



PRZEMYSŁAW GÓRNAŚ¹⁾
ANDRZEJ POŻARYCKI²⁾

SELECTED PROPERTIES OF FEM NUMERICAL MODELS FOR INVERSE ANALYSIS OF ROAD PAVEMENT STRUCTURES

WYBRANE CECHY NUMERYCZNYCH MODELI MES W ANALIZIE ODWROTNEJ KONSTRUKCJI NAWIERZCHNI JEZDNI

STRESZCZENIE. Biorąc pod uwagę kluczowe parametry modelu nawierzchni jezdni, opartego na metodzie elementów skończonych (MES), takie jak rodzaj, kształt siatki elementów skończonych, warunki brzegowe oraz wymiary modelu nawierzchni, przeprowadzono konfrontację uzyskanych wyników identyfikacji wartości modułów sprężystości z wynikami obliczeń dla modelu, którego równania równowagi statycznej bazują na klasycznej teorii warstw sprężystych spoczywających na półprzestrzeni sprężystej (LET). Podano warunki dla modelu MES, przy których różnica między zidentyfikowanymi wartościami modułów sprężystości względem metody LET jest mniejsza niż 10%. W większości przypadków stwierdzono również, że moduł błędu względnego dla zidentyfikowanych wartości modułów sprężystości oboma metodami zależy od głębokości usytuowania warstwy w modelu.

SŁOWA KLUCZOWE: mechanika nawierzchni, MES, LET, nawierzchnia jezdni, obliczenia odwrotne.

ABSTRACT. Taking into consideration the key parameters of a FEM based pavement model, such as type, shape of mesh of finite elements, boundary conditions and dimensions, the authors compared the obtained values of elastic moduli with the results of calculations based on the classical theory of elastic layers positioned on elastic half-space (LET). The properties FEM model have been described for which the obtained difference between identified values of elastic moduli with respect to LET method is less than 10%. Moreover, in the majority of cases it has been concluded that the module of relative error of the values of elastic moduli identified with both methods depends on the depth of the layer within the model.

KEYWORDS: backcalculations, Finite Element Method (FEM), LET, pavement, pavement mechanics.

DOI: 10.7409/rabdim.014.014

¹⁾ Instytut Inżynierii Lądowej, Politechnika Poznańska; przemyslaw.gornas@put.poznan.pl (✉)

²⁾ Instytut Inżynierii Lądowej, Politechnika Poznańska; andrzej.pozarycki@put.poznan.pl

1. WPROWADZENIE

W szerokim spektrum zagadnień odwrotnych mechaniki (ang. inverse problems) wyodrębnił się obszar, w którym podstawą jest model tzw. systemów wielowarstwowych spoczywających na półprzestrzeni. W Polsce, systematykę tych zagadnień dla modeli nawierzchni jezdni drogowych, najbardziej szczegółowo omówiono w monografii [1], a na świecie zagadnieniom tym poświęcono między innymi prace [2, 3]. Zagadnienia odwrotne związane z modelami nawierzchni często określa się mianem „backcalculation”, a dostępne metody mają w tym zakresie znaczne ograniczenia. Trafnie ujął je autor pracy [4] pisząc, że „The challenge is to develop better analytical tools for pavement deflection data analysis”. Od tego czasu analiza odwrotna nawierzchni jezdni rozwija się intensywnie za sprawą nowych metod, których opis można znaleźć między innymi w publikacjach [5-7].

Formuła analizy odwrotnej modelu nawierzchni jezdni, brana pod uwagę w tej pracy, wiąże przede wszystkim ze sobą trzy elementy: wyniki pomiaru ugięć nawierzchni, algorytm optymalizacyjny i modele mechaniki nawierzchni. Wartości ugięć, które najczęściej wykorzystuje się w procesie analizy odwrotnej nawierzchni, mierzone są na powierzchni jej najwyższej usytuowanej warstwy w przekroju poprzecznym. Dominujące w tym zakresie metody badań in-situ obejmują testy pod obciążeniem: 1) statycznym – belka Benkelmana, 2) dynamicznym – urządzenia typu Falling Weight Deflectometer (FWD), 3) udarowym – Rolling Weight Deflectometer (RWD). Skuteczne działanie algorytmu optymalizacyjnego ma głównie wpływ na czas obliczeń, a przyjęty model zarówno na czas jak i wartości identyfikowanych parametrów.

Przedstawienie zjawisk fizycznych za pomocą modeli matematycznych, za sprawą formułowanych założeń, ma zawsze uproszczony charakter (George E.P. Box “Essentially, all models are wrong, but some are useful”). Najbardziej naturalnym wyborem modelu nawierzchni do analiz odwrotnych, wydaje się model oparty na teorii warstw sprężystych spoczywających na półprzestrzeni sprężystej (ang. *Layers Elastic Theory* model, LET) [1-3, 8]. Wynika to głównie z powodu, że mimo konieczności stosowania rozwiązań numerycznych w odniesieniu do poszczególnych równań całkowych, rozwiązanie zagadnień równowagi statycznej ma ścisły charakter. W specyficznym obszarze budownictwa komunikacyjnego, ważną zaletą metody LET jest mała ilość parametrów podlegających deklaracji na wejściu algorytmu obliczeniowego (trzy wielkości dla każdej warstwy: moduł sprężystości, współczynnik Poissona i grubość).

1. INTRODUCTION

In the broad spectrum of inverse problems in mechanics, a range of problems based on a model of so-called multilayer systems positioned on half-space has emerged. In Poland, the most detailed systematics of the issues regarding road pavement models appeared in the monograph [1]; the papers [2, 3], among others, were devoted to those issues. The inverse issues related to pavement models are often referred to as “backcalculation” and the available methods have considerable limitations in this respect. It was aptly recognized by the author of the publication [4], who wrote “The challenge is to develop better analytical tools for pavement deflection data analysis”. Since that time, the pavement backcalculation analysis has developed by means of methods described e.g. in publications [5-7].

The backcalculation analysis of pavement model discussed in this paper combines, first and foremost, the following three elements: pavement deflection measurement results, an optimization algorithm and models of pavement mechanics. The deflection values, which are most often used in backcalculation analysis of the pavement, are measured on the surface of its top layer in the cross-section. The in-situ test methods, which are dominant in this field of research, include the following load tests: 1) static – Benkelman beam, 2) dynamic – Falling Weight Deflectometer (FWD), and 3) impact – Rolling Weight Deflectometer (RWD). The effectiveness of the optimization algorithm has an effect mainly on the calculation time, and the adopted model affects both time and the identified parameters.

A representation of physical phenomena by means of mathematical models, based on the assumptions used, is always simplified (George E.P. Box “Essentially, all models are wrong, but some are useful”). It seems that the most natural choice of pavement model for the backcalculation analyses is a model based on the theory of elastic layers positioned on elastic half-space (Layers Elastic Theory model, LET model) [1-3, 8]. It stems mainly from the fact that, despite the need for numerical solutions regarding particular integral equations, the solution of static equilibrium problems is of a strict nature. In the specific field of transportation structures, an important advantage of the LET method is a small number of parameters to be declared at the input of the calculation algorithm (three quantities for each layer: elastic modulus, Poisson’s ratio and thickness). All these factors have contributed to the development of this method; among many

Wymienione elementy wpłynęły na rozwój tej metody, a spośród wielu dostępnych aplikacji komputerowych można wymienić: Everseries, MnPave, Noah, BISAR i wiele innych.

Odmianą grupą metod, których wykorzystanie w modelach mechaniki nawierzchni jezdni znacznie poszerza zakres modelowanych właściwości, stanowią modele analityczno-numeryczne lub w całości oparte na obliczeniach numerycznych. Najczęściej stosowane są modele oparte na metodzie elementów skończonych (MES) [9-12]. Podejmowane są też ciekawe próby analitycznej implementacji modeli termolepkosprężystych z uwzględnieniem falowego charakteru przepływu ciepła w ośrodkach warstwowych opisywane w pracach [13-14]. Opis lepkosprężystych własności warstw asfaltowych nawierzchni [15-17] w połączeniu z analizą zagadnień stacjonarnych, quasistacjonarnych czy dynamicznych w kontekście analizy odwrotnej konstrukcji nawierzchni jezdni stanowi wciąż otwarty problem badawczy. Jedną z istotnych wad takiego podejścia jest konieczność uzyskania większej ilości parametrów w porównaniu do modelu LET, przez co zastosowanie ich w praktyce, na chwilę obecną właściwie ogranicza się wyłącznie do jednostek badawczych. Kolejny aspekt, który hamuje dynamikę rozwoju tego segmentu, są zasady przyjmowania parametrów modelu, które w konsekwencji determinują dość złożony proces formułowania warunków brzegowych. Na podstawie dostępnej literatury, dobór nawet samej geometrii, która w przypadku modelu nawierzchni jezdni jest relatywnie prosta, może mieć złożony charakter [18-21]. Natura tych obliczeń powoduje, że w zależności od określonych potrzeb, oczekiwanych na wyjściu algorytmu obliczeniowego, definicja obciążeń, warunków brzegowych czy wspomnianej już geometrii modelu nawierzchni dopuszcza wiele równoważnych wariantów.

2. CEL, METODY I ZAKRES

2.1. UWAGI OGÓLNE

Wraz ze zwiększającą się ilością warstw w modelu, prawdopodobieństwo uzyskania niejednoznacznych wyników identyfikacji wartości ich modułów sprężystości w procesie analizy odwrotnej, znacznie się zwiększa. Zjawisko kompensacji [2], uproszczenia modelu [22], wielomodalność funkcji gęstości prawdopodobieństwa identyfikowanych wartości [23] to tylko wybrane przykłady, które potwierdzają ten pogląd. Zmierzając w kierunku optymalnych wyborów w zakresie kształtowania układu warstw konstrukcyjnych nawierzchni jezdni metoda MES jest rozbudowaną

computer applications one can mention: Everseries, MnPave, Noah, BISAR, and many others.

Another group of methods, which, when used in models of pavement mechanics, greatly expand the range of properties, are analytical and numerical models or models based entirely on numerical calculations. The most common models are based on the finite element method (FEM) [9-12]. There have also been interesting attempts of analytical implementation of thermo-viscoelastic models, including the wave nature of heat flow in layered media, described in papers [13-14]. Description of viscoelastic properties of asphalt pavements [15-17] in conjunction with an analysis of the static, quasi-static or dynamic issues in the context of the backcalculation analysis of the pavement structure is still an open research problem. One of the major drawbacks of such an approach is the need to obtain a greater number of parameters compared to the LET model. In consequence, their use in practice is at the moment limited only to research centers. Another issue hindering the growth dynamics of this segment is the set of rules for adopting model parameters, which, in turn, imply a rather complex process of formulating boundary conditions. Based on the available literature references, even the choice of geometry itself, which in case of pavement models is relatively simple, can be of complex character [18-21]. The nature of these calculations implies that depending on the specific needs expected at the output of calculation algorithm, the definition of loads, the boundary conditions or said geometry of pavement model, there is room for a number of equivalent variants.

