IZABELA WÓJCIK-GRZĄBA¹⁾LESŁAW KWAŚNIEWSKI²⁾

VERIFICATION OF THE HEMISPHERICAL FINITE ELEMENT MODEL OF ELASTIC SPACE

WERYFIKACJA MODELU SKOŃCZENIE ELEMENTOWEGO PRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ W KSZTAŁCIE PÓŁKULI

STRESZCZENIE. W pracy przedstawiono proces weryfikacji skończonego elementowego modelu przestrzeni sprężystej. Rozpatrzono model osiowo-symetryczny w kształcie półkuli, zbudowany z jednego rodzaju materiału liniowo-sprężystego, jednorodnego i izotropowego. Do weryfikacji posłużono się rozwiązaniem uogólnionego zadania Boussinesq. Zaproponowany model pozwala na zmniejszenie liczby elementów skończonych, a w konsekwencji skrócenie czasu obliczeń w porównaniu do tradycyjnie stosowanych kształtów modeli. Na jego podstawie można tworzyć modele o większym stopniu skomplikowania i szczegółowości. Wyniki obliczeń porównano z rezultatami otrzymanymi w przypadku modelu walcowego. Zamieszczono podstawowe informacje na temat zastosowania Metody Elementów Skończonych w zagadnieniach modelowania nawierzchni, a także opisano najczęściej stosowane kształty modeli nawierzchni drogowych.

SŁOWA KLUCZOWE: Metoda Elementów Skończonych, nawierzchnia drogowa, weryfikacja, zadanie Boussinesq.

ABSTRACT. The present paper outlines the verification process of the finite element model of elastic space. The axially-symmetrical model in the shape of a hemisphere made of linear-elastic material of one sort, i.e. homogeneous and isotropic, was considered. The solution of the generalised Boussinesq problem was used for verification. The suggested model enables the reduction in number of finite elements and consequently shortens calculating times in comparison to universally implemented shapes of models. It forms the basis for more complicated and comprehensive models. Results of calculations were compared with their equivalents related to the cylindrical model. Basic information on the application of the Finite Element Method (FEM) to issues of pavement modelling were featured. Likewise, commonly applied shapes of pavement models were described.

KEYWORDS: Boussinesq problem, Finite Element Method, flexible pavement, verification.

DOI: 10.7409/rabdim.015.005

¹⁾ Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej; i.wojcik@il.pw.edu.pl (✉)

²⁾ Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej; deceased in 2014 / zmarł w roku 2014

1. WSTĘP

W licznych pracach, np. [1-3] wykazano, że modele nawierzchni o liniowo-sprężystych własnościach materiałowych oraz równomiernie rozłożonym, statycznym obciążeniu, nie oddają w pełni rzeczywistego zachowania konstrukcji. W związku z tym trwają prace badawcze nad stworzeniem modeli numerycznych możliwie dobrze odwzorowujących rzeczywiste cechy konstrukcji nawierzchni i jednocześnie wydajnych pod względem czasu obliczeń oraz wymaganej mocy obliczeniowej. W artykule proponowano model przestrzeni sprężystej o nowym kształcie, dzięki któremu można zredukować liczbę elementów skończonych potrzebną do uzyskania żądanej dokładności rozwiązań.

W praktyce badawczej i inżynierskiej stosuje się głównie dwie metody komputerowe wyznaczania stanu wyężenia nawierzchni drogowych. Pierwsza z nich opiera się o podstawy teorii wielowarstwowej półprzestrzeni sprężystej (oryginalnie: multi-layer elastic theory), natomiast druga to Metoda Elementów Skończonych (MES) [4]. Do pierwszej grupy programów komputerowych należą m.in.: KENLAYER, BISAR, VEROAD. Bazują one na analitycznym rozwiązaniu zadania sprężystego ośrodka wielowarstwowego, podanym w 1962 roku przez Schiffmana [5]. Dodatkowo część programów została uzupełniona o możliwość stosowania obciążeń quasistatycznych [6, 7], a także modeli materiałów nieliniowo-sprężystych lub lepko-sprężystych [6-8]. Programy należące do tej grupy charakteryzują się łatwą obsługą, dużą szybkością obliczeń oraz dość dobrą dokładnością wyników. Są szeroko stosowane w praktyce inżynierskiej jako uzupełnienie metody mechanicznej projektowania nawierzchni. Jednakże ograniczenia dotyczące modeli materiałowych, sposobów obciążenia i warunków brzegowych powodują konieczność wykorzystania MES do bardziej zaawansowanych zastosowań. Przy ich użyciu można stosować różne typy obciążeń i praktycznie dowolne warunki brzegowe i ciągłości. W programach MES ogólnego zastosowania (np. ABAQUS, ANSYS, ADINA, LS-DYNA® [9]) istnieje wiele wbudowanych modeli materiałowych, a w razie potrzeby można stworzyć własny model konstytutywny przez wykorzystanie odpowiedniej procedury użytkownika. Zastosowanie programów MES z jawnym całkowaniem względem czasu umożliwia tworzenie realistycznych, dynamicznych modeli z ruchomym kołem pneumatycznym, oddziałującym na powierzchnię nawierzchni za pośrednictwem efektywnych algorytmów kontaktu [10, 11]. Jednakże złożone modele MES wymagają dużej liczby wprowadzanych danych, długiego czasu obliczeń, a ich tworzenie jest pracochłonne.

1. INTRODUCTION

It has been demonstrated in numerous papers, e.g. [1-3] that pavement models with linear-elastic material characteristics and uniformly distributed static load do not reflect thoroughly the real behaviour of a structure. Consequently, researches into creating numerical models reproducing as truly as possible actual pavement features, but at the same time efficient in respect to the required computing time and power, are carried out. The present paper demonstrates a model of elastic space in the new shape which enables a substantial reduction in number of finite elements necessary for obtaining the required accuracy of solutions.

Basically, two computer-aided methods for determining the effort state of road pavements are used in research and engineering practices. The first of them is grounded on bases of multi-layer elastic theory, while the second one is the Finite Element Method (FEM) [4]. The first group covers i.a. KENLAYER, BISAR and VEROAD. They were set up on the analytical solution of the problem of elastic multi-layered medium, announced by Schiffman [5] in 1962. Additionally, some programmes were supplemented with an option of exercising quasi-static loading [6, 7], along with nonlinear-elastic or viscous-elastic material models [6-8]. The programmes among that group are characterized by easy maintenance, fast calculating speed and rather high accuracy of results. They are widely applied in the engineering practice as a supplement of the mechanistic method for designing pavements. Meanwhile, limitations on material models, loading methods and boundary conditions caused the need for employment of FEM for more advanced applications. Various types of loading and practically freely chosen boundary and continuity conditions can be used at practicing them. There are many material models built into FEM software packages of general applications (e.g. ABAQUS, ANSYS, ADINA, LS-DYNA® [9]). If necessary, one's own constitutive model can be established by means of using an appropriate user's procedure. The application of FEM programmes with explicit time integration makes possible creation of realistic dynamic models with a mobile pneumatic wheel affecting the pavement surface by way of effective contact algorithms [10, 11]. The fact remains that complex FEM models require a large number of entering data, long calculating time, hence creating them is a laborious occupation. The achievement of expected accuracy of results needs establishing many parameters of the model such as the mesh shape and density, selecting the type of finite elements or

Uzyskanie żądanej dokładności wyników wymaga ustalenia wielu parametrów modelu, m.in. kształtu i zagęszczenia siatki, wybrania typu elementów skończonych czy ustalenia minimalnych wymiarów modelu. Wiąże się to z koniecznością wykonania dodatkowych analiz.

