VALERIY BARANENKO<sup>1)</sup>DENYS VOLCHOK<sup>2)</sup>

## EVALUATION OF THE MAXIMUM AXIAL FORCE ON A CYLINDRICAL SHELL STRUCTURE IN TERMS OF STABILITY AND STRENGTH USING FUZZY QUANTITIES OF CHOSEN GEOMETRIC PARAMETERS

## OCENA MAKSYMALNEJ SIŁY OSIOWEJ DZIAŁAJĄCEJ NA POWŁOKĘ CYLINDRYCZNĄ W ASPEKTCIE WYTRZYMAŁOŚCI I STATECZNOŚCI PRZY ROZMYTYCH WARTOŚCIACH JEJ CHARAKTERYSTYK GEOMETRYCZNYCH

**STRESZCZENIE.** Praca poświęcona jest zastosowaniu teorii zbiorów rozmytych do wyznaczania maksymalnej wartości siły wzdłużnej, działającej na gładką powłokę cylindryczną, przegubowo podpartą na końcach, w aspekcie stateczności i wytrzymałości przy rozmytej informacji o charakterystykach geometrycznych promienia i grubości powłoki. Sformułowane zadania optymalizacji odnoszą się do klasy CCP – modeli programowania rozmytego (ang. *chance constrained programming*). Został opracowany algorytm modelowania symulacyjnego z wykorzystaniem metody Monte Carlo. Przeprowadzono eksperymenty obliczeniowe. Przedstawiona metoda może znaleźć zastosowanie przy projektowaniu mostów i dróg szynowych w warunkach niepełnych lub zmiennych w czasie danych zadania.

**SŁOWA KLUCZOWE:** modelowanie, powłoka, rozmyta informacja.

**ABSTRACT.** The paper deals with the application of the fuzzy sets theory for determining the maximum axial load of a pin-supported smooth cylindrical shell surface. It takes into account the stability and strength criteria, using fuzzy shell radius and plate thickness data. The formulated optimisation problems relate to fuzzy chance-constrained programming (CCP) models. A Monte-Carlo simulation modelling algorithm is proposed. Computational experiments were performed as part of the study. The proposed method can be used for designing and assessing the load-bearing capacity of structures such as bridges and railroads when faced with incomplete or time-varying input data.

**KEYWORDS:** fuzzy information, shell, structural modelling.

DOI: 10.7409/rabdim.016.005

<sup>1)</sup> Prydniprovsk'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture; Czerniszewskovo 24a blvd, 49600 Dnipropetrovsk, Ukraine; bva0984387404@gmail.com

<sup>2)</sup> Prydniprovsk'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture; Czerniszewskovo 24a blvd, 49600 Dnipropetrovsk, Ukraine; VolchokDL@yandex.ru (✉)

## 1. WSTĘP

W rzeczywistych zadaniach projektowania konstrukcji nośnych dane zadania mają zwykle charakter deterministyczny. Niekiedy zdarza się, że niektóre z nich posiadają charakter losowy, mogą mieć również miejsce przypadki pełnego braku informacji. Dostępna jest znaczna liczba publikacji, w których do projektowania [1-3] stosuje się podejście probabilistyczne polegające na przewidywaniu zarówno losowej nośności konstrukcji, jak i uwzględnieniu obciążeń losowych. Wielkość losową można opisać za pomocą wybranej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa oraz odpowiednich parametrów, które to wielkości mają wpływ na uzyskane rozwiązania. W trakcie projektowania mogą wystąpić różne rodzaje losowości, a mianowicie: niekompletność informacji niezbędnych do projektowania, niejasny, rozmyty i niedokładny opis danych, co prowadzi do konieczności użycia takich pojęć jak „niedokładność” czy „rozmytość” [4], jak również do konieczności określenia danych za pomocą przedziałów wartości [5].

Wprowadzenie do rozważań wielkości losowych powoduje, że metody analizy tak określonych zadań zasadniczo różnią się od metod badań deterministycznych mechaniki budowli, a także optymalnego projektowania konstrukcji (OPK). Rozwiązując zadanie optymalnego projektowania z wykorzystaniem podejścia deterministycznego otrzymuje się rozwiązanie, które może wykazywać dużą wrażliwość na zmianę wartości parametrów. Nawet nieznaczne zmiany danych rozpatrywanego zadania mogą spowodować, że rozwiązanie nie wykazuje cech rozwiązania optymalnego. Optymalna nośność nie jest zapewniona, ponieważ konstrukcja nie wykazuje niektórych albo wszystkim cech konstrukcji optymalnej. Wówczas pojawia się pytanie o tak zwaną tolerancyjność rozwiązania. W tym przypadku pod pojęciem tolerancyjności procedury rozumie się określenie granicznych wartości przedziałów, możliwych do zaakceptowania zmian danych niedokładnych, „surowych” czy „nieobrobionych”. W ten sposób na równi z deterministycznymi sformułowaniami zadań, naukowy i praktyczny sens ma zastosowanie bardziej ogólnych zadań mechaniki budowli i OPK.

Niniejsza praca poświęcona jest zastosowaniu teorii analizy rozmytych zbiorów danych do wyznaczenia nośności gładkiej przegubowo podpartej powłoki cylindrycznej, z uwzględnieniem warunków stateczności i wytrzymałości. Podstawą analizy jest stwierdzenie, że każdy zbiór rozmyty posiada górne i dolne przybliżenia utworzone w klasie opisów ekwiwalentnych. Inaczej mówiąc, zbiór rozmyty może być określony przez dwójkę zbiorów

## 1. INTRODUCTION

In real-life design problems related to the design of load-bearing structures the data are generally of deterministic nature. Random data occur sometimes, as well as cases of a complete lack of information. There are many publications describing probabilistic design [1-3] with predicting both the random load-bearing capacity as well as random loads. A random quantity can be described with a chosen probability distribution function and adequate parameters whose values influence the obtained solutions. Randomness arising during design may occur due to: incomplete input information, unclear, fuzzy and imprecise description of data resulting in the need to introduce the notions of “imprecision” and “fuzziness” [4], as well as to use intervals rather than single values [5].

Introduction of random values makes the analytical methods used for problems defined in that way essentially different from the deterministic methods used in building mechanics studies and from the optimal structural design methods. Solving an optimal design problem by using deterministic approach can yield a solution which can be highly sensitive to variation of parameters. Even small changes of the input data may deprive the solution of the optimum design characteristics. Then the optimum load-bearing capacity will not be ensured if the designed structure lacks some or all optimal design characteristics. Then there arises a question of so-called tolerance of the obtained solution. In the case under analysis the tolerance of the procedure translates to defining the bounds of intervals in which the variation of data – imprecise, raw or unprocessed – is within acceptable limits. Thus, on equal basis with the deterministic problem formulations, generating more general building mechanics and optimal design problems is reasonable from both scientific and engineering perspectives.