2. PURPOSE, METHODS AND SCOPE

2.1. GENERAL REMARKS

Alongside with the increasing number of layers in the model, the probability of obtaining ambiguous identification results of their elastic moduli in the backcalculation analysis process greatly increases. The compensation phenomenon [2], model simplification [22], multimodality of probability density functions of identified values [23] are only certain selected examples that confirm this view. On the road towards optimal choices in shaping the system of structural layers of the road pavement, the FEM method has become a developed alternative compared to the LET method. However, due to the iterative nature of the backcalculation analysis, the process of shaping the FEM model must be flexible. Changes, generated at each iteration step of the backcalculation analysis, concerning

alternatywą w porównaniu do metody LET. Jednak z uwagi na iteracyjny charakter analizy odwrotnej, proces kształtowania modelu MES musi być elastyczny. Zmiany generowane na etapie poszczególnych iteracji analizy odwrotnej, dotyczące rodzaju elementów skończonych, kształtu siatki elementów, warunków brzegowych czy wymiarów modelu, wymuszają na użytkowniku potrzebę wykluczenia błędów wynikających z czysto technicznych aspektów metody MES. Taką możliwość daje ścieżka analiz opisana w pracy. Korzystając ze ścisłych rozwiązań, które towarzyszą metodzie LET można postawić hipotezę, że trudno jest znaleźć taką konfigurację parametrów MES na wejściu, która będzie uniwersalna, a jednocześnie błąd względny między wartościami zidentyfikowanych w analizie odwrotnej modułów sprężystości warstw modelu nawierzchni metodami LET i MES będzie mniejszy niż 10%.

2.2. ANALIZA ODWROTNA

Na ogólną definicję obliczeń odwrotnych składa się przede wszystkim proces identyfikacji parametrów dowolnego modelu fizycznego, który wykorzystuje się do matematycznego opisu zachowania się obiektów rzeczywistych. Zadanie polega na iteracyjnej formule poszukiwania wartości ściśle określonych parametrów modelu, które w konsekwencji gwarantują akceptowaną dokładność aproksymacji dowolnych, ale znanych odpowiedzi modelowanego ośrodka.

W pracy jako podstawowe kryterium oceny jakości analizy odwrotnej, przyjęto zbieżność między odpowiednimi wartościami ugięć, które obliczone zostały zarówno w oparciu o model MES jak i LET. Wynikami obliczeń dla modeli są wartości ugięć w punktach obliczeniowych, zlokalizowanych na powierzchni najwyższej warstwy. Lokalizacja punktów obliczeniowych jest umowna i wynika przede wszystkim z zasad pomiaru ugięć nawierzchni urządzeniem typu FWD. W konsekwencji, oznaczeniu podlega łącznie 7 punktów usytuowanych w odległości od osi obciążenia równej $U = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7) = (0, 30, 60, 90, 120, 150, 180)$ cm. Integralną częścią analizy odwrotnej jest też algorytm optymalizacyjny. W pracy wykorzystano bezgradientową metodę bezpośredniego wyszukiwania znaną jako sympleksowy algorytm Nelder Mead [24].

2.3. ASPEKTY BUDOWY MODELU MES NAWIERZCHNI JEZDNI

Najprostszy schemat geometrii modelu MES (Rys. 1), w zależności od właściwości zastosowanych elementów skończonych, układu siatki elementów, warunków brzegowych i charakteru obliczanych wielkości będzie generował

concerning the type of finite elements, shape of element mesh, boundary conditions or model dimensions, force the user to exclude errors resulting from the purely technical aspects of the FEM method. This possibility is provided within the analysis path described in this paper. With the use of the exact solutions associated with LET method, one can hypothesize that, it is difficult to find such a configuration of FEM model, input parameters that would be universal, while the relative error between the values of the pavement elasticity moduli identified in the backcalculation analysis by means of LET and FEM methods will be less than 10%.

2.2. INVERSE ANALYSIS

A general definition of backcalculation consists primarily of the identification process of parameters in any physical model used for mathematical description of the behavior of real objects. The task consists in developing an iterative formula for searching the values of strictly defined model parameters, which, as a result, provide acceptable approximation accuracy of any known responses of the modeled medium.

In this paper, a similarity between the respective deflection values, calculated using FEM and the LET model, was assumed as the basic criterion for assessing the quality of the backcalculation analysis. The results of calculations for the models are the deflection values in calculation points, located on the surface of the top layer. Location of calculation points is derived mainly from the measurement principles of pavement deflections obtained with the use of FWD-type device. As a result, the deflections are determined at 7 points located at a distance from the load axis equal to $U = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7) = (0, 30, 60, 90, 120, 150, 180)$ cm. An integral part of the backcalculation analysis is also an optimization algorithm. In the paper, the authors used a non-gradient method of direct search known as Nelder Mead simplex algorithm [24].

2.3. CONSTRUCTION ASPECTS OF THE ROAD PAVEMENT FEM MODEL

The simplest FEM model geometry scheme (Fig. 1) will generate a number of equivalent variants depending on the properties of applied finite elements, system of element mesh, boundary conditions and the nature of the calculated quantities. For the LET model, the thickness of the layer positioned at the bottom of cross-section and the dimensions in horizontal projection are infinite. In FEM method,

szereg równoważnych wariantów. W przypadku modelu LET grubość najniższej usytuowanej w przekroju poprzecznym warstwy i wymiary w rzucie poziomym są nieskończone. W metodzie MES, modelowanie takich układów, sprzyja rozwojowi różnych rozwiązań. Najbardziej naturalnym podejściem zamodelowania wymiarów nieskończonych, jest przyjęcie umownie dużych wymiarów modelu nawierzchni (np. w stosunku do powierzchni obciążenia). Nieprecyzyjne użycie pojęcia „duży wymiar” ma swoje szczególne uzasadnienie w metodzie MES. Można bowiem wyróżnić przypadki, gdzie zastosowanie relatywnie małych wymiarów modelu nawierzchni, wystarczy do zachowania pewnej żądanej, umownej dokładności obliczeń. Potwierdzają to liczne prace [18, 19, 25-27], w których z powodzeniem wykorzystano model dwuwymiarowy (Rys. 1), osiowo-symetryczny o wymiarach:

- $R = 20\div 35a, H = 140a$ (dla $a = 0,15$ m, $R = 3,0\div 5,3$ m oraz $H = 21,0$ m),
- $R = 12a, H = 50a$ (dla $a = 0,15$ m, $R = 1,8$ m oraz $H = 7,5$ m),
- $R = 12\div 18a, H = 50a$ (dla $a = 0,15$ m, $R = 1,8\div 2,7$ m oraz $H = 7,5$ m),
- $R = 6,5$ ft, $H = 13$ ft (dla $a = 0,15$ m, $R = 1,98$ m oraz $H = 3,98$ m),
- $R = 30$ in, $H = 25,5$ in (dla $a = 0,15$ m, $R = 0,76$ m oraz $H = 0,65$ m),

gdzie:

R – promień modelu, wymiar w poziomie (model 2D),

H – wysokość modelu, wymiar w kierunku pionowym (model 2D),

a – promień umownej powierzchni obciążenia,

ft – stopa (1 stopa = 0,3048 m),

in – cal (1 cal = 0,0254 m).

modeling of such systems favors the development of different solutions. The most natural approach to modeling infinite dimensions is to arbitrarily adopt large dimensions of pavement model (eg. relative to the load surface). Imprecise use of the term “large dimension” is particularly justified in the FEM method. It is, in fact, possible to distinguish cases in which the use of relatively small dimensions of pavement model is sufficient to maintain the desired conjectural calculation accuracy. This is confirmed by numerous studies [18, 19, 25-27], which successfully used two-dimensional axial-symmetric model (Fig. 1) with the following dimensions:

- $R = 20-35a, H = 140a$ (for $a = 0.15$ m, $R = 3.0-5.3$ m and $H = 21.0$ m),
- $R = 12a, H = 50a$ (for $a = 0.15$ m, $R = 1.8$ m and $H = 7.5$ m),
- $R = 12-18a, H = 50a$ (for $a = 0.15$ m, $R = 1.8-2.7$ m oraz $H = 7.5$ m),
- $R = 6.5$ ft, $H = 13$ ft (for $a = 0.15$ m, $R = 1.98$ m and $H = 3.98$ m),
- $R = 30$ in, $H = 25.5$ in (for $a = 0.15$ m, $R = 0.76$ m oraz $H = 0.65$ m),

where:

R – radius of the model, the horizontal dimension (2D model),

H – height of the model, the vertical dimension (2D model),

a – radius of the contractual loaded area,

ft – foot (1 ft = 0.3048 m), in – inch (1 in = 0.0254 m).

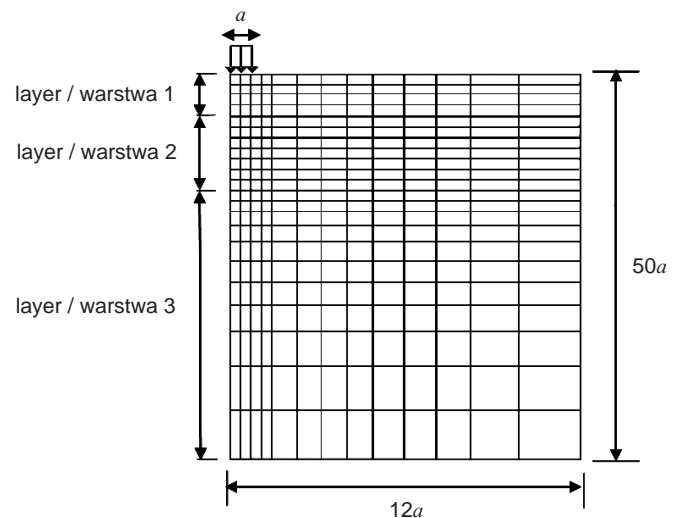


Fig. 1. Example of relation scheme between the dimensions of a 2D pavement model [5]
Rys. 1. Przykładowy schemat relacji między wymiarami modelu 2D nawierzchni jezdni [5]

Próba wykorzystania w analizie odwrotnej modelu MES, z zacytowanymi tu wymiarami w przestrzeni 2D, nie gwarantuje uzyskania zadowalającej zbieżności w procesie identyfikacji wartości modułów sprężystości jego warstw. W zdecydowanej większości przypadków analizowanych w fazie wstępnej (uwzględniającej również wyniki badań ugięć nawierzchni in-situ), wartość błędu zbieżności między wartościami ugięć obliczonych i zmierzonych, przekraczała umowną granicę 10% ($RMSE > 10\%$).