W zależności od zastosowania tworzone się modele osiowosymetryczne lub trójwymiarowe. W pierwszym przypadku walcowy wycinek nawierzchni z osią obrotu znajdującą się pod środkiem obciążenia reprezentowany jest przez prostokąt. Stosuje się zagęszczenie siatki w okolicach przyłożenia obciążenia, a także w warstwach nawierzchni o małej grubości. Obowiązuje zasada, że w przypadku jednej warstwy materiałowej należy zastosować przynajmniej cztery warstwy elementów skończonych na grubości. W przypadku modeli trójwymiarowych istnieje możliwość uwzględnienia rzeczywistego kształtu powierzchni obciążenia, można zastosować obciążenie ruchome i obciążenie jednoczesnym naciskiem kilku kół. W tym celu budowane są modele prostopadłościennego o siatce zagęszczonej w podobny sposób jak w modelach osiowosymetrycznych. Pojawia się jednak problem dużej liczby elementów skończonych, co drastycznie zwiększa wymagany czas obliczeń oraz potrzebną moc obliczeniową komputera. Istnieje zatem potrzeba stworzenia modelu o porównywalnej dokładności uzyskanych wyników, ale mniejszej liczbie elementów skończonych. Ten efekt można uzyskać dzięki zastosowaniu proponowanego w niniejszej pracy nowego kształtu wycinka nawierzchni reprezentowanego w modelu MES.

2. WERYFIKACJA MODELU JEDNOWARSTWOWEGO

2.1. UWAGI OGÓLNE

W pracy przyjęto podejście hierarchiczne. Najpierw analizuje się zadania uproszczone, a następnie stopniowo rozpatrywane są zadania bardziej skomplikowane, o większym znaczeniu praktycznym. W pierwszym etapie budowy modelu nawierzchni drogowej poszukiwano optymalnych parametrów wyjściowych modelu uproszczonego, zbudowanego tylko z jednego materiału liniowo-sprężystego. Wprowadzono oryginalny kształt modelu nawierzchni w postaci półkuli. W niniejszej pracy rozważa się jedynie model osiowosymetryczny. Do weryfikacji wyników obliczeń zastosowano znane rozwiązanie zadania półprzestrzeni sprężystej obciążonej na powierzchni, tzw. zadanie Boussinesqa [12]. Rozszerzeniem tego zadania jest przypadek półprzestrzeni sprężystej obciążonej ciśnieniem q równomiernie rozłożonym na powierzchni koła o promieniu a .

fixing minimal model dimensions. It involves the necessity of carrying out additional analyses.

Axially-symmetrical or three-dimensional models are constructed depending on their applications. In the first case, a cylindrical pavement specimen with the rotation axis situated under the loading centre is represented by a rectangle. Higher density of a mesh is applied to areas of load application and to pavement layers of a low thickness. There is a binding principle saying that in case of one material layer, at least four layers of finite elements should be added to the pavement thickness. There is a possibility of taking into account an actual form of loading surface in case of three-dimensional models by means of a mobile load and loading with a simultaneous pressure through a couple of wheels. With the aim of doing that, cuboid-shape models are constructed with mesh concentration similar to axially-symmetrical models. Still, there is a problem of high number of finite elements that radically increases the required calculating time and necessary computing power of the processor. Therefore, there is the need for creating a model with comparable accuracy of achieved results, but with a lower number of finite elements. That aim can be achieved owing to the employment of a pavement specimen in the new shape, represented in the FEM model and proposed in the current paper.

2. VERIFICATION OF THE UNI-LAYER MODEL

2.1. GENERAL REMARKS

A hierarchical approach was adopted in the present paper. At first simplified objectives were analysed, followed by more complex issues of greater practical significance. Accordingly, some optimal starting parameters of a simplified model, developed of only one linear-elastic material, were searched for in the initial stage of creating the model of road pavement. The original shape of the pavement model in the form of a hemisphere was introduced. Thus, the axially-symmetrical model is the only one considered in the present paper. The acknowledged solution of the problem of the elastic half-space with force on surface, so-called Boussinesq problem [12], was used for the verification of calculation results. The case of elastic half-space loaded with pressure q uniformly distributed on the circle surface with a radius of a makes the development of that problem. According to the typical procedure for designing pavement [13] the models under investigation

Zgodnie z typową procedurą projektowania nawierzchni [13] analizowane modele obciążone są na powierzchni siłą wypadkową równą 50 kN, rozłożoną równomiernie na powierzchni koła o promieniu 0,1565 m, które wywołuje ciśnienie o wartości 0,65 MPa. Do analizy wyników stosuje się wykresy wielkości standardowo wykorzystywanych w procesie projektowania lub badania nawierzchni: przemieszczenie pionowe u_y , naprężenie poziome σ_x , odkształcenie poziome ε_x , odkształcenie pionowe ε_y , nazywane dalej wielkościami porównawczymi. Rozpatruje się wszystkie te wielkości ze względu na błędy przybliżeń oraz powstające przy numerycznym obliczaniu pochodnych, a także, aby dostarczyć kompletną informację dotyczącą stanu naprężenia i odkształcenia. W pracy określa się wartość błędu bezwzględnego tych wielkości w odniesieniu do uogólnionego rozwiązania Boussinesq'a. Pojęcie dokładności należy rozumieć jako odwrotność tak zdefiniowanego błędu. W celach porównawczych podano również wartości błędu względnego rozpatrywanych wielkości, liczonego względem rozwiązania Boussinesq'a na górnej powierzchni.

Do obliczeń MES w programie LS-DYNA zbudowano dwa różne modele osiowosymetryczne. Pierwszy z nich ma tradycyjnie stosowany kształt walca (reprezentowany przez prostokąt), drugi ma kształt półkuli (reprezentowany przez ćwiartkę koła). Stworzono również model osiowosymetryczny w kształcie półkuli w programie ABAQUS. Celem badań było uzyskanie jak najmniejszych rozmiarów modelu, nie tracąc na dokładności obliczeń. Sprawdzono wpływ rozmiaru modelu oraz stopnia zagęszczenia siatki elementów skończonych na wartość wielkości porównawczych. We wszystkich rozpatrywanych w pracy przypadkach zastosowano analizę statyczną. Do obliczeń porównawczych przyjęto następujące dane materiałowe (w przypadku materiału sprężystego): moduł sprężystości $E = 100$ MPa, współczynnik Poissona $\nu = 0,35$. Przedstawione w artykule wyniki stanowią kontynuację badań przeprowadzonych przez współautorkę w ramach pracy magisterskiej.

