CZESŁAW MACHELSKI¹⁾

PARAMETERS OF LOAD TRANSVERSE DISTRIBUTION ACROSS BRIDGES

PARAMETRY ROZDZIAŁU POPRZECZNEGO OBCIĄŻEŃ W MOSTACH

STRESZCZENIE. W pracy analizuje się dwa, klasyczne modele przęseł mostowych w postaci rusztu płaskiego i płyty ortotropowej, w zakresie przydatności parametrów charakterystycznych tych modeli do tworzenia rozdziału poprzecznego obciążenia. W wyniku analizy wykazano, że model płyty ortotropowej, uzyskany w rozwiązaniach Guyon-Massonnet oraz Cusens-Puma jest ogólniejszy niż model rusztu płaskiego w ujęciu Leonhardta. Z porównania parametrów charakterystycznych obydwu modeli, czyli płyty ortotropowej i rusztu wyprowadzono ogólną funkcję parametru charakterystycznego rusztu stosowanego w metodzie Leonhardta. W jej postaci uwzględniono dodatkowo liczbę dźwigarów głównych i poprzecznic przęsłowych. Funkcję tą wykorzystano do weryfikacji założeń najprostszego modelu rusztu nazywanego „metodą sztywnej poprzeczniczy” i wykazano znaczne odchylenia od dotychczasowych wyników. Przykłady analiz porównawczych, podane w pracy ilustrują zakresy zastosowań parametrów charakterystycznych modeli mostów. W podsumowaniu rozpatrzono możliwość wykorzystania wspólnie tworzonych powierzchni wpływu momentów zginających do rozdziału poprzecznego obciążenia.

SŁOWA KLUCZOWE: analiza porównawcza, parametry modeli mostów, rozdział poprzeczny obciążenia.

ABSTRACT. The paper concerns analysis of two classic bridge span models i.e. flat grillage and orthotropic plate in order to determine usefulness of characteristic parameters of this models for creation of load transverse distribution. The results of analysis shows that the orthotropic plate model obtained in Guyon-Massonnet and Cusens-Puma solutions is more general than the flat grillage model developed by Leonhardt. Through the comparison of characteristic parameters of both models, i.e. the orthotropic plate and the grillage, a general function of grillage characteristic parameter used in the Leonhardt method is derived. Additionally, the number of main girders and cross-beams is included in the formula. The function is used for verifying the assumptions of the simplest grillage model (Courbon's Theory). Significant deviations from existing results are shown. The examples of comparative analyses given in the paper show the range of applications of the characteristic parameters of bridge models. In the conclusions the possibility of using bending moments influence surfaces to the transverse load distribution is presented.

KEYWORDS: bridge models parameters, comparative analysis, transverse distribution of loads.

¹⁾ Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska; czeslaw.machelski@pwr.edu.pl

1. WPROWADZENIE

Obecnie w projektowaniu mostów powszechnie stosowane są systemy oparte na MES. Do analizy statycznej wykorzystuje się komputerowe techniki obliczeniowe, w których w zasadzie nie ma ograniczeń: liczby węzłów, rodzajów użytych elementów, przestrzeni geometrii modelu. Z uwagi na możliwości współczesnych komputerów i programów drugorzędne znaczenie ma czas obliczeń. Wobec tych udogodnień projektowania mostów skutecznymi technikami są funkcje wpływu [1] tworzone w dowolnych modelach geometrii konstrukcji, również złożonych (np. mosty płytowo-belkowe wzmocnione łukiem) oraz nieregularnych w planie. Równolegle w realizacji prac studyjnych i w dydaktyce stosowane są obecnie sposoby obliczeń statycznych oparte na rozdziale poprzecznym obciążeń [2 - 5]. Dzięki możliwości stosowania prostych modeli obliczeniowych są one wykorzystywane w celu uzyskania ogólnych wniosków dotyczących skutków obciążeń w wybranych grupach obiektów mostowych.