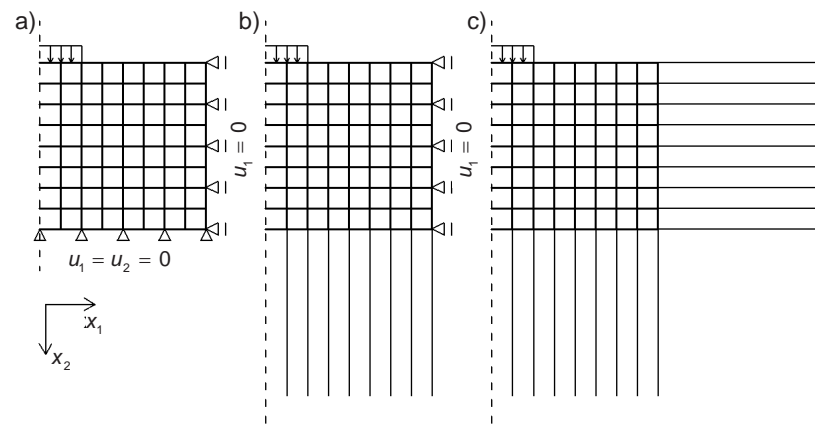
Warto zauważyć, że chcąc określić zbiór optymalnych parametrów modelu, które gwarantowałyby umowną dokładność i minimalny czas obliczeń, należałoby prześledzić wszystkie możliwe kombinacje ich wartości. Takie jednolite ujęcie całego spektrum wariantów wymiarów konstrukcji nawierzchni, doboru własności fizyko-mechanicznych, połączeń międzywarstwowych, doboru rodzaju i kształtu siatki elementów może stanowić część złożonego zadania optymalizacyjnego. Wybrane aspekty tej analizy opisane zostały w kolejnych rozdziałach artykułu.

2.4. ZAKRES ANALIZY

W pracy analizie poddano trzy grupy modeli MES (Rys. 2). Kryterium podziału na grupy ustalono na podstawie klasyfikacji ze względu na zastosowane warunki brzegowe:

- 1) bezpośrednie – uzyskane poprzez odebranie stopni swobody w danych węzłach,
- 2) pośrednie – uzyskane za pośrednictwem tzw. elementów nieskończonych.

W pracy przyjęto zasadę, że opis matematyczny tego typu elementów pozwala je traktować jak warunki brzegowe, które zapewniają stopniowe zanikanie wartości poszczególnych wielkości brzegowych [28].



An attempt to use the FEM model in the backcalculation analysis, with the use of dimensions of the 2D space given above, does not guarantee a satisfactory convergence in the identification process of the elastic moduli of its layers. In the vast majority of cases analyzed in the initial stage (taking also into account the test results of in-situ pavement deflections), the error that defines the convergence between the values of calculated and measured deflections exceeded the conjectural limit of 10% ($RMSE > 10\%$).

It is worth noting that in order to determine the set of optimal model parameters, which would guarantee the minimum conjectural accuracy and minimum calculation time, we should examine all possible combinations of their values. Such a uniform approach to the whole spectrum of dimensional variants of pavement structure, a selection of physical and mechanical properties, interlayer junctions, and a selection of type and shape of the element mesh can be a part of complex optimization task. Chosen aspects of this analysis are described in the subsequent sections of the paper.

2.4. SCOPE OF ANALYSIS

In the paper, three groups of FEM models have been analyzed (Fig. 2). The grouping criterion was based on the classification dependent on the applied boundary conditions:

- 1) direct – obtained by removing the degrees of freedom in particular nodes,
- 2) indirect – obtained through the use of so-called infinite elements.

The paper adopted the principle that the mathematical description of this type of elements allows one to treat them as boundary conditions ensuring the gradual disappearance of the values of individual boundary quantities [28].

Fig. 2. Scheme showing a division into groups with respect to implemented boundary conditions:

a) direct – A, b) mixed – B, c) indirect – C

Rys. 2. Schemat podziału na grupy ze względu na zastosowane warunki brzegowe: a) bezpośrednie – A, b) mieszane – B, c) pośrednie – C

Pod uwagę wzięto wyłącznie modele dwuwymiarowe, osiowo-symetryczne (Rys. 3). Uzasadnieniem tego wyboru jest fakt, że pomimo 2-wymiarowego opisu, model stanowi charakterystykę ośrodka 3-wymiarowego i zapewnia krótszy czas obliczeń w porównaniu do modelu 3D [2].

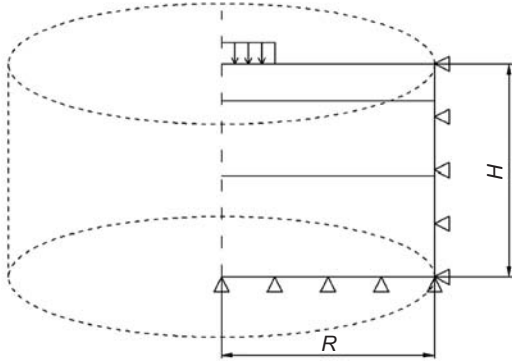


Fig. 3. The idea of axially-symmetric model
Rys. 3. Idea modelu osiowo-symetrycznego

2.5. ŚRODOWISKO IMPLEMENTACJI MODELI LET I MES

Do analiz wykorzystano zintegrowane środowisko programów Matlab i Abaqus. Analityczny model LET nawierzchni jezdni zaimplementowano w postaci skryptu programu Matlab, a do obliczeń modeli numerycznych FEM wykorzystano moduł solwera programu Abaqus. Jest to o tyle istotne, że skuteczne przeprowadzenie obliczeń odwrotnych z poziomu środowiska graficznego Abaqus CAE warto wesprzeć wykorzystaniem plików wsadowych, które w tym systemie zapisuje się w języku programowania Python. W takim przypadku jednokrotne wykonanie obliczeń dla numerycznego modelu nawierzchni jezdni sprowadza się do dwóch kroków: 1) utworzenie pliku wejściowego „Job.inp” w formacie czytelny dla solwera obliczeniowego w systemie Abaqus, 2) uruchomienie solwera. Fragment kodu definicji obciążenia w języku Python zapisanego w przykładowym pliku o nazwie „model.py”, może mieć postać:

```
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
region = a.instances['Part-1-1'].surfaces['LOAD']
mdb.models['Model-1'].Pressure(name='Load-1', createStepName='Step-1', region=region,
→ distributionType=UNIFORM, field='', magnitude=pressure_value, amplitude=UNSET)
```

gdzie:

a – zmienna z definicją struktury modelu o nazwie 'Model-1' w pliku model.py,

region – zmienna z odwołaniem do numerów węzłów modelu, w których przyłożone jest obciążenie,

Only two-dimensional axially-symmetric models (Fig. 3) were taken into account. The reason for this choice is the fact that despite the two-dimensional description, the model represents characteristics of a 3-dimensional medium and provides shorter calculation time compared to 3D model [2].

2.5. IMPLEMENTATION ENVIRONMENT OF LET AND FEM MODELS

The integrated Matlab and Abaqus software environment was used for analyses. Analytical LET model of road pavement was implemented as a Matlab script, and for the calculation of FEM numerical models, the authors used Abaqus solver module. It is essential inasmuch that the successful conduct of backcalculation at the level of the Abaqus CAE graphical environment should be supported by using batch files, which, in this system, are recorded in Python programming language. In this case, a single calculating operation for the numerical model of pavement is reduced to two steps: 1) creation of an input file “Job.inp” in a format readable for the Abaqus calculation solver, 2) start-up of the solver. The code snippet of load definition in Python language, stored in a file named “model.py” can take the following form:

where:

a – variable with definition of the model structure called 'Model-1' in the file model.py,

region – variable with reference to the numbers of model nodes in which the load is applied,

Pressure – zmienna wewnętrzna do przechowywania parametrów obciążenia: *Load-1* – nazwa zmiennej, *Step-1* – krok analizy, w której ma być wykorzystane zdefiniowane obciążenie,

UNIFORM – deklaracja obciążenia równomiernie rozłożonego,

pressure_value – zmienna wartość obciążenia równomiernie rozłożonego,

UNSET – stała amplituda wartości obciążenia.

Z poziomu aplikacji Matlab, do wygenerowania pliku wejściowego o nazwie „Job.inp” na podstawie pliku „model.py” wykorzystuje się komendę: `eval('! abaqus cae noGui=model.py --')`, a do uruchomienia solvera obliczeniowego: `eval(['! abaqus j=results inp=Job int'])`. Do odczytania danych wynikowych zapisywanych w pliku o nazwie np. „results.odb” należy przygotować dodatkowy skrypt w języku Python. Nazywając plik „odbread.py”, deklaruje się ścieżkę dostępu do wartości ugięć na powierzchni górnej modelu. Podobnie jak poprzednio, skrypt można wywołać z poziomu aplikacji Matlab przy użyciu komendy: `eval(['! abaqus python odbread.py results.odb results.txt'])`, która żądane wartości wynikowe zapisuje w pliku tekstowym „results.txt”. Struktura samego pliku „odbread.py” ma postać:

Pressure – internal variable for storing the load parameters: *Load-1* – variable name, *Step-1* – analysis step in which the defined load is to be used,

UNIFORM – declaration of a uniformly distributed load, *pressure_value* – the variable value of uniformly distributed load,

UNSET – constant amplitude of load value.

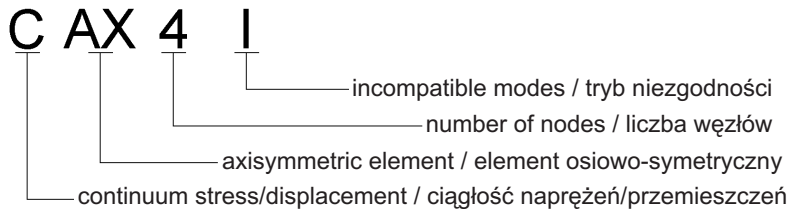
In order to generate an input file named “Job.inp” based on the file “model.py” from the Matlab level, the command: `eval ('! abaqus cae noGui=model.py --')` is used, and the following one is applied to run the calculation solver: `eval(['! abaqus j=results inp=Job int'])`. To read the resulting data stored in the file named, for example, “results.odb”, one needs to prepare an additional script in Python language. By naming the file “odbread.py”, the access path to the deflection values on the top surface of the model is declared. In a manner similar to the one described above, the script can be called forth at the Matlab level using the command: `eval (['! abaqus python odbread.py results.odb results.txt'])`, which stores the desired resulting values in the text file “results.txt”. The structure of the file “odbread.py” takes the following form:

wczytanie 5 modułów aplikacji startowych	<code>import sys from odbAccess import * from abaqusConstants import * from odbMaterial import * from odbSection import *</code>	reading 5 modules of startup applications
przypisanie „results.odb” do zmiennej <i>odbpath</i>	<code>odbpath=sys.argv[1]</code>	assigning “results.odb” to the variable <i>odbpath</i>
przypisanie „results.txt” do zmiennej <i>outpath</i>	<code>outpath=sys.argv[2]</code>	assigning “results.txt” to the variable <i>outpath</i>
załadowanie do pamięci pliku „results.odb”	<code>out = open(outpath, 'w+')</code>	loading the file “results.odb” into memory
podgląd pliku wejściowego „results.odb”	<code>odb = openOdb(path=odbpath)</code>	preview of the file “results.odb”
odwołanie odpowiednio do elementu modelu i jego wybranych węzłów	<code>nSet = odb.rootAssembly.instances ['PART-1-1'].nodeSets['MONIT']</code>	reference to the model element and its selected nodes, respectively
wczytanie ostatnich wyników dla wybranego kroku analizy	<code>elementu modelu i jego wybranych węzłów frame =odb.steps['Step-1'].frames[-1]</code>	reading the latest results for the selected analysis step
wczytanie przemieszczeń i numerów węzłów modelu	<code>dispField = frame.fieldOutputs['U']</code>	reading the displacements and numbers of model nodes
wczytanie przemieszczeń tylko dla wybranych numerów węzłów zapisanych pod zmienną <i>nSet</i>	<code>dispSubField = dispField.getSubset(region=nSet)</code>	reading the displacements only for selected numbers of nodes stored under the variable <i>nSet</i>
wczytanie tylko wartości przemieszczeń	<code>fieldValues = dispSubField.values</code>	reading only the displacement values
zapis wybranych wyników do pliku tekstowego	<code>for v1 in fieldValues: → print >> out, '%21.20e'% (v1.data[1])</code>	saving the selected results to a text file