2.2. MODEL WALCOWY

W celach porównawczych wykonano obliczenia z wykorzystaniem osiowosymetrycznego modelu MES w kształcie walca, reprezentowanego przez kwadrat zbudowany z elementów osiowosymetrycznych ze zredukowanym całkowaniem (Rys. 1). Siatka elementów skończonych zagęszczona pod obciążeniem tworzy kwadratowy obszar o wielkości $0,1565 \times 0,1565$ m pokazany na Rys. 2. Poza tym obszarem siatkę stopniowo rozrzedzono w kierunku poziomym i pionowym, zachowując maksymalną zalecaną

are loaded on their surfaces with a resultant force equal to 50 kN, uniformly distributed on the circle surface with a radius of 0.1565 m, which induces pressure valued at 0.65 MPa. The plots of quantities universally applied for designing or testing procedures for pavements i.e. vertical displacement u_y , horizontal stress σ_x , horizontal deformation ε_x , vertical deformation ε_y , later on called comparative quantities, are used for analysing results. All of them are being investigated on account of approximation errors and faults which appear at the numerical calculations of derivatives. Relevant results produce comprehensive information on the states of stress and deformation. Values of the absolute error of those quantities are defined in relation to the generalised Boussinesq problem solution. The notion of accuracy should be comprehended as the converse of so defined error. Due to comparative studies the relative error values of deliberated quantities calculated relatively to the Boussinesq solution on the upper surface were also quoted.

Two different axially-symmetrical models were created for FEM analysis through the programme LS-DYNA. The first of them had the usually applied cylindrical form (represented by a rectangle), while the second one had the hemispherical shape (represented by a quadrant). Additionally, the axially-symmetrical model in the form of a hemisphere was developed through the software package ABAQUS. The investigation was aimed at obtaining the smallest size model, as well as maintaining the accuracy of calculations. The influence of the model size and the density of its finite element mesh on values of comparative quantities was tested. Static analysis was used in all cases discussed in this paper. The following material data were assumed for comparative calculations (in case of an elastic material): the modulus of elasticity $E = 100$ MPa, and the Poisson's ratio $\nu = 0.35$. The results presented in the current paper constitute a continuation of researches carried out by the first author as part of her master's dissertation.

2.2. CYLINDRICAL MODEL

With the aim of doing a comparative study, calculations were carried out with the use of the axially-symmetrical FEM model in the form of a cylinder, represented by a square made of axially-symmetrical elements with a reduced integration (Fig. 1). The finite element mesh, concentrated under load, created the square area of $0.1565 \text{ m} \times 0.1565 \text{ m}$ shown on Fig. 2. Beyond that area the mesh was gradually thinned out in horizontal and vertical directions, but it maintained the required maximal

proporcję pomiędzy długościami krawędzi elementów równą 5:1. Na dolnej (poziomej) oraz na zewnętrznej krawędzi pionowej modelu odebrano wszystkie stopnie swobody. Warunki brzegowe osiowej symetrii są zapewnione automatycznie dzięki zastosowaniu odpowiedniego typu elementów. W celu zbadania wpływu wielkości modelu na wyniki obliczeń rozpatrzono trzy warianty: 5×5 m, 8×8 m, 14×14 m. W przypadku największego modelu rozpatrzono również trzy stopnie zagęszczenia siatki elementów skończonych.

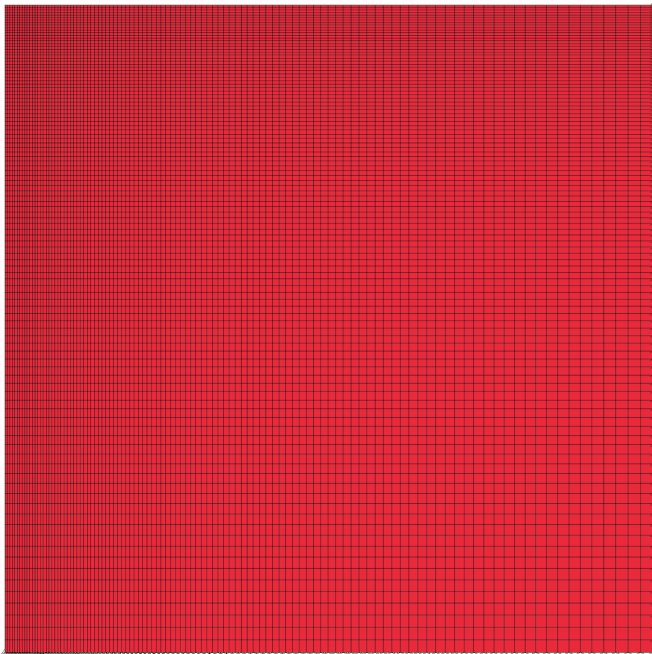


Fig. 1. The general view of the axially-symmetrical cylindrical model

Rys. 1. Widok ogólny modelu osiowosymetrycznego walcowego

Na Rys. 1 pokazano widok najmniejszego modelu walcowego osiowosymetrycznego, a na Rys. 2 fragment tego modelu z zaznaczonym kwadratowym obszarem siatki pod obciążeniem. W Tabl. 1 podsumowano dane i oznaczenia rozpatrywanych modeli. Typ modelu zależy od stopnia zagęszczenia siatki elementów skończonych opisano liczbą elementów skończonych (ES), z jakiej składa się kwadratowy obszar pod obciążeniem.

Na Rys. 3-6 przedstawiono wykresy błędu bezwzględnego wielkości porównawczych w stosunku do rozwiązania Boussinesq w funkcji głębokości. Stwierdzono znaczący wpływ zwiększania wymiarów modelu na dokładność przemieszczenia pionowego. Natomiast w przypadku zagęszczania siatki elementów skończonych na niektórych głębokościach stwierdzono, że nie występuje zbieżność do

ratio between lengths of element edges equal to 5:1. All degrees of freedom on the lower (horizontal) and external (vertical) edges of the model were taken away. The boundary conditions for axial symmetry were automatically provided owing to the application of the appropriate type of elements. Three variants measuring: 5×5 m, 8×8 m and 14×14 m were considered to examine an impact of a model size on results of calculations. Three density degrees of finite element mesh were examined in case of the largest model.

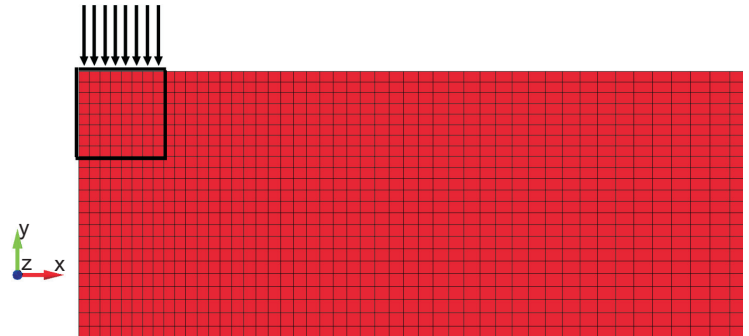


Fig. 2. The fragment of finite element mesh of the cylindrical model near the load area

Rys. 2. Fragment siatki elementów skończonych modelu walcowego w okolicach obciążenia

Fig. 1 depicts the view of the smallest axially-symmetrical cylindrical model, when Fig. 2 shows the fragment of that model with a marked square mesh area under load. The summed up data and marking of the investigated models are presented in Table 1. The model type depending on the density degree of finite element mesh was described with the number of finite elements (FE), creating a square area under load.