This paper is devoted to the application of the fuzzy input data sets theory for determining the load-bearing capacity of a pin-supported smooth cylindrical shell in terms of stability and strength. The fundamental assumption is that each fuzzy set has upper and lower approximations created in the equivalence class of formulae. In other words: a fuzzy set can be defined by two definable sets [6]. In the analysed design problem the fuzzy data are the chosen geometric parameters of the shell: plate thickness and shell radius. The presented analytical models together with the theory of mathematical programming fall in the category of fuzzy chance-constrained programming (CCP) models. In the

dokładnych [6]. Rozmytymi danymi w rozpatrywanym zadaniu projektowania są wybrane charakterystyki geometryczne powłoki – grubość i promień. Przedstawione modele analizy wraz z teorią programowania matematycznego należą do klasy CCP – modeli programowania rozmytego (ang. *chance constrained programming*). W procesie projektowania czy rewitalizacji istniejących obiektów inżynierskich, projektanci bardzo często spotykają się z problemem niepełnych danych czy wręcz ich braku. Prace badawcze mające na celu wdrożenie do praktyki inżynierskiej metod analizy zbiorów rozmytych są więc aktualne i stale podejmowane w wielu ośrodkach naukowych. Zdaniem autorów przedstawiona metoda może być z powodzeniem wykorzystana do projektowania i oceny obiektów mostowych i drogowych.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Rozpatrywana jest izotropowa, przegubowo podparta na końcach, kołowa powłoka cylindryczna o zadanej długości  $L$ . Materiał powłoki charakteryzuje się: modułem sprężystości  $E$ , wytrzymałością materiału na ściskanie w kierunku obwodowym  $\sigma_0$ , współczynnikiem Poissona  $\nu$ . Powłoka jest obciążona wzdłuż osi ścisnącą siłą  $N$ . Zakłada się, że informacja o parametrach geometrycznych – grubości  $h$  i promieniu powłoki  $R$  – nie są całkowicie deterministyczne, a mianowicie:

$$H^- \leq h \leq H^+, R^- \leq R \leq R^+,$$

gdzie  $H^-, H^+, R^-, R^+$  są zbiorami, określonymi w przedziałach:

$$H^- = [a_1, b_1], H^+ = [c_1, d_1], \quad (1)$$

$$R^- = [a_2, b_2], R^+ = [c_2, d_2],$$

przy czym spełniony jest warunek:

$$0 \leq c_i \leq a_i \leq b_i \leq d_i, \quad i=1, 2. \quad (2)$$

W charakterze ograniczeń fizycznych przyjęto następujące zależności [4]:

$$P_{KP}^M \geq N, P_{KP}^C \geq N, P_R \geq N, \quad (3)$$

$$P_{KP}^M = Bh^2, B = 2\pi E / \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad (4)$$

$$P_{KP}^C = ChR^3, C = \pi^3 E / L^2, \quad (5)$$

$$P_R = DhR, D = 2\pi\sigma_0. \quad (6)$$

gdzie:

$P_{KP}^R$  – obciążenie krytyczne utraty stateczności idealnej kołowej powłoki cylindrycznej,

design of new or renewal of existing structures carrying traffic the problem of incomplete or even a complete lack of data are often a challenge to the designers. Hence, research projects aimed at implementing fuzzy set analytical methods to the engineering practice are highly relevant and undertaken at numerous research centres. The authors are of the opinion that this method can be successfully used in designing new and evaluating existing bridges and road structures.

## 2. PROBLEM FORMULATION

The structure in consideration is an isotropic, circular, cylindrical shell of a specified length  $L$ , pinned at the ends. The shell material has the following parameters: modulus of elasticity  $E$ , compressive strength in the circumferential direction  $\sigma_0$ , Poisson's ratio  $\nu$ . The shell is loaded with axial compressive force  $N$  along the axis. It is assumed that the geometric parameters, i.e. the plate thickness  $h$  and shell radius  $R$  are not fully deterministic, that is:

$$H^- \leq h \leq H^+, R^- \leq R \leq R^+,$$

where  $H^-, H^+, R^-, R^+$  are the sets defined in the following ranges:

$$H^- = [a_1, b_1], H^+ = [c_1, d_1], \quad (1)$$

$$R^- = [a_2, b_2], R^+ = [c_2, d_2],$$

and the values meet the following criterion:

$$0 \leq c_i \leq a_i \leq b_i \leq d_i, \quad i=1, 2. \quad (2)$$

The physical constraints are imposed by adopting the following relationships [4]:

$$P_{KP}^M \geq N, P_{KP}^C \geq N, P_R \geq N, \quad (3)$$

$$P_{KP}^M = Bh^2, B = 2\pi E / \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad (4)$$

$$P_{KP}^C = ChR^3, C = \pi^3 E / L^2, \quad (5)$$

$$P_R = DhR, D = 2\pi\sigma_0. \quad (6)$$

where:

$P_{KP}^R$  – critical load for stability of an ideal, circular cylindrical shell,

$P_{KP}^C$  – critical load for stability of the shell axis,

$P_R$  – compressive strength of the shell.

The relationships (3-6) are approximate relationships for critical loads:

$P_{KP}^C$  – obciążenie krytyczne utraty stateczności osi powłoki,

$P_R$  – wytrzymałość powłoki na ściskanie.

Zależności (3-6) stanowią przybliżone zależności dla obciążeń krytycznych:

- pierwsze ograniczenie w (3) określa możliwość miejscowej utraty stateczności powłoki,
- drugie – ogranicza wartości parametrów  $h$  i  $R$  z uwzględnieniem możliwości globalnej utraty stateczności zarówno płaszczka, jak i osi powłoki,
- trzecie ograniczenie w (3) również dotyczy parametrów  $h$  i  $R$  z uwzględnieniem jednak możliwości zniszczenia powłoki pod wpływem ściskania siłą  $N$ .

Parametry  $h$  i  $R$ , w takiej postaci jak zapisano w (1), są nieokreślone. Rodzaj nieokreśloności to niedokładność oraz zgrubność danych. Wprowadzono następujące oznaczenia:  $\xi_1 = h$ ,  $\xi_2 = R$ ,  $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$  – wektor wielkości rozmytych,  $u = N$ ,  $\{E, \nu, L, \sigma_0\}$  – zbiór stałych wielkości zadania.