3. STUDIUM PARAMETRYCZNE MODELU MES NAWIERZCHNI JEZDNI

3.1. CHARAKTERYSTYKA I WYBÓR ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Pierwszym etapem obliczeń wykonywanych przy wykorzystaniu metody elementów skończonych, jest dyskretyzacja [9, 10, 12]. W przypadku modeli nawierzchni jezdni jest to podział warstw konstrukcji nawierzchni na skończoną liczbę elementów. Sposób podziału i rodzaj użytych elementów ma bezpośredni wpływ na uzyskiwane wyniki. Często optymalna definicja ich parametrów jest dużym wyzwaniem. Korzystając z biblioteki gotowych elementów systemu Abaqus, przeprowadzono eksperyment, który pozwala na sformułowanie wytycznych w zakresie wykorzystania czterech różnych elementów skończonych. W ślad za przyjętą nomenklaturą w systemie Abaqus są to algorytmy oznaczone symbolami: CAX3, CAX4, CAX4R, CAX4I (Rys. 4).



3. PARAMETRIC STUDY OF ROAD PAVEMENT FEM MODEL

3.1. CHARACTERISTICS AND SELECTION OF THE FINITE ELEMENTS

The first stage of the calculations performed using the finite element method is a discretization [9, 10, 12]. For road pavement models, it is a division of pavement structure layers into a finite number of elements. The division method and applied type of elements have a direct impact on the obtained results. The optimal definition of their parameters is often a real challenge. Based on Abaqus library of ready elements, a test was performed to allow a guideline formulation regarding four different finite elements. Following the Abaqus nomenclature, the algorithms has been marked with symbols: CAX3, CAX4, CAX4R, CAX4I (explanation shown in Fig. 4).

Fig. 4. Explanation of symbol name for the CAX4I element
Rys. 4. Objaśnienie nazwy symbolu dla elementu CAX4I

Element z trybem niezgodności I, jest rozwiązaniem pośrednim pomiędzy elementami liniowymi (pierwszego rzędu), a elementami nieliniowymi (drugiego rzędu). Tryb niezgodności oznacza, że element posiada dodatkowe stopnie swobody, które są zlokalizowane w jego wnętrzu. W ten sposób eliminowany jest problem sztucznego usztywniania się elementów liniowych pod wpływem naprężeń ścinających i efektu Poissona przy zginaniu. Taki zabieg okazuje się „tańszy” obliczeniowo w stosunku do elementów drugiego rzędu [28]. Natomiast dla elementu z trybem redukcji R, obliczenia wykonuje się dla zredukowanej liczby punktów Gaussa. Skrócony zostaje czas obliczeń, ale przy jednoczesnym pogorszeniu dokładności otrzymywanych wyników [28]. Na potrzeby wyboru rodzaju elementu skończonego, zdefiniowano sześć uproszczonych modeli nawierzchni jezdni. Na Rys. 5 przedstawiono schemat oraz zestawienie z parametrami materiałowymi E i μ analizowanej półprzestrzeni sprężystej.

The element with incompatible mode I is an intermediary solution between the linear elements (of the first order) and nonlinear elements (of the second order). The incompatible mode means that an element has additional degrees of freedom located in its interior. Thus, the problem of artificial stiffening of linear elements under the influence of shearing stresses and Poisson effect while bending is eliminated. This method turns out to be computationally “cheaper” when compared to elements of the second order [28]. However, in case of an element with reduction mode R, the calculations are performed for the reduced number of Gauss points. The calculation time will be reduced, but at the same time the accuracy of the obtained results will become worse [28]. For the purpose of selection of the finite element type, six simplified pavement models were defined. Fig. 5 shows a scheme and a tabulation with material parameters (E and μ) of analyzed elastic half-space.

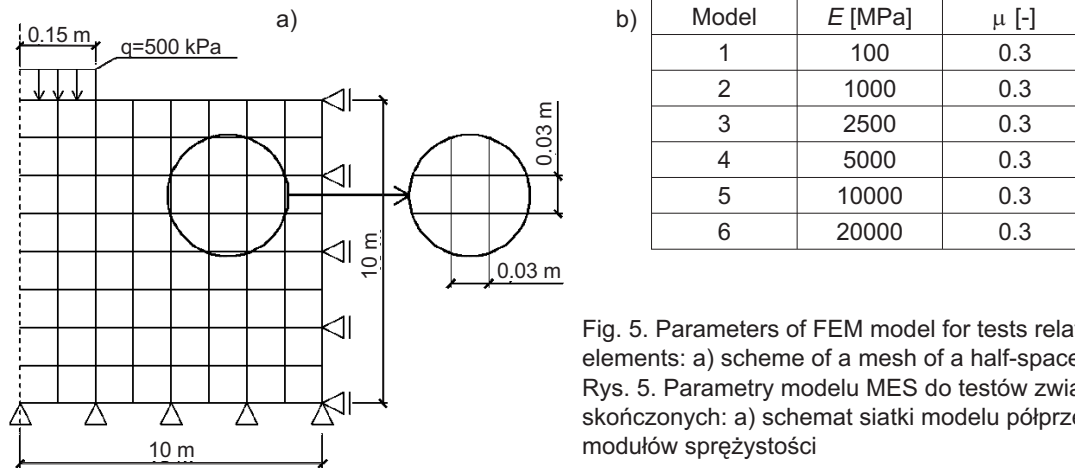


Fig. 5. Parameters of FEM model for tests related to the choice of finite elements: a) scheme of a mesh of a half-space model, b) elastic moduli values
 Rys. 5. Parametry modelu MES do testów związanych z wyborem elementów skończonych: a) schemat siatki modelu półprzestrzeni, b) zakres wartości modułów sprężystości

W przypadku modeli zdefiniowanych na Rys. 5b wykonano obliczenia wartości ugięć i różnicy czasów obliczeń przy wykorzystaniu kolejno wszystkich rozważanych elementów: CAX3, CAX4, CAX4R, CAX4I. Wyniki obliczeń zestawione w Tabl. 1, są stosunkiem wartości ugięć modelu referencyjnego (zbudowanego w oparciu o elementy CAX4) i ugięć modeli, w których wykorzystano pozostałe elementy skończone.

For the models defined in Fig. 5 calculations of deflection values and calculation time differences were made using all considered elements one after another: CAX3, CAX4, CAX4R, CAX4I. The calculation results summarized in Table 1 are the ratio of the deflections of the reference model (developed based on the CAX4 elements) and the deflection models that use other finite elements.

Table 1. Relative values of deflection and calculation time differences for models with different finite elements
 Tablica 1. Względne wartości ugięć i różnicy czasów obliczeń dla modeli z różnymi elementami skończonymi

Model No. Nr modelu	CAX3 / CAX4		CAX4R / CAX4		CAX4I / CAX4	
	w / w_{ref}	$t - t_{ref}$	w / w_{ref}	$t - t_{ref}$	w / w_{ref}	$t - t_{ref}$
	[-]	[s]	[-]	[s]	[-]	[s]
1	0.13	+22.37	0.36	-27.11	0.05	+13.05
2	0.15	+27.52	0.36	-20.35	0.06	+14.61
3	0.15	+22.85	0.35	-26.85	0.06	+10.19
4	0.16	+27.90	0.38	-24.97	0.05	+13.00
5	0.19	+28.03	0.36	-22.87	0.07	+13.00
6	0.04	+34.95	0.36	-18.71	0.06	+19.16

Legend / Legenda :

w - deflection / wartość ugięcia,

w_{ref} - deflection of the model with CAX4 elements (reference model) / wartość ugięcia modelu z elementami CAX4 (modelu referencyjnego),

t - time required to calculate the deflection of a given model / czas obliczeń potrzebny do obliczenia ugięć danego modelu,

t_{ref} - time required to calculate the deflection of the model with CAX4 elements / czas obliczeń potrzebny do obliczenia ugięć modelu z elementami CAX4

Note / Uwaga :

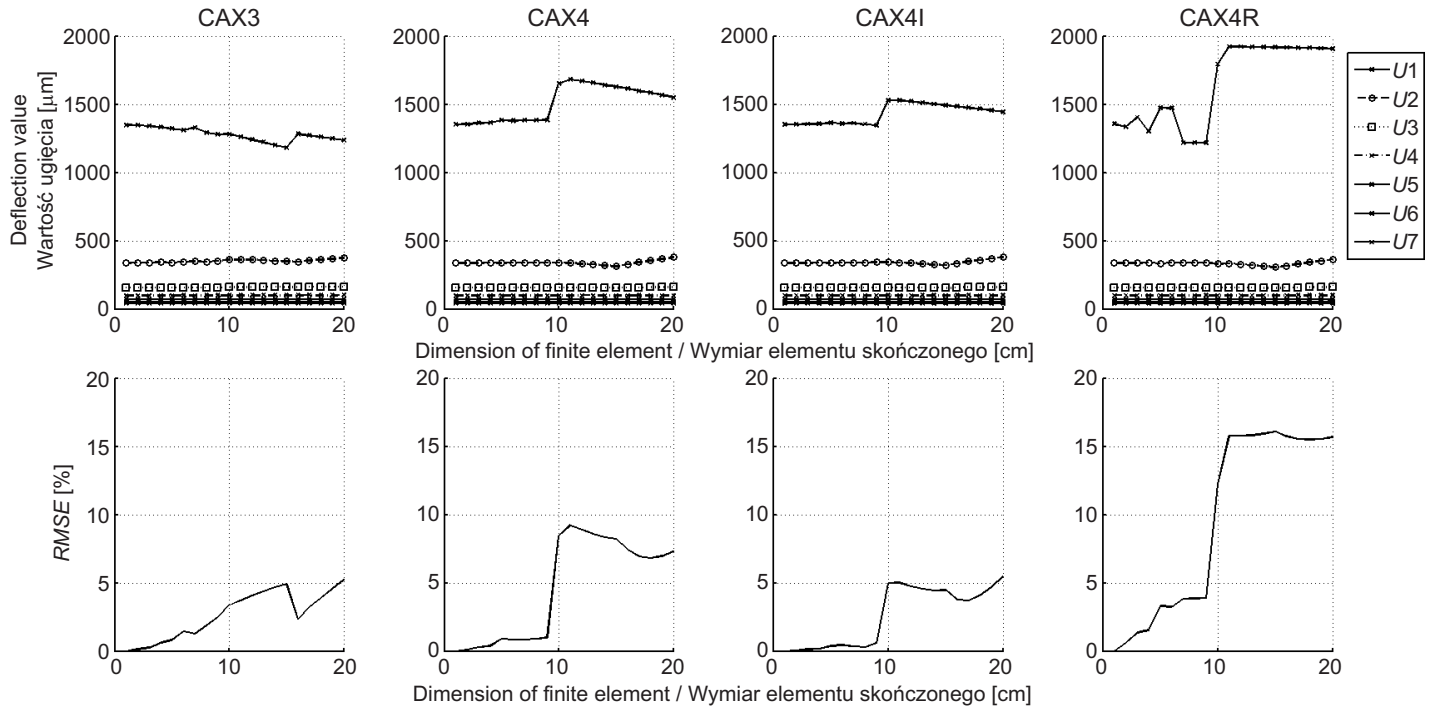
sign “-” next to calculation time means shorter time compared to the calculations for the reference model / znak „-” przy czasach obliczeń, oznacza krótszy czas względem obliczeń dla modelu referencyjnego.