Table 1. Cylindrical models comparison
Tablica 1. Zestawienie modeli walcowych

Model	R [m]		
	5	8	14
G1 (8×8 FE/ES)	11664	27225	83521
G2 (16×16 FE/ES)	–	–	332929
G3 (32×32 FE/ES)	–	–	1334025

Fig. 3-6 illustrate graphs of absolute errors of comparative quantities in comparison with the Boussinesq solution as a function of depth. A considerable impact of an increase in model size on the accuracy of vertical displacements was found, while in case of finite element

poprawnego rozwiązania. Ogólnie można jednak stwierdzić, że wszystkie błędy mają wartości znikome i dopuszczalne w praktyce inżynierskiej.

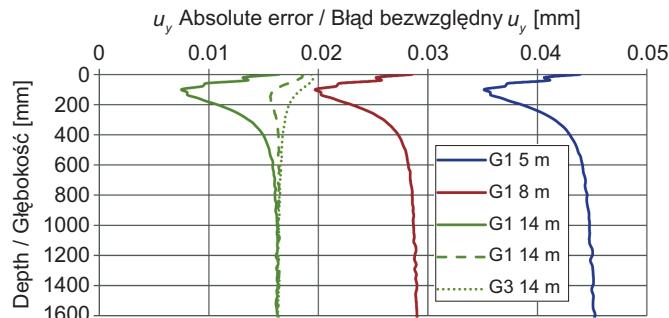


Fig. 3. The absolute error of vertical displacement u_y in cylindrical models

Rys. 3. Błąd bezwzględny przemieszczenia pionowego u_y w modelach walcowych

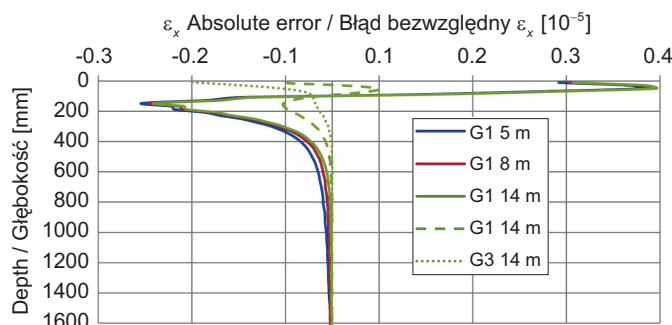


Fig. 5. The absolute error of horizontal deformations ε_x in cylindrical models

Rys. 5. Błąd bezwzględny odkształcenia poziomego ε_x w modelach walcowych

2.3. MODEL W KSZTAŁCIE PÓŁKULI

Zasadnicza część analizy dotyczy osiowosymetrycznego modelu przestrzeni w kształcie półkuli, reprezentowanego przez ćwiartkę koła (Rys. 7). Obliczenia wykonano z wykorzystaniem programu LS-DYNA. Zastosowano ten sam typ elementów skończonych co w poprzednim przykładzie. W pierwszej kolejności wykonano obliczenia przy 5 różnych wartościach promienia półkuli $R = 5; 8; 14; 38; 100$ m. Przyjęto, że obszar regularny siatki bezpośrednio pod obciążeniem jest taki sam jak w przypadku modelu walcowego G1. W węzłach na krawędzi reprezentującej zewnętrzną powierzchnię kulistą modelu odebrano wszystkie stopnie swobody. W analizie wpływu zagęszczenia siatki elementów skończonych na dokładność wyników rozpatrzono trzy stopnie zagęszczenia siatki analogiczne do tych

mesh thickening at some depths no convergence into a correct solution was observed. In general, expressing the issue in a concise way, all errors have insignificant values acceptable in the engineering practice.

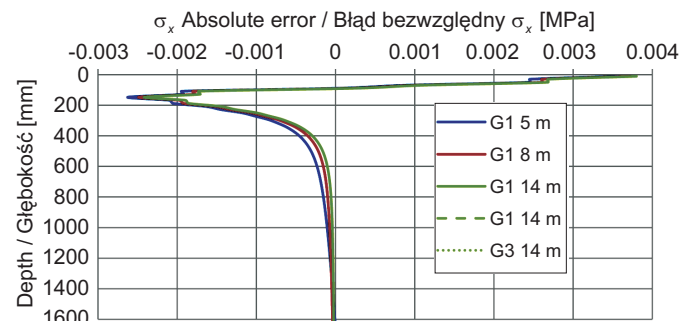


Fig. 4. The absolute error of horizontal stress σ_x in cylindrical models

Rys. 4. Błąd bezwzględny naprężenia poziomego σ_x w modelach walcowych

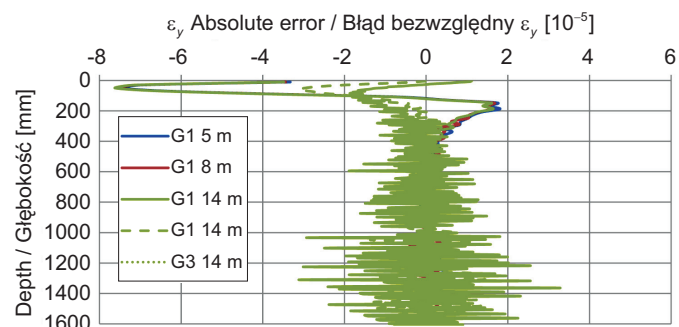


Fig. 6. The absolute error of vertical deformations ε_y in cylindrical models

Rys. 6. Błąd bezwzględny odkształcenia pionowego ε_y w modelach walcowych

2.3. HEMISPHERICAL MODEL

The essential part of the analysis concerns the axially-symmetrical model of space in the hemispherical form, represented by a quadrant (Fig. 7). Calculations were carried out with the use of the software package LS-DYNA. The same type of finite elements as in the previous example was employed. In the first place calculations for 5 different values of the hemispherical radius $R = 5; 8; 14; 38; 100$ m were performed. The regular area of mesh directly under load, the same as in case of the cylindrical model G1, was assumed. All degrees of freedom in nodes on the edge representing the external spherical surface of the model were taken away. Similarly to the case of cylindrical models, three degrees of mesh density

użytych w modelach walcowych. Pod obciążeniem założono kwadratowy fragment złożony z elementów o tych samych wymiarach. Poza tym obszarem wymiary elementów stopniowo powiększają się. Zachowano maksymalny stosunek długości krawędzi elementów skończonych równy 5:1. W Tabl. 2 zestawiono rozpatrywane modele wraz z informacjami o całkowitej liczbie elementów skończonych modelu oraz o stopniu zagęszczenia siatki (wymiarach części regularnej siatki mierzonych w liczbie ES).