Wtedy:

$$g_1(\xi) = B\xi_1^2 \wedge g_2(\xi) = C\xi_1\xi_2^3 \wedge g_3(\xi) = D\xi_1\xi_2. \quad (7)$$

Wprowadzono do rozważań zdarzenie rozmyte  $A$ , polegające na tym, że dla niektórych  $\xi$  i  $u$  spełnione będą jednocześnie trzy ograniczenia (3), tj.:

$$A = \{g_1(\xi) \geq u, g_2(\xi) \geq u, g_3(\xi) \geq u\}. \quad (8)$$

Poziom ufności dla zdarzenia rozmytego  $A$  wyraża się miarą  $Tr(A)$  [6, 7].

Celem optymalizacji jest określenie maksymalnej wartości wielkości  $u$ , czyli takiej, dla której spełnione będzie ograniczenie:

$$Tr(A) \geq \alpha, \quad (9)$$

gdzie:  $\alpha$  – rozmyty poziom ufności ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), tj.:

$$u^* = \arg \left\{ \max_u \left| Tr(A) \geq \alpha \right. \right\}. \quad (10)$$

Definicja 1. Niech zbiorem zdarzeń elementarnych  $\Omega$  będzie dowolny zbiór elementów, a  $\Phi$  – pewien ustalony układ podzbiorów zbioru  $\Omega$ . Założono, że spełnione będą następujące warunki:

- 1)  $\Omega \in \Phi$ ,
- 2) jeżeli dla zbiorów  $A \in \Phi$  oraz  $B \in \Phi$ , to również:  
 $A \cup B \in \Phi$  i  $A \cap B \in \Phi$ ,
- 3) jeżeli zbiór  $A \in \Phi$ , to dla jego dopełnienia  $\bar{A}$  zachodzi  $\bar{A} \in \Phi$ .

- the first constraint in (3) defines the possibility of local loss of stability by the shell,
- the second constraint limits the values of  $h$  and  $R$  in relation to the possibility of global loss of stability of both the shell surface and axis,
- the third constraint in (3) also limits the values of  $h$  and  $R$  in relation to the compressive failure of the shell under force  $N$ .

Parameters  $h$  and  $R$  as written in equation (1) are unspecified. This is due to imprecise and coarse-grained data. Let us introduce the following notations:

$\xi_1 = h$ ,  $\xi_2 = R$ ,  $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$  – vector of fuzzy data,  $u = N$ ,  $\{E, \nu, L, \sigma_0\}$  – set of the problem constants.

Therefore:

$$g_1(\xi) = B\xi_1^2 \wedge g_2(\xi) = C\xi_1\xi_2^3 \wedge g_3(\xi) = D\xi_1\xi_2. \quad (7)$$

Now let us introduce a fuzzy event  $A$  in which for some values of  $\xi$  and  $u$  the three constraints of (3) are satisfied simultaneously, i.e.:

$$A = \{g_1(\xi) \geq u, g_2(\xi) \geq u, g_3(\xi) \geq u\}. \quad (8)$$

The confidence level for the fuzzy event  $A$  is expressed by the measure  $Tr(A)$  [6, 7].

The objective of optimisation is to define the maximum value of quantity  $u$ , i.e. the value for which the following constraint is satisfied:

$$Tr(A) \geq \alpha, \quad (9)$$

where:  $\alpha$  – fuzzy confidence level ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), i.e.:

$$u^* = \arg \left\{ \max_u \left| Tr(A) \geq \alpha \right. \right\}. \quad (10)$$

Definition 1. Let us have any set of elements as the set of elementary events  $\Omega$  and  $\Phi$  being some specific configuration of  $\Omega$  subsets. Let's suppose the following constraints are satisfied:

- 1)  $\Omega \in \Phi$ ,
- 2) if the sets are such that  $A \in \Phi$  and  $B \in \Phi$  then also:  
 $A \cup B \in \Phi$  and  $A \cap B \in \Phi$ ,
- 3) if the sets are such that  $A \in \Phi$ , then  $\bar{A} \in \Phi$  holds true for the complement  $\bar{A}$ .

The pre-defined class of subsets  $\Phi$  is called Borel  $\sigma$  – algebra [8].

Definition 2. Suppose  $\Lambda$  is a non-empty set. Suppose  $A$  is  $\sigma$  – algebra of  $\Lambda$  subsets,  $\Delta$  is an element on  $A$  and  $\Pi$  is an additive function of sets yielding non-negative real values. Then the space of approximation is defined by the following four objects  $\Lambda$ ,  $\Delta$ ,  $A$ ,  $\Pi$ :

Ustalona klasa podzbiorów  $\Phi$  nazywa się  $\sigma$  – algebrą lub ciałem zbiorów borelowskich [8].

Definicja 2. Niech  $\Lambda$  będzie zbiorem niepustym. Niech  $A$  jest  $\sigma$  – algebrą podzbiorów  $\Lambda$ , a  $\Delta$  – jest elementem na  $A$ , oraz  $\Pi$  – nieujemną o wartościach rzeczywistych, addytywną funkcją zbiorów. Wtedy następujące cztery obiekty  $\Lambda$ ,  $\Delta$ ,  $A$ ,  $\Pi$  określają przestrzeń przybliżeń.

Definicja 3. Wielkość rozmyta zapisana w postaci  $\xi([a,b],[c,d])$ ,  $c \leq a \leq b \leq d$  jest funkcją mierzalną w przestrzeni przybliżeń  $(\Lambda, \Delta, A, \Phi)$  do prostej rzeczywistej, dla której  $\Lambda = \{x | c \leq x \leq d\}$ ,  $\Delta = \{x | a \leq x \leq b\}$ ,  $\xi(x) = x$ ,  $\forall x \in \Delta$  i  $\Delta \subset \Lambda$ .

Definicja 4. Wielkość rozmyta  $\xi$  z przestrzeni przybliżeń  $(\Lambda, \Delta, A, \Phi)$  jest funkcją z  $\Lambda$  do prostej rzeczywistej  $\mathfrak{R}$  – zbiór uniwersalny (pełny) taki, że dla każdego zbioru borelowskiego  $O$  z  $\mathfrak{R}$  spełniona jest zależność:

$$\{\lambda \in \Lambda | \xi(\lambda \in O) \in A\}. \quad (11)$$

Definicja 5. Dolne i górne przybliżenia wielkości rozmytej  $\xi$  określone są w następujący sposób:

$$\underline{\xi} = \{\xi(\lambda) | \lambda \in \Delta\}, \quad \bar{\xi} = \{\xi(\lambda) | \lambda \in \Lambda\}, \quad \underline{\xi} \subset \bar{\xi}. \quad (12)$$