W dalszej kolejności badaniom poddano „rozmiary elementów”. Przyjmując początkowy wymiar pojedynczego oczka kwadratowej siatki równy 1×1 cm, obliczono wartości ugięć. Następnie z krokiem co 1 cm wymiary elementu

Subsequently, the dimensions of the elements were tested. The deflection values were calculated assuming the initial size of a single opening of square mesh equal to 1×1 cm. Next, the dimensions of the element were

zwiększono, aż do granicy równej 20 cm. Na Rys. 6 przedstawiono typowe wyniki obliczeń uzyskane dla modelu nr 1 (Rys. 5). Każda wartość RMSE dla poszczególnych wymiarów elementu skończonego została znormalizowana względem wartości ugięć dla elementu o wymiarach 1×1 cm.

increased by 1cm steps up to the limit of 20 cm. Fig. 6 shows typical calculation results obtained for the model No.1 (Fig. 5). Each RMSE value for the particular finite element dimension has been normalized with respect to the deflection values of an element with dimensions of 1×1 cm.



Rys. 6. Schemes presenting change in deflection values depending on the size of a finite element (for the model No. 1 shown in the Fig. 5)

Rys. 6. Wykresy przedstawiające zmianę wartości ugięć w zależności od wielkości elementu skończonego (dla modelu nr 1 pokazanego na Rys. 5)

Analiza rozmiaru elementów skończonych potwierdza różną wrażliwość modelu na zmianę wymiaru elementów, w zależności od jego rodzaju. Praktycznie element CAX3 może być wykluczony z dalszych analiz. Podobną decyzję można podjąć w odniesieniu do elementu CAX4R, który z punktu widzenia czasu obliczeń jest najlepszy spośród testowanej grupy, jednak wartości uzyskanych błędów w zależności od wymiarów elementów skończonych nie są stabilne w zakresie analizowanych wymiarów. Ustaloną i jednocześnie minimalną wartość błędów *RMSE* uzyskano dla modeli z elementami CAX4I o wymiarach 3×3 cm.

The analysis of the dimension of the finite elements confirms the hypothesis concerning different model sensitivity to change of dimensions of the elements depending on the model's type. Practically, the CAX3 element can be excluded from further analyses. A similar decision may be taken in relation to the CAX4R element, which is the best among the tested group in terms of calculation time, but the values of obtained errors depending on the size of finite elements are not stable in the range of the analyzed dimensions. A steady and, at the same time, minimum value of the *RMSE* error was obtained for models with CAX4I elements with the size of 3×3 cm.

3.2. GEOMETRIA SIATKI ELEMENTÓW

Dopasowanie siatki elementów do kształtu modelu konstrukcji nawierzchni, a więc podział rozważanego ośrodka

3.2. GEOMETRY OF THE ELEMENT MESH

Adjustment of element mesh to the shape of pavement structure model, and thus division of the considered

na elementy skończone ma bezpośredni wpływ na wartości ugięć. W ogólnym przypadku obowiązuje zasada, że stosowanie mniejszych elementów skutkuje otrzymaniem bardziej dokładnych wyników. Jednak większa ilość elementów wiąże się z wydłużeniem czasu obliczeń. W przypadku, gdy w obliczeniach wystarczy pojedyncza iteracja tzw. obliczeń w przód, fakt ten ma mniejsze znaczenie. Jednak w analizie odwrotnej, gdzie ilość iteracji, potrzebnych do uzyskania zbieżnego rozwiązania jest dużo większa niż 1, każde wydłużenie czasu obliczeń w przód zaczyna być znaczące. Optymalizacja tego problemu sprowadza się do poszukiwania takiego podziału, który będzie minimalizował funkcję celu i czas obliczeń. Zgodnie z potrzebą zagęszczania siatki w obszarze koncentracji naprężeń, przeanalizowano koncepcję przedstawioną na Rys. 7. Przyjęto zasadę, że w każdej kolejnej warstwie, wymiary elementu są dwukrotnie większe w porównaniu do wymiarów elementu w warstwie poprzedniej.

Do analizy koncepcji kształtowania siatki elementów skończonych, jako model referencyjny wykorzystano model półprzestrzeni (Rys. 5). Wartości ugięć obliczane były na powierzchni modelu referencyjnego zgodnie z przyjętymi wcześniej założeniami. Uzyskane wyniki obliczeń podlegały konsekwentnie porównaniu z rezultatami uzyskanymi dla modeli 2, 3, 4 i 5-warstwowych, w których zastosowano przyjętą zasadę formowania siatki, a parametry materiałowe wszystkich warstw były takie same. Przykładowe wyniki obliczeń dla jednego z analizowanych wariantów zestawiono w Tabl. 2.

Table 2. Calculation results for determination of rules of shaping grids of finite elements

Tablica 2. Wyniki obliczeń przeznaczone do ustalania zasad kształtowania siatki elementów skończonych

Model	Number of layers Liczba warstw	Relative difference in deflection values Względna różnica wartości ugięć [%]						
		U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
1	2	0.07	0.13	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00
	3	-0.36	0.30	0.12	0.03	0.01	0.00	0.02
	4	-0.55	-0.02	0.29	0.23	0.10	0.04	0.02
	5	-0.64	-0.30	-0.04	0.13	0.24	0.30	0.26

W podsumowaniu wyników eksperymentu można zauważyć, że maksymalna względna różnica między wartościami ugięć dla modelu referencyjnego (modelu półprzestrzeni) i modeli warstwowych z układem siatki elementów skończonych zgodnej ze schematem na Rys. 7, dotyczy wartości

medium into finite elements has a direct impact on the deflection values. As a general rule, the use of smaller elements results in obtaining more accurate results. However, a greater number of elements implies a longer calculation time. When a single iteration of the calculation (so-called forward calculation) is sufficient, this fact is of less importance. However, in the backcalculation analysis, where the number of iterations needed to obtain a convergent solution is much greater than 1, each prolongation of forward calculations becomes significant. Optimization of the problem comes down to searching for a division which will minimize the objective function and calculation time. In the paper, due to the need of grid densification within the stress concentration area, the concept shown in Fig. 7 has been analyzed. It was assumed that, for each subsequent layer, the dimensions of the element are twice as large as the dimensions of the element in the previous layer.

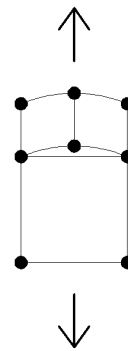


Fig. 7. Mesh in a connection point of two layers
Rys. 7. Siatka w obszarze styku dwóch warstw

For the analysis of the development concept of the finite element mesh, a half-space model was used as the reference model (Fig. 5). The deflection values were calculated on the surface of the reference model according to the assumptions made earlier. The calculation results were subject to constant comparison with the results obtained for 2-, 3-, 4- and 5-layer models, where the adopted principle of grid formation was used and the material parameters of all layers were the same. The exemplary results of calculations for one of the analyzed variants are summarized in Table 2.

The test results show that the maximum relative difference between the deflection values for the reference model (half-space model) and the layered models with finite element mesh system consistent with the scheme in Fig. 7 refers to the deflection values in the load axis (U_1). The largest value is assigned to the model 5-layered model, which means that this adopted solution leads to an error value equal to 0.64%.

ugięć w osi obciążenia (U1). Największa spośród nich przypisana jest do modelu 5-warstwowego co oznacza, że tak przyjęte rozwiązanie prowadzi do wartości błędu 0.64%.

3.3. WARUNKI BRZEGOWE

W analizie warunków brzegowych i konfiguracji schematów statycznych modeli do rozważań wzięto grupy modeli A, B i C (Rys. 2). Sformułowano hipotezę, że istnieje taki układ warunków brzegowych, dla którego wymiary modelu MES, zbudowanego w oparciu o elementy skończone są najmniejsze. Poszukiwane wartości ugięć dla danej konfiguracji schematu statycznego porównywano z wynikami obliczonymi dla modelu LET. Założono, że najlepszy dobór warunków brzegowych odpowiada sytuacji, gdy różnica między wartościami ugięć dla modelu MES i LET, w kolejnych krokach zwiększania wymiarów modelu MES, gwarantowała największą wartość gradientu spadku *RMSE*. Kilkadziesiąt prób obliczeniowych potwierdziło przypuszczenia, że nie istnieje uniwersalna konfiguracja schematu statycznego. To oznacza, że optymalną pod względem dokładności i czasu obliczeń konfigurację warunków brzegowych, determinujących wymiar *H* i *R* modelu, należy wyznaczyć w sposób indywidualny. Dla dalszych obliczeń, brano pod uwagę warunki brzegowe, które schematycznie przedstawiono na Rys. 2.

3.4. WYZNACZANIE OPTYMALNYCH WYMIARÓW *H* I *R* DLA MODELI MES

Celem wyznaczenia możliwych do zaakceptowania pod względem czasu obliczeń i dokładności w porównaniu do LET, wymiarów dla rozważanych grup modeli (Rys. 2), przeprowadzono serię analiz obliczeń w przód, przyjmując pseudolosowe wartości parametrów modeli i schematy statyczne przedstawione na Rys. 2. Dla każdego zestawu wymiarów i parametrów *E* oraz *h*, przyjęto zasadę, że stosunek *H* do *R* jest równy dwa. Zmiany obliczonych średnich wartości *RMSE* można prześledzić na Rys. 8.

W odniesieniu do wszystkich grup modeli A, B, C i analizowanych wariantów, najmniejsze wymiary *H* i *R*, przy założonej umownej wartości granicznej $RMSE \leq 5\%$, otrzymano dla grupy modeli C. W dalszych rozważaniach ograniczono się tylko do tej grupy, zakładając następujące wymiary modelu: $H = 60$ m i $R = 30$ m.