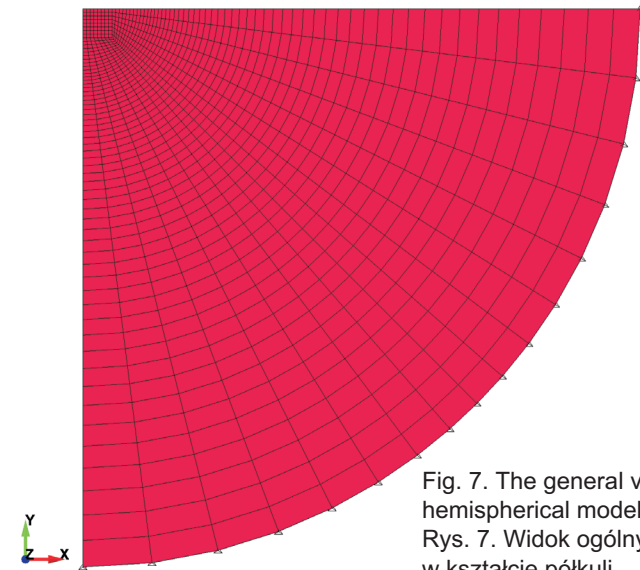


Fig. 7. The general view of the axially-symmetrical hemispherical model
Rys. 7. Widok ogólny modelu osiowosymetrycznego w kształcie półkuli



Fig. 8. The absolute error of vertical displacement u_y in hemispherical models
Rys. 8. Błąd bezwzględny przemieszczenia pionowego u_y w modelach w kształcie półkuli

Na Rys. 8-11 przedstawiono wykresy błędu bezwzględnej wielkości porównawczych w stosunku do rozwiązania Boussinesq'a w funkcji głębokości. Linie różnokolorowe dotyczą różnych wymiarów zewnętrznych modelu, linie zielone – różnego stopnia zagęszczenia siatki elementów skończonych. Podobnie jak w modelu walcowym, na

were investigated in the analysis of influence of finite element mesh density on the accuracy of results. A square fragment composed of elements in the same size was installed under load. Dimensions of elements outside that area were gradually increased. The maximal ratio of edge lengths of finite elements equal 5:1 was kept. Table 2 presents the models under investigation along with information about the total number of finite elements and the mesh density (dimensions of the regular mesh measured as the number of FE).

Table 2. Hemispherical models comparison
Tablica 2. Zestawienie modeli w kształcie półkuli

Model	R [m]				
	5	8	14	38	100
G1 (8 × 8 ES)	1104	1248	1440	1760	2080
G2 (16 × 16 ES)	–	–	5760	–	–
G3 (32 × 32 ES)	–	–	23040	–	–

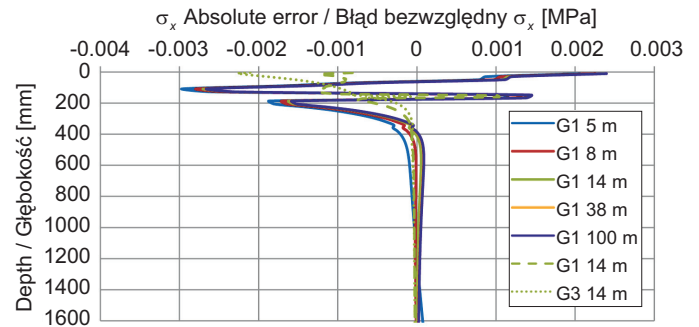


Fig. 9. The absolute error of horizontal stress σ_x in hemispherical models
Rys. 9. Błąd bezwzględny naprężenia poziomego σ_x w modelach w kształcie półkuli

Fig. 8-11 present graphs of absolute errors of comparative values in relation to the Boussinesq solution as a function of depth. Multicoloured lines concern various external dimensions of the model, while green lines relate to finite element meshes of different density. Similarly to the cylindrical model, an increase in size of a model influences

zmniejszenie błędu przemieszczenia pionowego w największym stopniu wpływa zwiększanie rozmiarów modelu. Jeśli chodzi o resztę wielkości porównawczych wpływ ten jest niewielki. Zagęszczanie siatki powoduje zmniejszenie wartości błędów wszystkich rozpatrywanych wielkości. Wyjątkiem jest tu strefa o głębokości nieprzekraczającej wielkości regularnej kwadratowej siatki. W jej zakresie obserwuje się rozbieżność wyników przy zagęszczaniu siatki. Wartości wszystkich błędów są, podobnie jak w modelach walcowych, niewielkie.

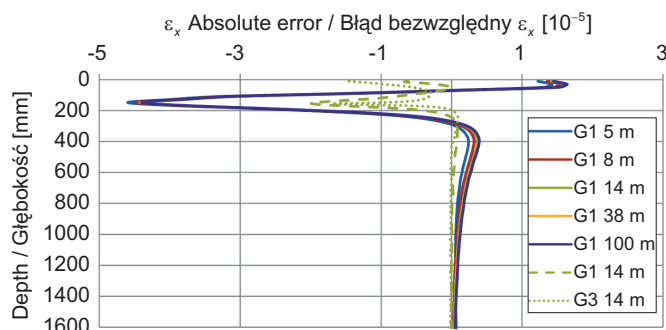


Fig. 10. The absolute error of horizontal deformations ε_x in hemispherical models

Rys. 10. Błąd bezwzględny odkształcenia poziomego ε_x w modelach w kształcie półkuli

2.4. PORÓWNANIE WYNIKÓW UZYSKANYCH W MODELACH O KSZTAŁCIE WALCA I O KSZTAŁCIE PÓŁKULI

Na Rys. 12-15 przedstawiono porównanie błędów bezwzględnych rozpatrywanych wielkości kluczowych w stosunku do rozwiązania Boussinesq w modelach o wymiarze $R = 14$ m i trzech różnych stopniach zagęszczenia siatki elementów skończonych. Na każdym z wykresów porównano wyniki uzyskane w przypadku modelu walcowego (W) i odpowiadającego mu modelu o kształcie półkuli (Pk). W legendzie podano całkowitą liczbę elementów skończonych każdego z rozpatrywanych modeli. Można stwierdzić, że wartości błędów wszystkich rozpatrywanych wielkości są minimalnie mniejsze w przypadku kształtu walcowego. W każdym przypadku jednak liczba elementów skończonych modeli walcowych jest dużo większa niż modeli w kształcie półkuli. W przypadku modeli w kształcie półkuli wyraźnie widać, że miejsce, w którym siatka zmienia kształt z regularnej kwadratowej na rozchodzącą się promieniście wywołuje pewne skoki wartości błędów. Jest to zatem miejsce wymagające dalszego opracowania. Dodatkowo w Tabl. 3 zestawiono wartości błędów względnych

to a large extent the decrease in errors of vertical displacements. As far as the rest of comparative quantities is concerned that impact is slight. The mesh thickening causes reduction of values of all considered quantities except for the zone at a depth not exceeding the size of a regular square mesh. The divergence of results may be noticed when thickening the mesh. Similarly to cylindrical models, the values of all errors are insignificant.