Definicja 6. Niech  $\xi$  – pewna wielkość rozmyta zadana na obszarze przybliżeń  $(\Lambda, \Delta, A, \Phi)$ , a  $g_i: \mathfrak{R}^i \rightarrow \mathfrak{R}$  – funkcje ciągłe,  $i=1, 2, 3$ . Wtedy dolną i górną granicę oceny poziomu ufności dla zdarzenia rozmytego  $A$  z (8) określa się odpowiednio [6]:

$$\underline{Tr}(A) = \frac{\Pi\{\lambda \in \Delta | g_i(\underline{\xi}(\lambda)) \geq u, i=1, 2, 3\}}{\Pi\{\Delta\}}, \quad (13)$$

$$\overline{Tr}(A) = \frac{\Pi\{\lambda \in \Lambda | g_i(\bar{\xi}(\lambda)) \geq u, i=1, 2, 3\}}{\Pi\{\Lambda\}}. \quad (14)$$

Ogólna ocena poziomu ufności będzie równa:

$$Tr(A) = \frac{1}{2}(\underline{Tr}(A) + \overline{Tr}(A)), \quad (15)$$

przy czym:

$$0 \leq Tr(A) \leq 1. \quad (16)$$

Zdarzenie rozmyte  $A$  powinno zaistnieć, jeżeli poziom ufności dla niego jest równy 1 oraz nie zachodzi, jeżeli ta wartość jest równa 0.

### 3. MODELOWANIE SYMULACYJNE

Wyżej wymienione definicje stanowią podstawy rozmytego modelowania symulacyjnego. W dalszej części artykułu przedstawiono główne jego etapy.

Definicja 3. A fuzzy quantity written as  $\xi([a,b],[c,d])$ ,  $c \leq a \leq b \leq d$  is a measurable function in the space of approximation  $(\Lambda, \Delta, A, \Phi)$  in relation to a real straight line for which:  $\Lambda = \{x | c \leq x \leq d\}$ ,  $\Delta = \{x | a \leq x \leq b\}$ ,  $\xi(x) = x$ ,  $\forall x \in \Delta$  and  $\Delta \subset \Lambda$ .

Definicja 4. Fuzzy quantity  $\xi$  from the space of approximation  $(\Lambda, \Delta, A, \Phi)$  is a function from  $\Lambda$  in relation to the real straight line  $\mathfrak{R}$  – a universal set (complete), such that for each Borel set  $O$  from  $\mathfrak{R}$  the following relationship holds true:

$$\{\lambda \in \Lambda | \xi(\lambda \in O) \in A\}. \quad (11)$$

Definicja 5. The upper and lower approximations of the fuzzy quantity  $\xi$  are defined as follows:

$$\underline{\xi} = \{\xi(\lambda) | \lambda \in \Delta\}, \quad \bar{\xi} = \{\xi(\lambda) | \lambda \in \Lambda\}, \quad \underline{\xi} \subset \bar{\xi}. \quad (12)$$

Definicja 6. Suppose  $\xi$  is a fuzzy quantity specified on the space of approximation  $(\Lambda, \Delta, A, \Phi)$ , and  $g_i: \mathfrak{R}^i \rightarrow \mathfrak{R}$  – continuous functions,  $i=1, 2, 3$ . Then the lower and the upper bounds of the confidence level estimation for the fuzzy event  $A$  from (8) are defined as follows [6]:

$$\underline{Tr}(A) = \frac{\Pi\{\lambda \in \Delta | g_i(\underline{\xi}(\lambda)) \geq u, i=1, 2, 3\}}{\Pi\{\Delta\}}, \quad (13)$$

$$\overline{Tr}(A) = \frac{\Pi\{\lambda \in \Lambda | g_i(\bar{\xi}(\lambda)) \geq u, i=1, 2, 3\}}{\Pi\{\Lambda\}}. \quad (14)$$

The general confidence level estimation is calculated with the following equation:

$$Tr(A) = \frac{1}{2}(\underline{Tr}(A) + \overline{Tr}(A)), \quad (15)$$

and:

$$0 \leq Tr(A) \leq 1. \quad (16)$$

A fuzzy event  $A$  should occur for the confidence level of 1 and not occur for the confidence level of 0.

### 3. SIMULATION MODELLING

The above described definitions are the basis of fuzzy simulation modelling. The main steps of such modelling are described below.

Step 1. Numbers  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  are randomly selected from a non-empty set  $\Delta$  according to the statistical measure  $\Pi$  using the uniform distribution rules  $U(0, 1)$  from the theory of probability. The output of this step are numbers  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  and for the analysed problem  $n=2$ .



Etap 1. Dokonano wyboru z niepustego zbioru  $\Delta$  w sposób losowy stosownie do miary  $\Pi$ , liczb  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , wykorzystując prawa rozkładu równomiernego  $\mathcal{U}(0, T)$  z teorii prawdopodobieństwa. W wyniku tego etapu modelowania otrzymano liczby  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , przy czym w zadaniu przyjęto  $n=2$ .

Etap 2. Dokonano wyboru, w sposób analogiczny jak w etapie 1, liczb  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  z niepustego zbioru  $\Lambda$  stosownie do miary  $\Pi$ . W wyniku tego etapu modelowania otrzymano wielkość  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ .

Etap 3. Wyznaczono, odpowiednio dla każdego  $\xi_j$  i  $\xi_i$ , wartości  $g_j(\xi_j)$  i  $g_j(\xi_i)$ ,  $j=1, 2, 3$ ;  $i=1, 2$ .

Etap 4. Założono, że dla dowolnego  $u$  wartość wielkości  $\bar{N}(u)$  jest liczbą całkowitą, spełniającą warunek  $g_j(\xi(\lambda_n)) \geq u$  dla  $n=1, 2, \dots, N$ ;  $j=1, 2, 3$ .

W analogiczny sposób przyjęto, że wartość wielkości  $\bar{N}(u)$  jest liczbą całkowitą, spełniającą warunek:  $g_j(\xi(\lambda_n)) \geq u$  dla  $n=1, 2, \dots, N$ ;  $j=1, 2, 3$ .

Etap 5. Zgodnie z (15) założono, że maksymalna wartość  $u$  powinna spełniać warunek:

$$Tr(A) = \frac{N(u) + \bar{N}(u)}{2N} \geq \alpha, \quad (17)$$

gdzie  $N$  – oznacza zadaną liczbę wszystkich wyborów.

Etap 6. Powyższa procedura stanowiła podstawę algorytmu wyznaczania największej wartości funkcji celu  $u$ . Do obliczeń funkcji celu wykorzystano metodę Monte Carlo.