3.3. THE BOUNDARY CONDITIONS

In the analysis of the boundary conditions and configuration of the static model schema, the model groups A, B and C (Fig. 2) were taken into consideration. It has been hypothesized that there is a system of boundary conditions for which the dimensions of the FEM model, built based on the finite elements, are the smallest. The sought deflection values for a given configuration of static scheme were compared with the results calculated for the LET model. It was assumed that the best chosen boundary conditions correspond to the situation in which the difference between the deflection values for the FEM and the LET model, in the subsequent steps of increasing the dimensions of the FEM model, guaranteed the largest value of *RMSE* decrease rate. Dozens of calculating attempts confirmed the hypothesis that there is no universal configuration of the static scheme. It means that the optimum (in terms of accuracy and calculation time) configuration of the boundary conditions determining the *H* and *R* dimensions of the model should be defined on an individual basis. For further calculations, the boundary conditions were taken into account, which is shown schematically in Fig. 2.

3.4. DETERMINATION OF OPTIMUM *H* AND *R* DIMENSIONS FOR FEM MODELS

In order to determine the acceptable dimensions for the above model groups (Fig. 2), in terms of calculation time and accuracy in comparison to the LET, a series of forward calculation analyzes, assuming pseudorandom values of model parameters and static schemes shown in Fig. 2, was conducted. For each set of dimensions and *E* and *h* parameters, the authors adopted a principle that states the ratio of *H* to *R* is equal to two. Changes in the calculated average *RMSE* values can be traced in Fig. 8.

For all groups of A, B and C models and analyzed variants, the smallest *H* and *R* dimensions, at the assumed limit value $RMSE \leq 5\%$ were obtained for a group of C models. Further considerations were limited only to this group, with the assumed following model dimensions: $H = 60$ m and $R = 30$ m.

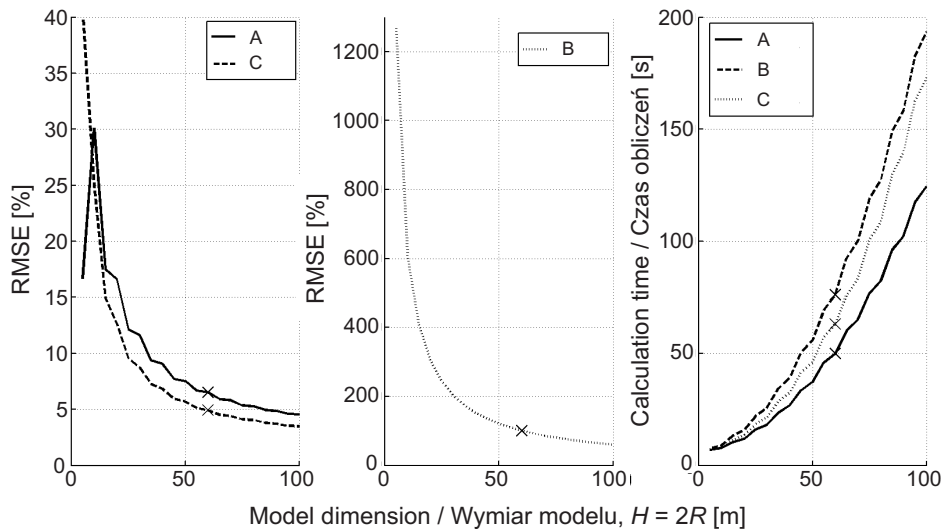


Fig. 8. Calculation results during the process of determination of optimal dimensions of FEM pavement models
Rys. 8. Wyniki obliczeń w procesie ustalania optymalnych wymiarów modeli nawierzchni MES

4. ANALIZA ODWROTNA

4.1. UWAGI OGÓLNE

Finalną weryfikację modelu MES nawierzchni jezdni, przeprowadzono przy wykorzystaniu zadania identyfikacji wartości modułów sprężystości poszczególnych jego warstw. Przyjmując parametry, które były przedmiotem analizy w poprzednich punktach artykułu, obliczenia odwrotne wykonano dla teoretycznej krzywej ugięć i krzywej zbudowanej w oparciu o wartości ugięć z pomiarów in-situ.

4.2. ZASADA NAPRZEMIENNEGO WYKORZYSTANIA MODELI LET I MES - SYMULACJA KOMPUTEROWA

Obliczenia odwrotne zostały wykonane w oparciu o krzywą ugięć, którą zbudowano na bazie wartości obliczonych metodą w przód. Do obliczeń wartości ugięć na powierzchni modelu wykorzystano zarówno model LET jak i MES, przy założeniu wartości parametrów zgodnie z zestawieniem przedstawionym w Tabl. 3. Otrzymane wartości obliczeń zestawiono w Tabl. 4.

Docelowym jednak testem są wyniki identyfikacji wartości modułów sprężystości. Zastosowano tu zasadę naprzemiennego wykorzystania modeli LET i MES. W pierwszej fazie aproksymacją krzywej ugięć z pomiarów były wartości ugięć obliczone metodą LET, a do obliczeń odwrotnych wykorzystano model MES. W fazie drugiej postępowanie było analogiczne, przy czym w porównaniu do fazy pierwszej zamienione zostały role modeli LET i MES. Wyniki tych obliczeń pokazane są w Tabl. 5.

4. INVERSE ANALYSIS

4.1. GENERAL REMARKS

The final verification of the FEM pavement model was carried out using the identification task of the elastic moduli for each of model layers. The backcalculations were made for the theoretical deflection curve and the curve constructed based on the deflection values measured in-situ, by use of the parameters that were subject to analysis in the previous sections.

4.2. THE PRINCIPLE OF ALTERNATING USE OF LET AND FEM MODELS - COMPUTER SIMULATION

The backcalculations were performed based on the deflection curve, which was built according to the values calculated by forward method. To calculate the deflection values on the model surface, both LET and FEM models were used by assuming parameters values in accordance with the summary presented in Table 3. The obtained calculation values are summarized in Table 4.

The target test sample, however, are the identification results of elasticity modulus. The principle of alternating use of LET and FEM models was applied here. In the first phase, the approximation of the deflection curve obtained from measurements was constituted by the deflection values calculated based on the LET method, and the FEM model was used for the backcalculations. In the second phase, the procedure was analogous, whereby, the roles of LET and FEM models have been inversed compared to the first phase. The results of those calculations are shown in Table 5.

Table 3. Adopted model parameters for generation of theoretical shape of deflection curves
 Tablica 3. Założone parametry modeli do wygenerowania teoretycznego kształtu krzywych ugięć

No. Lp.	Moduli of model layers Moduły warstw modelu			Thicknesses of model layers Grubości warstw modelu			Poisson's ratios Współczynnik Poissona	Stress Naprężenie
	$E1$ [MPa]	$E1$ [MPa]	$E1$ [MPa]	$h1$ [m]	$h2$ [m]	$h3$ [m]	ν [-]	q [kPa]
1	1000	500	100	0.10	0.2	∞	0.3	700
2	1000	500	100	0.15	0.3	∞	0.3	700
3	15000	2000	200	0.05	0.1	∞	0.3	700
4	15000	2000	200	0.15	0.3	∞	0.3	700
5	10000	500	100	0.15	0.3	∞	0.3	800
6	5000	10000	80	0.05	0.1	∞	0.3	800
7	5000	10000	80	0.10	0.2	∞	0.3	800
8	5000	10000	80	0.15	0.3	∞	0.3	800

Table 4. Comparison of values of calculated deflections for theoretical models
 Tablica 4. Zestawienie wartości obliczonych ugięć dla modeli teoretycznych

No. Lp.	Calculated deflections values for LET and FEM models, respectively Obliczone wartości ugięć dla modeli odpowiednio LET i FEM [μm]													
	$U1$		$U2$		$U3$		$U4$		$U5$		$U6$		$U7$	
1	644.5	636.4	372.8	369.1	236.8	233.2	163.4	159.7	121.1	117.4	95.5	91.8	78.8	75.1
2	498.4	502.8	302.4	298.0	211.2	207.6	157.9	154.2	122.2	118.6	97.9	94.2	80.8	77.1
3	337.7	335.6	213.1	211.1	122.6	120.8	79.5	77.7	58.0	56.2	45.9	44.1	38.2	36.4
4	194.3	192.1	147.4	145.5	107.0	105.3	79.8	78.0	61.2	59.4	48.5	46.7	39.8	38.0
5	137.2	135.8	111.0	109.2	88.2	86.4	71.5	69.7	58.6	56.8	48.6	46.8	40.9	39.1
6	863.4	858.7	508.2	503.7	274.9	270.9	177.6	173.5	130.8	126.7	104.2	100.1	87.0	82.8
7	348.1	345.0	284.5	280.3	218.1	214.1	169.9	165.9	135.2	131.2	110.0	106.0	91.5	87.5
8	605.2	598.9	488.8	483.4	348.0	342.9	245.3	240.2	178.6	173.5	136.9	131.8	110.5	105.3

Table 5. Identification results of values of elastic moduli for combinations of pavement models based on LET and FEM methods

Tablica 5. Wyniki identyfikacji wartości modułów sprężystości dla kombinacji modeli nawierzchni jezdni bazujących na metodach LET i MES

Deflections curve calculated for the LET, identification in FEM model Krzywa ugięć obliczona dla modelu LET, identyfikacja w modelu MES				Deflections curve calculated for the FEM model, identification in LET model Krzywa ugięć obliczona dla modelu MES, identyfikacja w modelu LET			
Identified values of layers moduli Zidentyfikowane wartości modułów warstw [MPa] ^{*)}			Error Błąd [%]	Identified values of layers moduli Zidentyfikowane wartości modułów warstw [MPa] ^{*)}			Error Błąd [%]
$E1$	$E2$	$E3$	$RMSE$	$E1$	$E2$	$E3$	$RMSE$
1100	489	97	6.15	891	520	103	6.98
1064	518	97	4.63	937	484	103	4.54
16575	2052	194	6.47	14232	1934	206	3.93
15763	2048	193	3.87	15375	1881	207	4.30
9570	549	96	6.47	10614	447	104	7.34
5314	10321	78	4.40	4430	10173	82	6.87
5283	10396	78	4.31	4434	10403	83	7.29
5400	9940	77	5.10	5101	9450	84	4.37
Mean value of error / Średnia wartość błędu			5.18	Mean value of error / Średnia wartość błędu			5.70

^{*)} The real values of elasticity moduli of the layers are placed in Table 3 / Prawdziwe wartości modułów sprężystości warstw umieszczone są w Tabl. 3

Do obliczenia $RMSE$ zestawionych w Tabl. 5, posłużono się wzorem (1), który uwzględnia różnicę wartości założonych i zidentyfikowanych wartości modułów sprężystości:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n_d} \cdot \sum_{i=1} \left(\frac{E_{ci} - E_{mi}}{E_{mi}} \right)^2} \cdot 100\% , \quad (1)$$

gdzie:

E_{ci} – zidentyfikowana wartość modułu dla i -tej warstwy,

E_{mi} – prawdziwa wartość modułu dla i -tej warstwy,

n_d – liczba warstw.

Proces obliczeń odwrotnych uznawano za zakończony, gdy działanie algorytmu optymalizacyjnego (Nelder-Mead) doprowadziło do sytuacji, w której zachodził jeden z warunków: 1) $RMSE < 0,1\%$, 2) maksymalna liczba iteracji jest równa 1000, 3) w kolejnych 10 iteracjach różnica $RMSE_{i+1} - RMSE_i < 0,01\%$.