Fig. 11. The absolute error of vertical deformations ε_y in hemispherical models

Rys. 11. Błąd bezwzględny odkształcenia pionowego ε_y w modelach w kształcie półkuli

2.4. COMPARISON OF RESULTS OBTAINED IN CYLINDRICAL AND HEMISPHERICAL MODELS

Fig. 12-15 illustrate resemblance of absolute errors of the considered key values in comparison with the Boussinesq solution in models with dimension $R = 14$ m and three different density degrees of the finite element mesh. Each graph compares results concerning the cylindrical model (C) with corresponding results regarding its hemispherical equivalent (Hs). Total numbers of finite elements of each type of examined models are given in the legend. It can be stated that the values of errors of all examined quantities are minimally lower in case of the cylindrical shape. However, in each case the number of finite elements in cylindrical models is much higher than in hemispherical models. In case of latter ones, it can be easily noticed that the spot where the mesh changes its adjustment from a square regular arrangement to spreading along radial lines, creates some jumps of error values. As a result, a further investigation into that place is appropriate. Additionally, the values of relative errors of all comparative quantities on the surface of elastic medium, and counted relatively to the Boussinesq solution, are presented in Table 3. It is safe to say on the grounds of this

liczonych względem rozwiązania Boussinesq'a wszystkich wielkości porównawczych na powierzchni ośrodka sprężystego. Z tego zestawienia widać, że wartości błędów względnych są niewielkie i akceptowalne w zastosowaniach inżynierskich.

statement that relative errors take on minor values which can be acceptable at engineering applications.

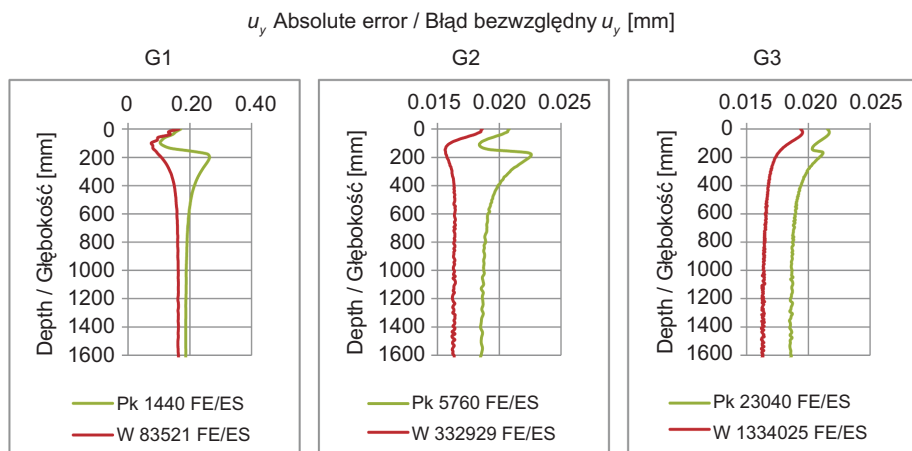


Fig. 12. The comparison of absolute errors of vertical displacement u_y in cylindrical and hemispherical models
Rys. 12. Porównanie błędów bezwzględnych przemieszczenia pionowego u_y w modelach walcowym i w kształcie półkuli

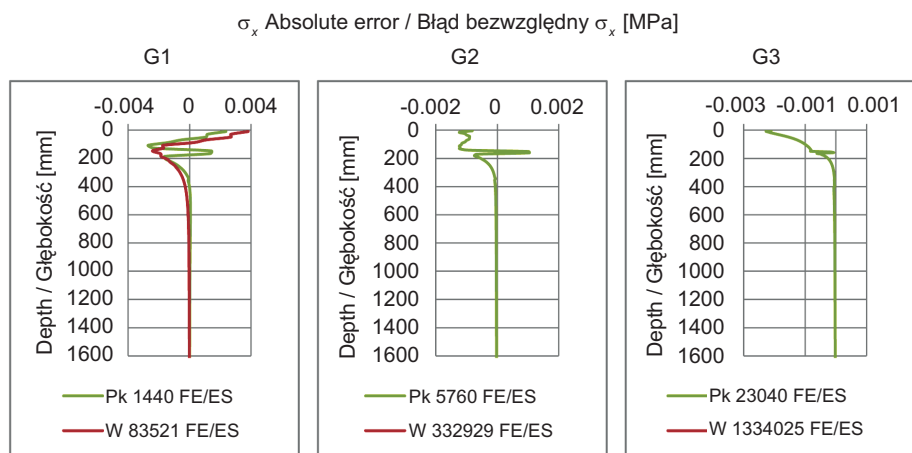


Fig. 13. The comparison of absolute errors of horizontal stress σ_x in cylindrical and hemispherical models
Rys. 13. Porównanie błędów bezwzględnych naprężenia poziomego σ_x w modelach walcowym i w kształcie półkuli

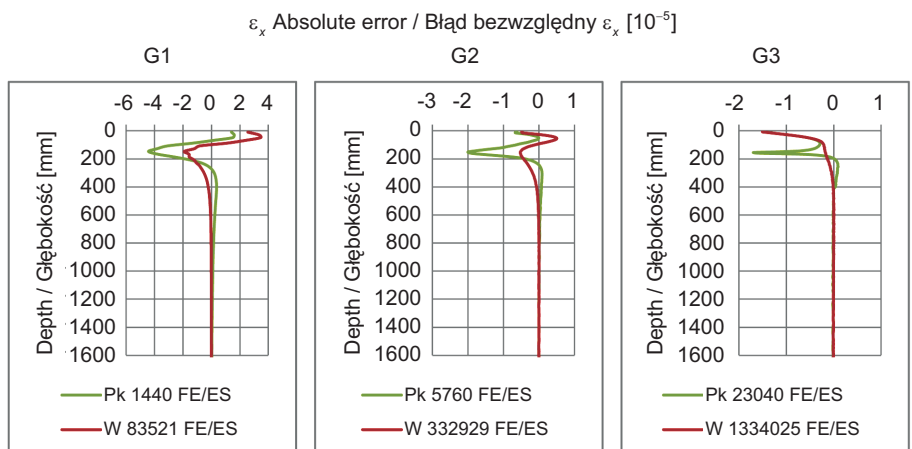


Fig. 14. The comparison of absolute errors of horizontal deformations ε_x in cylindrical and hemispherical models
Rys. 14. Porównanie błędów bezwzględnych odkształcenia poziomego ε_x w modelach walcowym i w kształcie półkuli