## 4. PRZYKŁADY LICZBOWE

Zgodnie z wyżej opisaną procedurą modelowania rozmytego przeprowadzono kilka eksperymentów liczbowych przy założeniu następujących danych:

$$E = 8,16 \cdot 10^4 \text{ MPa}, \sigma_0 = 162 \text{ MPa}, \nu = 0,3, L = 300 \text{ cm}, V^- = 5 \text{ kN}, V^+ = 200 \text{ kN}.$$

W przypadku zmiennej  $V^- \leq u \leq V^+$  przyjęto liczbę kroków równą 5000. Liczba kroków dla górnego i dolnego obszaru przybliżeń wyniosła 200. Liczbę prób w celu wyznaczenia największej wartości, przyjęto na poziomie 500.

### Eksperyment 1

Wartość  $\alpha$  poziomu ufności została ustalona na poziomie  $\alpha = 0,99995$ .

Dolne i górne przybliżenie parametrów  $h$  i  $R$  ustalono przy założeniu:  $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,07 \text{ cm}$ ,  $a_2 = b_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $c_2 = 9,999 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ cm}$ .

Step 2. In the same way as in Step 1 numbers  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  are selected from non-empty set  $\Lambda$  appropriately to the statistical measure  $\Pi$ . This step returns the value of  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ .

Step 3. The values  $g_j(\xi_j)$  and  $g_j(\xi_i)$ ,  $j=1, 2, 3$ ;  $i=1, 2$  are determined for each  $\xi_j$  and each  $\xi_i$  respectively.

Step 4. It is assumed that for any  $u$  the value of parameter  $\bar{N}(u)$  is an integer for which the following equation holds true:  $g_j(\xi(\lambda_n)) \geq u$  for  $n=1, 2, \dots, N$ ;  $j=1, 2, 3$ .

Likewise, it is assumed that the value of parameter  $\bar{N}(u)$  is an integer for which the following equation holds true:  $g_j(\xi(\lambda_n)) \geq u$  for  $n=1, 2, \dots, N$ ;  $j=1, 2, 3$ .

Step 5. According to (15) it is assumed that the following should hold true for the maximum value of  $u$ :

$$Tr(A) = \frac{N(u) + \bar{N}(u)}{2N} \geq \alpha, \quad (17)$$

where  $N$  is the specified number for all selections.

Step 6. The above procedure was used as the basis for defining the algorithm for determination of the maximum value of objective function  $u$ . The objective function calculations were done using the Monte-Carlo method.

## 4. NUMERICAL EXAMPLES

The above-described fuzzy modelling procedure was used to perform a few numerical experiments with the following data:

$$E = 8,16 \cdot 10^4 \text{ MPa}, \sigma_0 = 162 \text{ MPa}, \nu = 0,3, L = 300 \text{ cm}, V^- = 5 \text{ kN}, V^+ = 200 \text{ kN}.$$

For the variable  $V^- \leq u \leq V^+$  the assumed number of steps was 5000. The number of steps for the upper and lower approximations was 200. The sample size to determine the maximum value was assumed at 500.

### Experiment No. 1

Parameter  $\alpha$  of a confidence level was taken at level  $\alpha = 0,99995$ .

The lower and upper approximations of the parameters  $h$  and  $R$  were determined assuming:  $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,07 \text{ cm}$ ,  $a_2 = b_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $c_2 = 9,999 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ cm}$ .

The mean value of force of  $u^* = 71,184 \text{ kN}$  was obtained at the standard deviation of  $\sigma = 41 \text{ kN}$ . The value of standard deviation was calculated as  $\sigma = \sqrt{D}$  where  $D$  is the dispersion.

Wyznaczona wartość średnia siły jest równa  $u^* = 71,184 \text{ kN}$  przy odchyleniu standardowym  $\sigma = 41 \text{ kN}$ . Wartość  $\sigma = \sqrt{D}$ , gdzie:  $D$  – dyspersja.

### Eksperyment 2

W tym eksperymencie nieznacznie zostały zmienione granice obszaru poszukiwania dla parametrów  $h$  i  $R$ . W przypadku dolnego przybliżenia przyjęto:  $a_1 = b_1 = 0,07 \text{ cm}$ ,  $c_1 = 0,06998 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 0,0702 \text{ cm}$ . W przypadku górnego przybliżenia przyjęto:  $a_2 = b_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $c_2 = 9,999 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ cm}$ . Wyznaczona wartość średnia siły jest równa  $u^* = 71,164 \text{ kN}$ . W przypadku założonej liczby 20 prób odchylenie standardowe jest równe 48 kN.

W pierwszym i drugim eksperymencie odchylenie od rozwiązania zadania postawionego w sposób deterministyczny ( $u^* = 71,251 \text{ kN}$ ) wynosiło około 0,1%. W tym przypadku parametry zdeterminowanego rozwiązania zostały przyjęte na poziomie  $h = 0,07 \text{ cm}$  i  $R = 10 \text{ cm}$ .

Na Rys. 1 i 2 przedstawiono ilustracje geometryczne określania dolnego i górnego przybliżenia zbioru zakresu danych wejściowych w przypadku prowadzonych eksperymentów obliczeniowych.

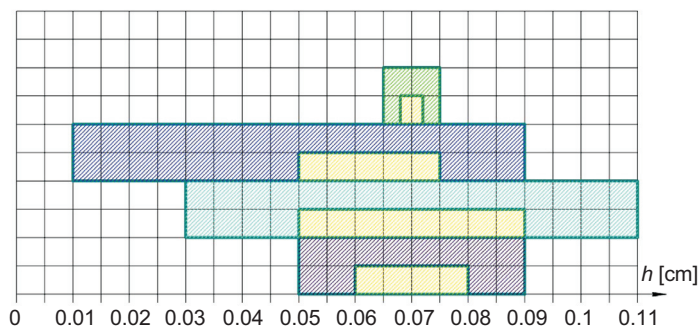


Fig. 2. Graphical representation of the determination of the upper and lower approximations for variable  $h$

Rys. 2. Graficzna ilustracja określania górnego i dolnego przybliżenia w przypadku zmiennej  $h$

### Eksperyment 3

Obszary wyznaczania  $h$  i  $R$  zadano z wykorzystaniem następujących parametrów przybliżeń:

$$c_1 = 0,05 \text{ cm}, a_1 = 0,06 \text{ cm}, b_1 = 0,08 \text{ cm}, d_1 = 0,09 \text{ cm};$$

$$c_2 = 8 \text{ cm}, a_2 = 9 \text{ cm}, b_2 = 11 \text{ cm}, d_2 = 12 \text{ cm}.$$

Wyniki eksperymentu obliczeniowego (numerycznego) przedstawiono w Tabl. 1.