4.3. OBLICZENIA DLA WARTOŚCI UGIĘĆ Z POMIARÓW IN-SITU

Ostateczną weryfikacją wyznaczonych parametrów modelu numerycznego MES były wyniki obliczeń odwrotnych dla 29 krzywych ugięć uzyskanych w badaniach ugięciomierzem dynamicznym typu FWD na odcinku testowym. Odpowiednio na Rys. 9a przedstawiono schemat układu warstw konstrukcji nawierzchni odcinka testowego, a na Rys. 9b trzy schematy modeli nawierzchni jezdni wykorzystane do obliczeń. Wyniki identyfikacji wartości modułów sprężystości z wykorzystaniem algorytmu optymalizacyjnego Nelder-Mead w konfiguracji z modelami LET i MES zestawiono w Tabl. 6.

W odróżnieniu od wyników obliczeń w poprzednim punkcie pracy, zestawienie w Tabl. 5 dotyczy dziedziny danych eksperymentalnych (analizy odwrotnej wykonanej przy wykorzystaniu wartości ugięć zmierzonych na powierzchni warstwy ścieralnej nawierzchni odcinka testowego). Analiza tych wyników pozwala zauważyć, że: 1) wartości błędów $RMSE$ w przypadku obu metod traktowanych niezależnie nie różnią się znacząco, 2) błędy wyrażające względną różnicę między wartościami modułów sprężystości zidentyfikowanych obiema metodami w sposób niezależny od siebie, oscylują w granicach od 0 ÷ 8%, 3) w większości przypadków wartość modułu błędu względnego dla zidentyfikowanych wartości modułów poszczególnych warstw metodami LET i MES, zależy od ich usytuowania w modelu, przy czym większe wartości błędów uzyskuje się dla warstw modelu opisujących dolne partie konstrukcji nawierzchni.

In order to calculate the $RMSE$ values summarized in Table 5, the formula (1) was used, which takes into account the difference in the assumed and the identified values of elasticity moduli:

where:

E_{ci} – identified module value for the i -th layer,

E_{mi} – the real module value for the i -th layer,

n_d – number of layers.

The backcalculation process was considered complete when the optimization algorithm (Nelder-Mead) led to a situation in which one of the following conditions was satisfied: 1) $RMSE < 0.1\%$, 2) the maximum number of iterations is equal to 1000, 3) the difference $RMSE_{i+1} - RMSE_i < 0.01\%$ in 10 successive iterations.

4.3. CALCULATIONS FOR THE DEFLECTION VALUES FROM IN-SITU MEASUREMENTS

The final verification of the determined parameters of the FEM numerical model were the backcalculation results for 29 deflection curves obtained from measurements carried out using the FWD dynamic deflectometer in the test section. Accordingly, Fig. 9a shows the scheme of layer system of test section pavement structure, and Fig. 9b presents three schemes of pavement models used for calculations. The identification results of the elasticity moduli obtained with the use of Nelder-Mead optimization algorithm in configuration with the LET and FEM models are summarized in Table 6.

In contrast to the calculation results presented in the previous section, the summary in Table 5 relates to the field of experimental data (backcalculation analysis performed using the deflection values measured on the wearing course of the test section pavement). An analysis of these results allows us to notice that: 1) the $RMSE$ error values for both methods treated independently do not differ significantly, 2) errors expressing the relative difference between the values of elasticity moduli identified by both methods independently of each other oscillate in the range of 0 - 8%, 3) in most cases, the module value of the relative error for the identified module values of particular layers by means of the LET and FEM methods depends on its location within the model, while the larger error values are obtained for the model layers representing the lower parts of the pavement structure.

Table 6. Identification results of values of elastic moduli obtained using pavement models based on LET and FEM methods
 Tablica 6. Wyniki identyfikacji wartości modułów sprężystości przy wykorzystaniu modeli nawierzchni jezdni opartych o metody LET i MES

Identification results for 3a model / Wyniki identyfikacji dla modelu 3a												Modulus of relative error for values of moduli identified by LET and FEM methods Moduł błędu względnego dla zidentyfikowanych wartości modułów metodami LET i MES [%]				
Model LET						Model MES						$\Delta E1$	$\Delta E2$	$\Delta E3$	$\Delta E4$	Mean Średnia
No. Lp.	Moduli of layers Moduły warstw [MPa]				Error Błąd [%]	No. Lp.	Moduli of layers Moduły warstw [MPa]				Error Błąd [%]					
	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$RMSE$		$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$RMSE$					
1	11847	131	225	–	1.58	1	11939	132	216	–	1.48	0.78	0.76	4.00	–	1.85
...
29	11391	156	186	–	0.96	29	11388	158	179	–	0.83	0.03	1.28	3.76	–	1.69
												Mean / Średnia				1.99
Identification results for 3b model / Wyniki identyfikacji dla modelu 3b												Modulus of relative error for values of moduli identified by LET and FEM methods Moduł błędu względnego dla zidentyfikowanych wartości modułów metodami LET i MES [%]				
Model LET						Model MES						$\Delta E1$	$\Delta E2$	$\Delta E3$	$\Delta E4$	Mean Średnia
No. Lp.	Moduli of layers Moduły warstw [MPa]				Error Błąd [%]	No. Lp.	Moduli of layers Moduły warstw [MPa]				Error Błąd [%]					
	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$RMSE$		$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$RMSE$					
1	12788	118	220	–	1.96	1	12397	121	211	–	1.83	3.06	2.54	4.09	–	3.23
...
29	11937	150	185	–	1.09	29	11505	155	177	–	0.92	3.62	3.33	4.32	–	3.76
												Mean / Średnia				3.30
Identification results for 4c model / Wyniki identyfikacji dla modelu 4c												Modulus of relative error for values of moduli identified by LET and FEM methods Moduł błędu względnego dla zidentyfikowanych wartości modułów metodami LET i MES [%]				
Model LET						Model MES						$\Delta E1$	$\Delta E2$	$\Delta E3$	$\Delta E4$	Mean Średnia
No. Lp.	Moduli of layers Moduły warstw [MPa]				Error Błąd [%]	No. Lp.	Moduli of layers Moduły warstw [MPa]				Error Błąd [%]					
	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$RMSE$		$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$RMSE$					
1	9770	173	54	250	0.21	1	9649	171	58	236	0.20	1.24	1.16	7.41	5.60	3.27
...
29	10234	186	79	197	0.32	29	10076	187	84	187	0.26	1.54	0.54	6.33	5.08	2.80
												Mean / Średnia				3.43

5. DYSKUSJA I WNIOSKI

Jednym z istotnych elementów wykorzystania modelu MES w analizach odwrotnych jest czas obliczeń. Wykazano, że nawet dla najprostszego modelu nawierzchni (Rys. 6), różnica czasu obliczeń wartości ugięć U , między różnymi rodzajami elementów skończonych dochodzi nawet do 100%. Jednak w ocenie jakości generowanych wyników przy wykorzystaniu modeli MES jeden czynnik nie może determinować ostatecznego wyboru właściwej konfiguracji. Potwierdza to między innymi studium geometrii siatki elementów

5. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

One of the essential issues while using the FEM model in backcalculation analyses is calculation time. It has been shown that even for the simplest pavement model (Fig. 6), the difference of calculation time of deflection values U between different types of finite elements reaches up to 100%. However, in assessing the quality of the generated results obtained from the FEM models, a single factor cannot determine the final choice of the correct configuration. This is confirmed, among others, by the study of geometry

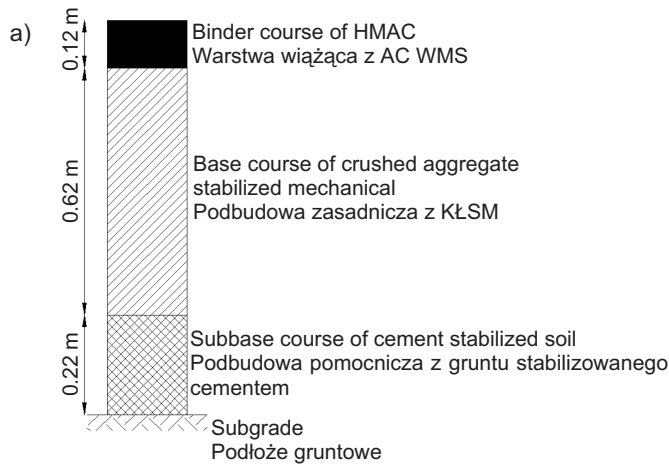
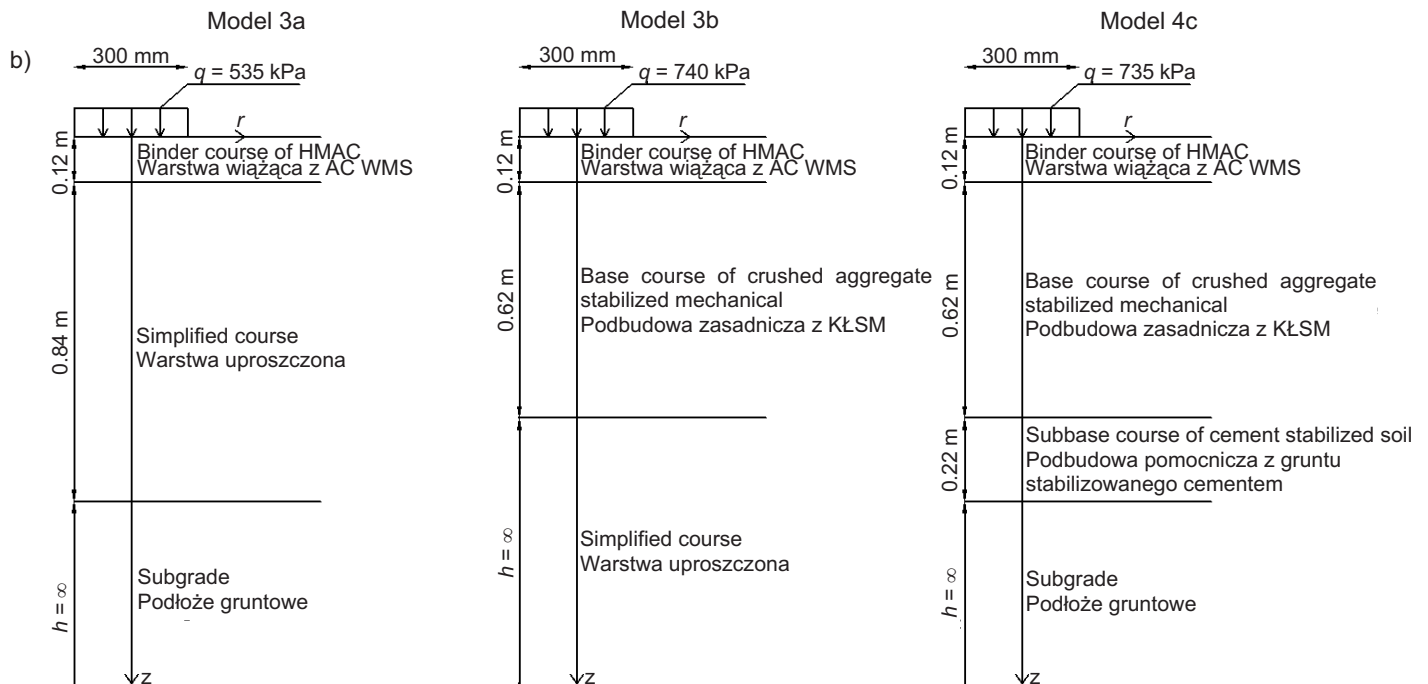