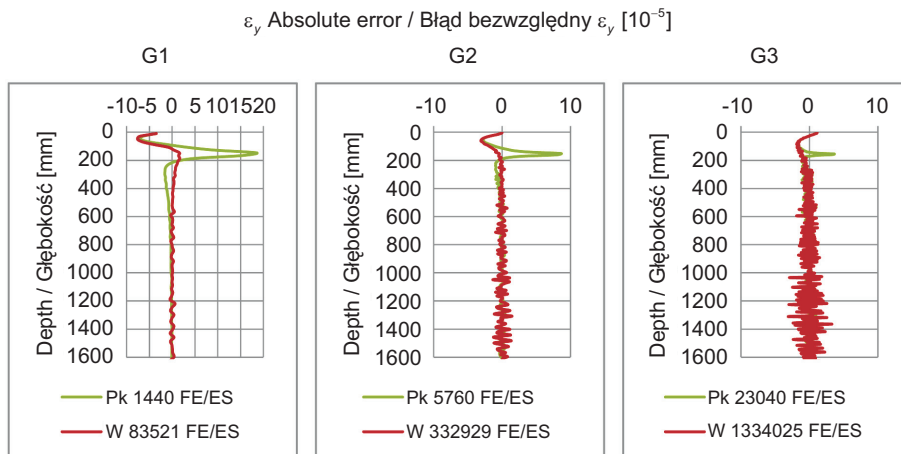


Fig. 15. The comparison of absolute errors of vertical deformations ε_y in cylindrical and hemispherical models
Rys. 15. Porównanie błędów bezwzględnych odkształcenia pionowego ε_y w modelach walcowych i w kształcie półkuli

Table 3. The comparison of relative errors of comparative values in cylindrical and hemispherical models on the upper surface of elastic medium

Tablica 3. Porównanie błędów względnych wielkości porównawczych w modelach walcowym i w kształcie półkuli na górnej powierzchni ośrodka sprężystego

Comparative value Wielkość porównawcza	Relative error on the upper surface / Błąd względny na górnej powierzchni					
	G1		G2		G3	
	Pk	W	Pk	W	Pk	W
u_y	0.010	0.009	0.012	0.010	0.012	0.011
σ_x	0.005	0.008	0.002	0.001	0.004	0.004
ε_x	0.015	0.027	0.005	0.004	0.012	0.012
ε_y	0.012	0.012	0.000	0.000	0.004	0.004

2.5. MODEL OSIOWOSYMETRYCZNY Z ELEMENTAMI NIESKOŃCZONYMI

W następnej części analizy wykorzystano powszechnie stosowane w modelowaniu podłoża tzw. elementy nieskończone dostępne w programie ABAQUS. Zbudowano model osiowosymetryczny w kształcie półkuli reprezentowany w obliczeniach przez ćwiartkę koła wypełnioną elementami osiowosymetrycznymi. Na obwodzie rozmieszczono radialnie elementy nieskończone. Stworzono trzy warianty tego modelu o takich samych wymiarach zewnętrznych $R = 2,7$ m, gdzie R jest współrzędną zaczepienia elementów nieskończonych. Modele różniące się rozkładem i zagęszczeniem siatki elementów skończonych oznaczono jako Inf1, Inf2, Inf3 i pokazano na Rys. 16 wraz z podaniem liczby elementów skończonych.

Na Rys. 17-20 przedstawiono wykresy błędu bezwzględnego wielkości porównawczych w funkcji głębokości. Wartości błędów wyraźnie zmniejszają się wraz z zagęszczeniem siatki elementów skończonych w całym zakresie

2.5. AXIALLY-SYMMETRICAL MODEL WITH INFINITE ELEMENTS

So called infinite elements available through the software package ABAQUS, and widely applied for ground modelling, were used in the subsequent part of analysis. An axially-symmetrical model in the form of a hemisphere, represented in calculations by a quadrant filled with axially-symmetrical elements, was constructed. The infinite elements were spread on the circumference along radial lines. Three variants of that model with the same external dimensions $R = 2.7$ m, with R being an engagement coordinate of infinite elements, were designed. The models differing in distribution and finite elements mesh density, marked as Inf1, Inf2, Inf3, can be seen on Fig. 16 with corresponding numbers of finite elements.

Fig. 17-20 present graphs of absolute errors of comparative values as a function of depth. The values of errors decrease evidently along with thickening of the finite element mesh throughout the whole depth range. Furthermore, the

głębokości. Dodatkowo widać, że przy niewielkich rozmiarach zewnętrznych i niewielkiej liczbie elementów skończonych dokładność wyników jest zadowalająca. Zastosowanie nowego kształtu wycinka nawierzchni wraz z elementami nieskończonymi daje zatem bardzo dobre rezultaty i pozwala zdecydowanie zredukować czas obliczeń.

accuracy of results was satisfactory alongside small sizes of the models and low numbers of finite elements. Consequently, the application of a new form of a pavement specimen with infinite elements offers very satisfying results, enabling considerable reduction of the calculating time.



Fig. 16. The general view of hemispherical infinite element models
Rys. 16. Widok ogólny modeli w kształcie półkuli z elementami nieskończonymi

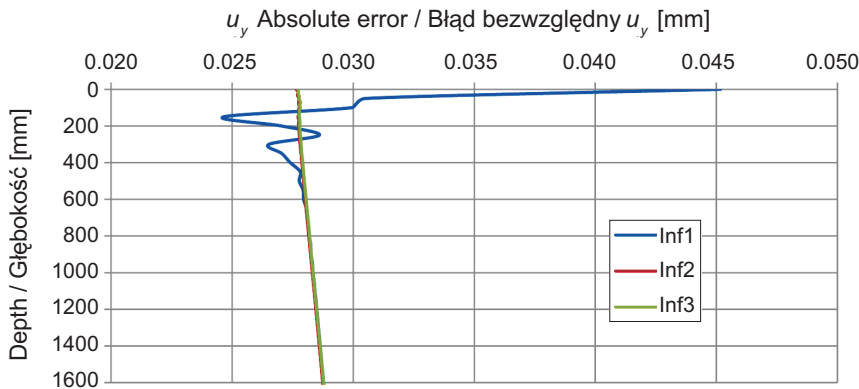


Fig. 17. The absolute error of vertical displacement u_y in infinite element models
Rys. 17. Błąd bezwzględny przemieszczenia pionowego u_y w modelach z elementami nieskończonymi

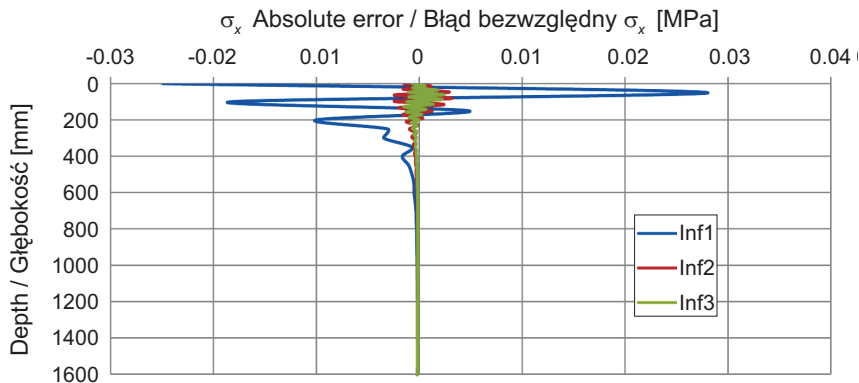


Fig. 18. The absolute error of horizontal stress σ_x in infinite element models
Rys. 18. Błąd bezwzględny naprężenia poziomego σ_x w modelach z elementami nieskończonymi