### Experiment No. 2

In the experiment No. 2 the interval limits for parameters  $h$  and  $R$  have been slightly modified. The values adopted for the lower approximation:  $a_1 = b_1 = 0.07 \text{ cm}$ ,  $c_1 = 0.06998 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 0.0702 \text{ cm}$ . The values adopted for the upper approximation:  $a_2 = b_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $c_2 = 9.999 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ cm}$ . This yielded the average force value of  $u^* = 71.164 \text{ kN}$ . For the adopted sample number of 20 the standard deviation is 48 kN.

In both experiments the deviation from the solution of the problem considered in deterministic terms ( $u^* = 71.251 \text{ kN}$ ) was about 0.1%. In that case the parameters of the determinate solution had the values of:  $h = 0.07 \text{ cm}$  and  $R = 10 \text{ cm}$ .

Fig. 1 and Fig. 2 provide geometrical representation of the lower and upper approximations of the input data set as used in the experiments carried out in this study.

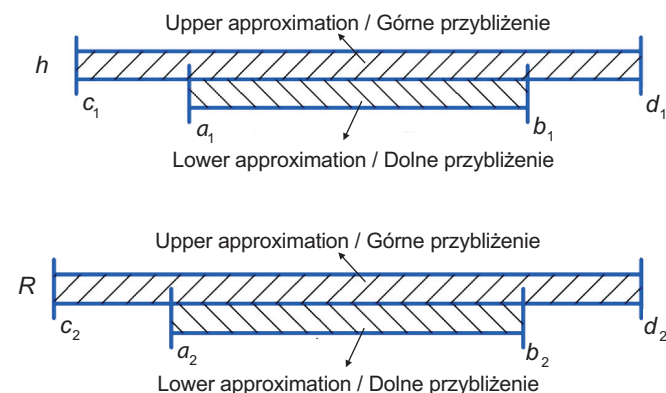


Fig. 1. Example of graphical presentation of the sets of  $h$  and  $R$  quantities

Rys. 1. Przykład przedstawienia w postaci odcinkowej zbioru wielkości  $h$  oraz  $R$

### Experiment No. 3

In the experiment No. 3 the  $h$  and  $R$  interval was specified using the following approximation parameters:

$$c_1 = 0.05 \text{ cm}, a_1 = 0.06 \text{ cm}, b_1 = 0.08 \text{ cm}, d_1 = 0.09 \text{ cm};$$

$$c_2 = 8 \text{ cm}, a_2 = 9 \text{ cm}, b_2 = 11 \text{ cm}, d_2 = 12 \text{ cm}.$$

The results of the computational experiment are presented in Table 1.

### Experiment No. 4

In the experiment No. 4 the  $h$  and  $R$  interval was specified using the following approximation parameters:

$$c_1 = 0.03 \text{ cm}, a_1 = 0.05 \text{ cm}, b_1 = 0.09 \text{ cm}, d_1 = 0.11 \text{ cm};$$

$$c_2 = 4 \text{ cm}, a_2 = 6 \text{ cm}, b_2 = 14 \text{ cm}, d_2 = 16 \text{ cm}.$$

Table 1. Results of the numerical experiment No. 3  
 Tablica 1. Wyniki eksperymentu numerycznego 3

Fuzzy confidence level Rozmyty poziom ufności $\alpha$	The mean force Wartość średnia siły $u^*$ [N]	Standard deviation Odchylenie standardowe $\sigma$ [N]
0.1	86553	538.7
0.3	77256	514.2
0.4	73797	534
0.5	71243	490.8
0.6	68420	322
0.7	65902	200.4
0.8	62510.2	341.6
0.9	58658	456
0.95	54794	335.6
0.98	50605	316.8
1	44997	489

#### Eksperyment 4

Obszary wyznaczania  $h$  i  $R$  określono następującymi parametrami przybliżeń:

$$c_1 = 0,03 \text{ cm}, a_1 = 0,05 \text{ cm}, b_1 = 0,09 \text{ cm}, d_1 = 0,11 \text{ cm};$$

$$c_2 = 4 \text{ cm}, a_2 = 6 \text{ cm}, b_2 = 14 \text{ cm}, d_2 = 16 \text{ cm}.$$

W Tabl. 2 przedstawiono wyniki eksperymentu 4.

#### Eksperyment 5

W tym eksperymencie ustalono obszar poszukiwania  $h$  i  $R$  przy założeniu następujących parametrów przybliżeń:

$$c_1 = 0,01 \text{ cm}, a_1 = 0,06 \text{ cm}, b_1 = 0,08 \text{ cm}, d_1 = 0,09 \text{ cm};$$

$$c_2 = 7 \text{ cm}, a_2 = 9 \text{ cm}, b_2 = 11 \text{ cm}, d_2 = 13 \text{ cm}.$$

Tabl. 3 zawiera zestawienie wyników tego eksperymentu.

#### Eksperyment 6

Zawężono obszar poszukiwania  $h$  i  $R$  przy założeniu następujących parametrów:

$$c_1 = 0,065 \text{ cm}, a_1 = 0,068 \text{ cm}, b_1 = 0,072 \text{ cm}, d_1 = 0,075 \text{ cm};$$

$$c_2 = 9 \text{ cm}, a_2 = 9,5 \text{ cm}, b_2 = 10,5 \text{ cm}, d_2 = 11 \text{ cm}.$$

Wyniki eksperymentu przedstawiono w Tabl. 4.

#### Eksperyment 7

W tym eksperymencie w celu określenia  $h$  i  $R$  ustalono następujący zakres przybliżeń:

$$c_1 = 0,068 \text{ cm}, a_1 = 0,069 \text{ cm}, b_1 = 0,071 \text{ cm}, d_1 = 0,072 \text{ cm};$$

$$c_2 = 9,8 \text{ cm}, a_2 = 9,9 \text{ cm}, b_2 = 10,1 \text{ cm}, d_2 = 10,2 \text{ cm}.$$

The results of the experiment No. 4 are presented in Table 2.

Table 2. Results of the numerical experiment No. 4  
 Tablica 2. Wyniki eksperymentu numerycznego 4

Fuzzy confidence level Rozmyty poziom ufności $\alpha$	The mean force Wartość średnia siły $u^*$ [N]	Standard deviation Odchylenie standardowe $\sigma$ [N]
0.4	77438	1477
0.5	69598	580.9
0.6	62822	814
0.8	47640	1154
0.9	36770	471.6
0.95	28953	641
1	13396	608

#### Experiment No. 5

In the experiment No. 5 the  $h$  and  $R$  interval was specified using the following approximation parameters:

$$c_1 = 0.01 \text{ cm}, a_1 = 0.06 \text{ cm}, b_1 = 0.08 \text{ cm}, d_1 = 0.09 \text{ cm};$$

$$c_2 = 7 \text{ cm}, a_2 = 9 \text{ cm}, b_2 = 11 \text{ cm}, d_2 = 13 \text{ cm}.$$

The results of the experiment No. 5 are presented in Table 3.

