek. Teoriya plastin i obolochek. Izd-vo Akademia Nauk Arm. SSR, Erewan, 1964
- [11] *Preobrazhenskij I.N., Grischak V.Z.*: Ustoychivost i kolebaniya konicheskikh obolochek. Maszynostroenie, Moskva, 1986
- [12] *Roditelev K.A.*: Eksperimentalno-teoreticheskoe issledovanie ustoychivosti gladkikh konicheskikh obolochek pod vneshnim davleniem. Otd. nauch.-issled. inform, Moskva, 1956
- [13] *Vibornov V.G., Satchenkov A.V.*: Teoreticheskoe i eksperimentalnoe issledovanie ustoychivosti konicheskikh obolochek. Issledovaniya po teorii plastin i obolochek, VI-VII, 1968, 451-480
- [14] *Seide P.*: A survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness. Collected Papers on Instability of Shell Structures. NASA TN D-1510, 1962, 401-426
- [15] *Schiffner K.*: Stress and stability investigations on thin-walled conical shells for axially symmetric boundary conditions. NASA TM-X-59676, 1967
- [16] *Valishvili N.V.*: Neosesimmetrichnyie zadachi pologih obolochek vrascheniya pri konechnyih peremescheniyah. Trudy X Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin, Metsnierba, Tbilisi, **1**, 1, 1975, 539-551
- [17] *Volmir A.S.*: Gibkie plastiny i obolochki. Gostehizdat, Moskva, 1956
- [18] *Volmir A.S.*: Ustoychivost deformiruemyih sistem. Nauka, Moskva, 1967
- [19] *Galimov K.Z.*: Osnovy nelineynoy teorii tonkih obolochek. Izd-vo Kazan un-ta, Kazan, 1975
- [20] *Kornishin M.S.*: Nelineynye zadachi teorii plastin i pologih obolochek i metody ih resheniya. Nauka, Moskva, 1964
- [21] *Novozhilov V.V.*: Teoriya tonkih obolochek. Sudostroenie, Leningrad, 1962
- [22] *Shkutin L.I.*: Opredelenie kriticheskoy velichinyi davleniya dlya pologih konicheskikh obolochek. Trudy VI Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin. Nauka, Moskva, 1966, 849-852
- [23] *Shkutin L.I.*: Chislennyiy analiz osesimmetrichnyih form vyipuchivaniya konicheskikh obolochek. Prikladnaya Mehanika i Tehnicheskaya Fizika, **42**, 6, 2001, 159-165
- [24] *Shubin I.A., Shkutin L.I.*: Eksperimentalnoe issledovanie ustoychivosti pologih konicheskikh obolochek pri staticheskom nagruzhennii davleniem. Prikladnaya Mehanika, **2**, 6, 1966, 63-70
- [25] *Krasowski R., Prokopalo E., Varyanitchko M.*: Ustoychivost pologih konicheskikh obolochek pri vneshnem davlenii v fizicheskom i chislenom eksperimente. Novini nauki PridnIprov'ya. Inzhenerni Nauki, **2**, 2005, 20-31
- [26] *Krasowski R., Prokopalo E., Varyanitchko M.*: Eksperimentalnoe i teoreticheskoe issledovanie ustoychivosti zamknutyih pologih konicheskikh obolochek pri vneshnem davlenii. Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions Dniepropetrovsk, **13**, 2005, 175-188
- [27] *Karasev A.G.*: Initial imperfection influence on the buckling load of closed elastic isotropic shallow conical shells. Mathematics and Mechanics of Solids, **21**, 4, 2014, 444-453 DOI: 10.1177/1081286514526082
- [28] ANSYS Inc. Academic Research, Release 13.0, Help System, Mechanical Analysis Guide