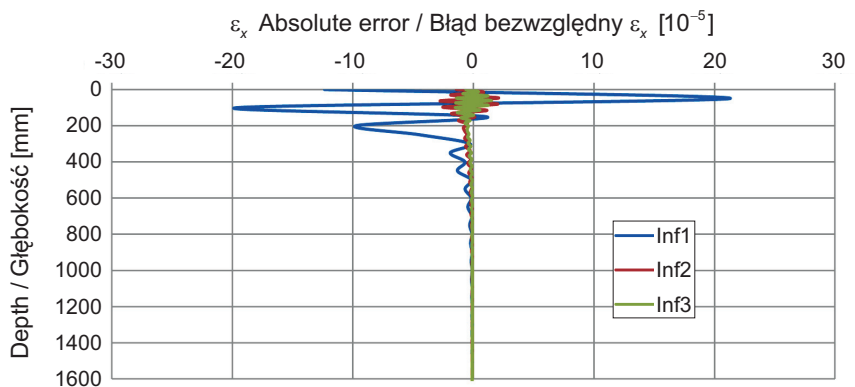


Fig. 19. The absolute error of horizontal deformation ε_x in infinite element models
Rys. 19. Błąd bezwzględny odkształcenia poziomego ε_x w modelach z elementami nieskończonymi

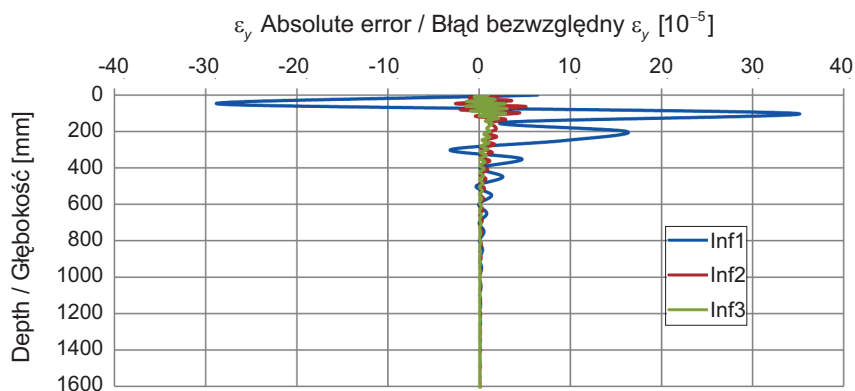


Fig. 20. The absolute error of vertical deformation ε_y in infinite element models
Rys. 20. Błąd bezwzględny odkształcenia pionowego ε_y w modelach z elementami nieskończonymi

3. WNIOSKI

Zaprezentowany w niniejszej pracy nowy model przestrzenny sprężystej w kształcie półkuli pozwala na uzyskanie wymaganej dokładności obliczeń przy znacznym zmniejszeniu liczby elementów skończonych modelu, co bezpośrednio przekłada się na czas obliczeń i wymagane zasoby pamięci komputera. Ze względu na wymagania dotyczące proporcji boków elementów skończonych, tradycyjnie stosowany kształt walcowy wymaga zdecydowanie większej liczby elementów skończonych niż model w kształcie półkuli. Zaobserwowane na wykresach dotyczących modelu w kształcie półkuli skoki wartości w okolicach granicy pomiędzy siatką regularną a rozchodzącą się promieniście wymagają dalszego opracowania tego fragmentu modelu i zastosowania bardziej łagodnego przejścia. Problem ten został wyeliminowany w modelach w kształcie półkuli z elementami nieskończonymi, w których nie stosowano regularnego, kwadratowego fragmentu siatki pod obciążeniem. Zaproponowany zaokrąglony kształt wycinka nawierzchni może być również zastosowany w modelach trójwymiarowych w formie półkuli lub połowy walca, którego oś obrotu stanowiłaby oś jezdni. Każdy z wariantów można również uzupełnić o rzeczywiste warstwy nawierzchni drogowej, dodając je na górze modelu.

3. CONCLUSIONS

The new hemispherical model of elastic space presented in the paper enables achieving the required calculating accuracy combined with a considerable diminishment of the number of finite elements. It translates directly into the calculating time and required power of computer memory. On the grounds of requirements for proportions of finite element sides, the commonly applied cylindrical shape needs definitely higher number of finite elements than the hemispherical model. The jumps of value in the border area between regular and radial meshes observed on the graphs concerning hemispherical models require further elaboration of that model fragment and an application of a smooth passing. That problem was eliminated in hemispherical models with infinite elements without a regular square fragment of a loaded mesh. The suggested rounded shape of pavement specimen could also be applied in three-dimensional hemispherical or half-cylindrical models with the pavement axis making their axes of rotation. Moreover, each of these variants can be supplemented with real layers of a road pavement by adding them on the top of a model.

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Kuo C.M., Chou F.J.*: Development of 3-D finite element model for flexible pavements. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, **27**, 5, 2004, 707-717
- [2] *Chiroux R.C., Foster Jr. W.A., Johnson C.E., Shoop S.A., Raper R.L.*: Three-dimensional finite element analysis of soil interaction with a rigid wheel. *Applied mathematics and computation*, **162**, 2, 2005, 707-722
- [3] *Jemioło S., Szwed A.*: Zagadnienia statyki sprężystych półprzestrzeni warstwowych. Seria: Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności, Tom 2, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2013
- [4] *Kim M.*: Three-dimensional finite element analysis of flexible pavements considering nonlinear pavement foundation behavior. Ph.D Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 2007
- [5] *Schiffman R.L.*: General Solution of Stresses and Displacements in Layered Elastic Systems. International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavement, Proceedings, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1962
- [6] *Huang Y.H.*: Pavement Analysis and Design. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993
- [7] *Hopman P.C.*: VEROAD User Manual Version 2000, the Netherlands, 2000
- [8] *Barker W.R., Gonzales C.R.*: Pavement Design by Elastic Layer Theory. In Proceedings of Airfield Pavement Specialty Conference, Kansas City, MO, 1991
- [9] *Hallquist J.O.*: LS-DYNA Keyword Manual. Livermore: Livermore Software Technology Corporation, 2006
- [10] *Kwaśniewski L.*: Analiza dynamiczna oddziaływania ruchomego kola na pokrywę studni kablowej. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **9**, 1, 2010, 77-98
- [11] *Graczyk M.*: Nośność konstrukcji nawierzchni wielowarstwowych w krajowych warunkach klimatycznych. Seria: Studia i Materiały, IBDiM, Zeszyt 63, Warszawa, 2010
- [12] *Boussinesq J.*: Application des potentials a l'étude de l'équilibre et du Mouvement des Solids Elastiques. Gauthier-Villars, Paris, 1885
- [13] *Pilat J., Radziszewski P.*: Nawierzchnie asfaltowe. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2010