Fig. 9. a) scheme of pavement construction layers of the test section, b) schemes of pavement models of the test section
Rys. 9. a) schemat układu warstw konstrukcji nawierzchni odcinka testowego, b) schematy modeli nawierzchni jezdni odcinka testowego



skończonych w obszarze obciążenia, które ujawnia wrażliwość wartości ugięć najwyższej warstwy modelu zarówno na zmiany wymiaru elementów, jak i ich rodzaju. Ograniczając rozważania do kontynualnych elementów skończonych wybranych z biblioteki systemu Abaqus (CAX3, CAX4, CAX4R, CAX4I) można zauważyć, że o ile element CAX4R okazał się najlepszym wyborem w teście czasu obliczeń, o tyle największą stabilność w kontekście zmiany wymiarów elementu uzyskano wykorzystując element CAX4I. Dobór schematu statycznego i wymiarów modelu jest ściśle zdeterminowany i zależy od parametrów modelu MES (rodzaj, kształt siatki elementów, warunki brzegowe, wymiary modelu, liczba modelowanych warstw). To pozwala przypuszczać, że optymalna konfiguracja jest jednak

element mesh in the load area, which reveals a deflection sensitivity of the top model layer both to changes of element dimensions and their type. By limiting the considerations to continuous finite elements selected from the library of Abaqus system (CAX3, CAX4, CAX4R, CAX4I), it can be seen that while the CAX4R element turned out to be the best choice in calculation time test, its maximum stability in the context of changes in element dimensions was obtained using the CAX4I element. The choice of the static scheme and the model dimensions is strictly determined and depends on the parameters of the FEM model (type, shape of element mesh, boundary conditions, model dimensions, number of modeled layers). This allows us to believe that the optimal configuration is,

zagadnieniem indywidualnym, uzależnionym od przeznaczenia modelu MES. Część pracy związana z ustaleniem wymiarów modelu, który daje szansę na optymalizację procesu analizy odwrotnej opartej o wartości ugięć dowodzi, że najbardziej odpowiedni schemat statyczny sprowadza się do grupy modeli typu C (Rys. 2), gdzie warunki brzegowe zamodelowano przy wykorzystaniu elementów nieskończonych. W tym przypadku otrzymano najmniejsze wymiary R i H ($R = 30$ m i $H = 60$ m) w porównaniu do pozostałych dwóch wariantów warunków brzegowych, przy założonej umownej wartości porównawczej $RMSE = 5\%$.

Z analizy wyników eksperymentu opartego o teoretyczne krzywe ugięć modelu wynika, że dla obu metod (LET i MES) wartości błędów identyfikacji modułów sprężystości są do siebie zbliżone. Przy zachowaniu w miarę możliwości tych samych założeń, rozbieżność między zidentyfikowanymi wartościami modułów sprężystości w teście naprzemiennego wykorzystania metod LET i MES, ustalono na około 6%. Natomiast, błędy wyrażające względną różnicę między wartościami modułów sprężystości zidentyfikowanych obiema metodami w sposób niezależny od siebie i w oparciu o wyniki pomiaru ugięć nawierzchni odcinka testowego oscylują w granicach od 0 ÷ 8%. Analizy wyników obliczeń identyfikacyjnych bazujących na wartościach zmierzonych ugięć nawierzchni ujawniły, że w większości przypadków moduł błędu względnego dla zidentyfikowanych wartości modułów sprężystości metodami LET i MES zależy od głębokości usytuowania warstwy w modelu. Większe wartości tych błędów przypisane są z reguły do warstw modelu opisujących dolne partie konstrukcji nawierzchni.

Jak stwierdzono w licznych zbiorze analizowanych wariantów, nie istnieje uniwersalna konfiguracja schematów statycznych dla modeli MES, związanych z jednym zestawem wymiarów R i H dla modelu osiowo symetrycznego i dowolnej grupy parametrów wejściowych, przy jednoczesnym zachowaniu warunku, że błąd między wartościami identyfikacji metodami LET i MES modułów sprężystości warstw modelu nawierzchni jest mniejszy niż 10%.

BIBLIOGRAFIA / CONCLUSIONS

- [1] Abaqus analysis user's manual, Version 6.11, Dassault Systeme, 2011
- [2] Al-Khoury R., Scarpas A., Kasbergen C., Blaauwendraad J.: Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media. Part I: Forward calculation. International Journal of Solids and Structures, **38**, 9, 2001, 1605-1623

however, an individual issue, dependent on the destination of the FEM model. Part of the work associated with determining the dimensions of the model that gives a chance to optimize the process of the backcalculation analysis based on the deflection values shows that the most appropriate static scheme comes down to a group of C-type models (Fig. 2), where the boundary conditions were modeled using infinite elements. In this case the authors achieved the smallest dimensions of R and H ($R = 30$ and $H = 60$ m) with respect to the other two alternative boundary conditions, where the predetermined reference value $RMSE = 5\%$.

The analysis of the experiment results based on a model deflection theoretical curves shows that the identification error values of elasticity moduli are similar for both methods (LET and FEM). While maintaining, as much as possible, the same assumptions, the discrepancy between the identified values of elasticity moduli in the test of alternating use of LET and FEM methods was set at about 6%. On the other hand, the errors presenting the relative difference between the values of elasticity moduli which have been identified with the use of both methods, independently of each other and based on the measurement results of the test section pavement deflections, oscillate between 0 and 8%. Analyses of the identification results of calculations based on the measured values of pavement deflections showed that, in most cases, the error of relative module for the identified values of elasticity moduli by means of FEM and LET methods depends on the depth of the layer within the model. The larger values of these errors are usually assigned to the model layers representing the lower parts of the pavement structure.

It is concluded that, for a broad set of analyzed variants presented in this paper, there is no universal configuration of static schemes for FEM models, associated with one set of R and H dimensions for an axisymmetric model and unrestricted group of the input parameters, while maintaining simultaneously a condition that the error between the identification values of elasticity moduli of pavement model layers, obtained through LET and FEM methods, is less than 10%.

- [3] Asghar Bhatti M.: Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematica and Matlab Computations. Wiley, New Jersey, 2005
- [4] Asghar Bhatti M.: Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures: With Mathematica and MATLAB Computations. Wiley, New Jersey, 2006

- [5] *Burak G., Emine A., Hilmi L.*: Advances in backcalculating the mechanical properties of flexible pavements. *Advances in Engineering Software*, **37**, 7, 2006, 421-431
- [6] *Collop A.C., Scarpas A., Kasbergen C., Bondt A.*: Development and Finite Element Implementation of Stress-Dependent Elastoviscoplastic Constitutive Model with Damage for Asphalt. *Transportation Research Board of the National Academies*, **1832**, 12, 2003, 96-104
- [7] *Dehlen G.L.*: The effect of Nonlinear Material Response on the Behavior of Pavements Subjected to Traffic Loads Dehlen. *University of Berkeley*, 1969
- [8] *Duncan J.M., Monismith C.L., Wilson E.L.*: FEA of Pavements. *Highway Research Record*, 228, 1968, 18-33
- [9] *Firlej S.*: *Mechanika nawierzchni drogowej*. Petit s.c., Lublin, 2007
- [10] *Fuchang G., Lixing H.*: Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters. *Computational Optimization and Applications*, **51**, 1, 2012, 259-277
- [11] *Garbowski T.*: Stochastic model reduction applied to inverse analysis. *Proceedings of the VI International Conference on Adaptive Modeling and Simulation ADMOS 2013*, Eds. J.P. Moitinho de Almeida, P. Díez, C. Tiago, N. Parés, CIMNE Barcelona, 2013
- [12] *Graczyk M., Rafa J.*: Wybrane aspekty zachowania się nawierzchni podatnych w modelach materiałów termolepkosprężystych. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **9**, 2, 2010, 5-15
- [13] *Graczyk M., Rafa J., Rafalski L., Zofka A.*: New analytical solution of flow and heat refraction problem in multilayer pavement. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **13**, 1, 2014, 33-48
- [14] *Guzina B.B., Osburn R.H.*: Effective Tool for Enhancing Elastostatic Pavement Diagnosis. *Transportation Research Record*, 1806, 2002, 30-37
- [15] *Hadidi R., Gucunski N.*: Probabilistic Inversion: A New Approach to Inversion Problems in Pavement and Geomechanical Engineering. *Intelligent and Soft Computing in Infrastructure Systems Engineering*, **259**, 2009, 21-45
- [16] *Irwin L.*: *Backcalculation: Basics and Beyond*. Cornell University, Ithaca, 2004
- [17] *Jemioło S., Szwed A.*: *Zagadnienia statyki sprężystych półprzestrzeni warstwowych*. Seria wydawnicza „Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2013
- [18] *Kim M.*: Three-dimensional finite element analysis of flexible pavements considering nonlinear pavement foundation behavior. *University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana*, 2008
- [19] *Long F., Monismith C.L.*: Use of a Nonlinear Viscoelastic Constitutive Model for Permanent Deformation in Asphalt Concrete. *Proc. 3rd Int. Symp. on 3D Finite Elements for Pavement Analysis, Design and Research*, Amsterdam, 2002
- [20] *Nagórska M., Nagórski R.*: Analiza statyczna konstrukcji nawierzchni drogowej za pomocą MES i programu abaqus. *Logistyka*, 3, 2011, 1977-1986
- [21] *Nagórski R., Błażejowski K., Marczuk K.*: Comparative analysis of strains and durability of asphalt pavement of perpetual and standard type. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **11**, 4, 2012, 311-327
- [22] *Scarpas A., Al-Khoury R., Gurr C.A.P.M., Erkens S.M.J.G.*: Finite Element Simulation of Damage Development in Asphalt Concrete Pavements. *Proc. 8th International Conference on Asphalt Pavements*, University of Washington, Washington, 1997
- [23] *Szydło A.*: Statyczna identyfikacja parametrów modeli nawierzchni lotniskowych. *Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej*, **45**, Seria: monografie, 17, 1995
- [24] *Ullidtz P.*: *Pavement Analysis. Developments in Civil Engineering*, Elsevier, 1987
- [25] *Van Cauwelaert F.*: *Pavement Design And Evaluation The Required Mathematics And Its Applications*. Federation of the Belgian Cement Industry, Brussels, 2003
- [26] *Wu Z., Chen X., Yang X.*: Finite Element Simulation of Structural Performance on Flexible Pavements with Stabilized Base/Treated Subbase Materials under Accelerated Loading. *Transportation Research Center, Louisiana*, 2011
- [27] *Zafar R., Nassar W., Elbella A.*: Interaction between pavement instrumentation and hot mix asphalt in flexible pavements. *Bradley University, Bradley*, 2003
- [28] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.*: *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000