Table 3. Results of the numerical experiment No. 5  
 Tablica 3. Wyniki eksperymentu numerycznego 5

Fuzzy confidence level Rozmyty poziom ufności $\alpha$	The mean force Wartość średnia siły $u^*$ [N]	Standard deviation Odchylenie standardowe $\sigma$ [N]
0.1	88728	342
0.2	79238	319
0.3	74590	359
0.35	73023	359
0.4	71584	327
0.45	70023	319.5
0.5	69323	492
0.6	66993	311.6
0.7	64315	460
0.8	61600	370
0.9	57504	554
0.95	52082	397.5
1	40175	269



Wyniki obliczeń, otrzymane w wyniku eksperymentu 7, przedstawiono w Tabl. 5.

Table 4. Results of the numerical experiment No. 6  
Tablica 4. Wyniki eksperymentu numerycznego 6

Fuzzy confidence level Rozmyty poziom ufności $\alpha$	The mean force Wartość średnia siły $u^*$ [N]	Standard deviation Odchylenie standardowe $\sigma$ [N]
0.1	76338	204
0.2	74268	201
0.3	73234	164
0.4	72130	–
0.45	71643	74
0.5	71204	182
0.6	70256	138
0.7	69199	–
0.8	68132	152
0.9	66518	419
1	61297	675

#### Eksperyment 8

Przy założeniu:  $c_1 = 0,0654$  cm,  $a_1 = 0,0692$  cm,  $b_1 = 0,0706$  cm,  $d_1 = 0,0708$  cm;  $c_2 = 9,95$  cm,  $a_2 = 9,98$  cm,  $b_2 = 10,02$  cm,  $d_2 = 10,05$  cm otrzymano wyniki przedstawione w Tabl. 6

Table 6. Results of the numerical experiment No. 8  
Tablica 6. Wyniki eksperymentu numerycznego 8

Fuzzy confidence level Rozmyty poziom ufności $\alpha$	The mean force Wartość średnia siły $u^*$ [N]	Standard deviation Odchylenie standardowe $\sigma$ [N]
0.1	71675	129
0.3	71427	130
0.4	71262	149
0.5	71111	111
0.7	70789	188
0.9	70650	62
1	70064	105

#### Eksperyment 9

Rozpatrzono obszar, który jest „prawie równy” deterministycznym parametrom przy poziomie ufności  $\alpha = 0,99995$ . Przy tym założono, że  $c_1 = a_1 = b_1 = d_1 = 0,07$  cm,  $c_2 = 9,999$  cm,  $a_2 = 10$  cm,  $b_2 = 10$  cm,  $d_2 = 10$  cm. W wyniku

#### Experiment No. 6

In the experiment No. 6 the  $h$  and  $R$  interval was bounded by the following parameters:

$c_1 = 0.065$  cm,  $a_1 = 0.068$  cm,  $b_1 = 0.072$  cm,  $d_1 = 0.075$  cm;  $c_2 = 9$  cm,  $a_2 = 9.5$  cm,  $b_2 = 10.5$  cm,  $d_2 = 11$  cm.

The results of the experiment No. 6 are presented in Table 4.

#### Experiment No. 7

The following approximation parameters were used in the experiment No. 7:

$c_1 = 0.068$  cm,  $a_1 = 0.069$  cm,  $b_1 = 0.071$  cm,  $d_1 = 0.072$  cm;  $c_2 = 9.8$  cm,  $a_2 = 9.9$  cm,  $b_2 = 10.1$  cm,  $d_2 = 10.2$  cm.

The calculation results are presented in Table 5.

Table 5. Results of the numerical experiment No. 7  
Tablica 5. Wyniki eksperymentu numerycznego 7

Fuzzy confidence level Rozmyty poziom ufności $\alpha$	The mean force Wartość średnia siły $u^*$ [N]	Standard deviation Odchylenie standardowe $\sigma$ [N]
0.1	72564	134
0.2	72008	178
0.4	71435	129
0.45	71252	163
0.5	71204	106
0.6	70895	107
0.7	70612	248
0.8	70166	140
0.9	69814	53
1	68062	431

#### Experiment No. 8

For the approximation parameters of  $c_1 = 0.0654$  cm,  $a_1 = 0.0692$  cm,  $b_1 = 0.0706$  cm,  $d_1 = 0.0708$  cm and  $c_2 = 9.95$  cm,  $a_2 = 9.98$  cm,  $b_2 = 10.02$  cm,  $d_2 = 10.05$  cm the output results are presented in Table 6.

#### Experiment No. 9

The interval considered in the experiment No. 9 is “almost equivalent” to deterministic parameters at the confidence level of  $\alpha = 0.99995$  with the following values:  $c_1 = a_1 = b_1 = d_1 = 0.07$  cm;  $c_2 = 9.999$  cm,  $a_2 = 10$  cm,  $b_2 = 10$  cm,  $d_2 = 10$  cm. The following results were obtained:  $u^* = 71184$  N,  $\sigma = 41$  N (giving 0.094% deviation from the deterministic solution).

obliczeń otrzymano  $u^* = 71184 \text{ N}$ ,  $\sigma = 41 \text{ N}$  (odchylenie od rozwiązania deterministycznego wynosi 0,094%).

#### Eksperyment 10

Rozpatrzono obszar z parametrami przy poziomie ufności  $\alpha = 0,99995$ :  $c_1 = 0,06998 \text{ cm}$ ,  $a_1 = 0,07 \text{ cm}$ ,  $b_1 = 0,07 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 0,0702 \text{ cm}$ ;  $c_2 = 9,999 \text{ cm}$ ,  $a_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $b_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ cm}$ .

Otrzymano wartość  $u^* = 71164 \text{ N}$  oraz  $\sigma = 48 \text{ N}$  (odchylenie od deterministycznego rozwiązania wynosi 0,1%).

Na Rys. 3-5 przedstawiono wyniki zależności maksymalnej siły osiowej od przyjętego poziomu ufności w przypadku kilku przeprowadzonych eksperymentów numerycznych.

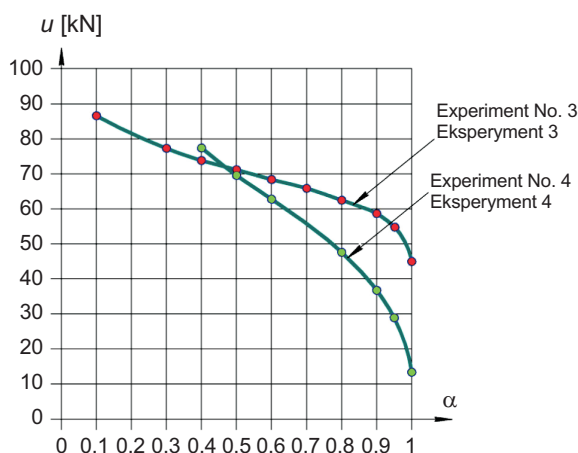


Fig. 3. The graph showing the results of the computational experiments No. 3 and No. 4

Rys. 3. Graficzna ilustracja wyników eksperymentów obliczeniowych 3 i 4

## 5. WNIOSKI

1. W pracy przedstawiono metodę analizy, w której uwzględniono dane w postaci zbiorów rozmytych. Metodę wykorzystano do rozwiązania wybranego zadania mechaniki budowli, obliczeń powłoki cylindrycznej, w którym zbiorem danych rozmytych są wybrane parametry geometryczne (grubość powłoki i promień).
2. Przedstawiony przykład dotyczy optymalizacji zadania wyznaczenia nośności powłoki, z uwzględnieniem warunków ogólnej i miejscowej utraty stateczności i wytrzymałości materiału.
3. Do rozwiązania zadania wykorzystano metody i algorytmy teorii programowania rozmytego. Do budowy modeli programowania rozmytego CCP, przyjęto rozwiązania symulacyjne z wykorzystaniem metody Monte Carlo.

#### Experiment No. 10

The interval considered in the Experiment No. 9 is at the confidence level of  $\alpha = 0.99995$ :  $c_1 = 0.06998 \text{ cm}$ ,  $a_1 = 0.07 \text{ cm}$ ,  $b_1 = 0.07 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 0.0702 \text{ cm}$  and  $c_2 = 9.999 \text{ cm}$ ,  $a_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $b_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ cm}$ .

The following results were obtained:  $u^* = 71164 \text{ N}$  and  $\sigma = 48 \text{ N}$  (giving 0.1% deviation from the deterministic solution).

The graphs in Figs. 3-5 present the relationship between the maximum axial force and the adopted confidence level for the subsequent numerical experiments.

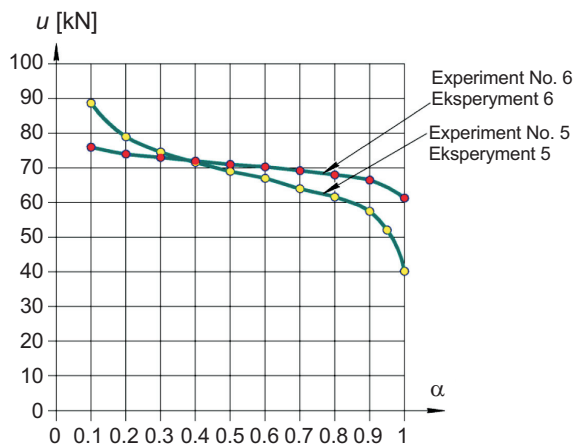


Fig. 4. The graph showing the results of the computational experiments No. 5 and No. 6

Rys. 4. Graficzna ilustracja wyników eksperymentów obliczeniowych 5 i 6

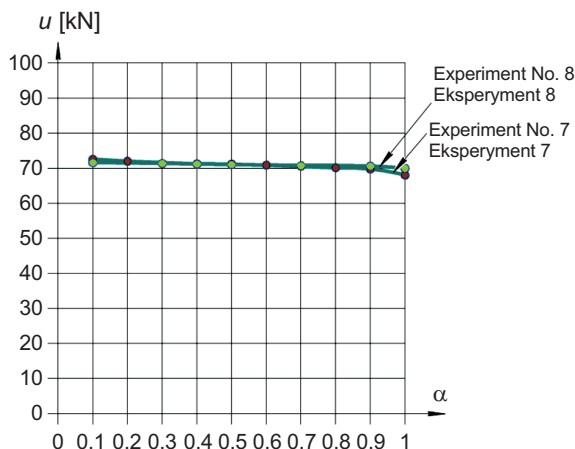


Fig. 4. The graph showing the results of the computational experiments No. 7 and No. 8

Rys. 4. Graficzna ilustracja wyników eksperymentów obliczeniowych 7 i 8

4. Wiarygodność proponowanego podejścia jest ściśle określona. Jak oczekiwano, zwięźlenie zakresu „danych wejściowych” doprowadza do otrzymania wyniku dokładnego (zdeterminowanego).
5. Przedstawiona w pracy analiza ma na celu przybliżenie czytelnikom metod obliczeniowych teorii zbiorów rozmytych, które coraz częściej znajdują zastosowanie przy projektowaniu i ocenie nośności współczesnych konstrukcji mostowych i drogowych w warunkach niepełnych lub zmiennych w czasie danych zadania.

## BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Banichuk N.V., Neittaanmäki P.*: Structural optimization with uncertainty. Springer, 2010
- [2] *Augusti G., Baratta A., Casciati F.*: Probabilistic Methods in Structural Engineering. Chapman and Hall, London New York, 1984
- [3] *Bolotin V.V.*: Statistical Methods in Structural Mechanics. Holden-Day, San Francisco, 1969
- [4] *Ginzburg S.N., Kan S.N.*: About one of the method to choose optimal parameters of thin walled structure. Conference proceedings of the 6th soviet union conference of shells and plats. Science, Moscow, 1970, 271-273
- [5] *Shokin Iu.I.*: Intervalnyj analiz. Sibirskoje otdielenije Izdatielstva “Nauka”, Novosibirsk, 1981
- [6] *Liu B.*: Theory and practice of uncertain programming. Springer-Verlag, Berlin, 2009
- [7] *Liu B.*: Uncertain programming. Wiley, New York, 1999
- [8] *Kolmogorov A.N.*: Osnovnyje poniatija teorii vjerojnostiej. Izdatielstvo “Nauka”, Moskva, 1974

## 5. CONCLUSIONS

1. This paper presents the method of analysis using fuzzy data sets. It has been used for solving a problem from the area of structural mechanics, namely cylindrical shell calculations in which the fuzzy data set includes chosen geometric parameters (shell radius and plate thickness).
2. The example concerns optimization of the problem of the maximum axial force determination in terms of both the global and local loss of stability and the strength of material.
3. The problem was solved using the fuzzy programming methods and algorithms. The chance programming models were built using Monte-Carlo simulations.
4. The reliability of the proposed approach is precisely defined. As expected, narrowing down the input interval produced accurate (determinate) outcome.
5. The analysis has been presented to give the insight into the computing method of the fuzzy sets theory which is becoming an ever more popular tool used in designing new and evaluating existing bridges as well as road structures when incomplete or time-varying input data are taken into account.