Rozdział poprzeczny obciążenia był od dawna stosowany do obliczeń statycznych mostów wielobelkowych, płytowo-żebrowych i płytowych [6 - 10]. Umożliwia on bowiem sprowadzenie geometrii globalnego modelu obiektu do dwóch, prostych układów obliczeniowych. W jednym z nich uwzględnia się schemat statyczny dźwigara (belka ciągła, rama itp.), stosując linie wpływu sił wewnętrznych gdy obciążenia ruchome przyjmują położenia w kierunku rozpiętości mostu. Sprowadzanie sił z jezdni do tego schematu odbywa się z zastosowaniem rozdziału poprzecznego obciążenia a więc z odwzorowaniem położenia obciążenia w przekroju poprzecznym. Procedura ta jest powszechnie znana i stosowana w obliczeniach mostów [6, 9] dlatego nie jest omawiana w artykule.

Pierwsze zastosowania rozdziału poprzecznego obciążenia powstały w sytuacji ograniczonych możliwości obliczeniowych, na początku XX wieku [7 - 9]. Stąd rozwiązania statyczne oparte były na wykorzystaniu wzorów i tablic [6, 10]. Obecnie, dzięki MES stosujemy programy komputerowe, również z zastosowaniem rozdziału poprzecznego obciążenia, z tym że modele mostów mogą być bardziej wyrafinowane niż klasyczne, omawiane w pracy [2]. Powoduje to, że dokładność rozwiązań z zastosowaniem rozdziału poprzecznego obciążenia są takie same jak modeli z użyciem wyłącznie MES.

W zakresie zastosowań rozdziału poprzecznego obciążenia wyróżniamy grupę konstrukcji mostów o małej liczbie dźwigarów (jeden, dwa, trzy). W tym przypadku stosujemy

1. INTRODUCTION

Currently, in the design of bridges the systems FEM based software is commonly used. Static analysis uses computer calculation techniques, in which, in principle, there are no limitations in the number of nodes, the types of elements used, and the geometry of the model. Due to the capabilities of modern computers and programs, the time of computing is of secondary importance. In view of these facilities related to bridge design, the effective techniques are influence functions [1] created in any models of geometry of the structure, also complex ones (e.g. beam-slab bridges strengthened with an arch) and irregular in a plan. At the same time in the implementation of study works and in teaching, the static calculations methods based on transverse distribution of loads [2 - 5] are used. They are used to obtain general conclusions concerning the effects of loads, in selected groups of bridges, thanks to the use of simple computational models.

The transverse load distribution has long been used for the static calculation of multi-beam bridges, beam-slab, and plate bridges [6 - 10]. It allows to reduce the geometry of the global model to two simple computing systems. One of them takes into account the static scheme of the girder (continuous beam, frame, etc.) using the influence lines of internal forces when moving loads take the positions along the span of the bridge. Reducing the forces from the road to this scheme is carried out using a transverse load distribution, i.e. with mapping the position of the load in the cross-section. This procedure is commonly known and used in the calculation of bridges [6, 9] and therefore is not discussed in the paper.

The first applications of the transverse load distribution emerged in a situation of limited computing capabilities, at the beginning of the 20th century [7 - 9]. Hence the static solutions were based on the use of formulas and tables [6, 10]. Now, due to FEM, we use computer programs, also with the use of transverse load distribution, except that the bridge models may be more sophisticated than standard ones, discussed in the paper [2]. This results in the fact that the accuracy of the solutions that use the transverse load distribution is the same as the FEM models.

In the range of applications of the transverse load distribution, we distinguish a group of bridge structures with a small number of girders (one, two, three). In this case, we use a calculation methodology specific for their structure, e.g. [2, 4, 5]. In this paper, we consider the second group of structures. These are multi-girder spans with homogenous

specyficzną do ich budowy metodykę obliczeń np. [2, 4, 5]. W niniejszej pracy rozpatrujemy drugą grupę obiektów. Są to układy wieloźwigarowe o jednolitej konstrukcji (stalowe, betonowe) oraz prefabrykowane czy też zespolone. W tej grupie konstrukcji modelami wykorzystywanymi do rozdziału poprzecznego obciążenia są ruszty płaskie [1, 6, 8, 10] i płyty ortotropowe [6, 7, 9, 10]. W założeniach metodyki rozdziału poprzecznego obciążenia obiekty te są jednoprzęsłowe, w rzucie prostokątne a sposoby wykorzystania wyników z takiego modelu na inne schematy statyczne jest wyjaśniony w [6, 10].

2. MODEL PŁYTY ORTOTROPOWEJ

Do tworzenia rozdziału poprzecznego obciążenia z powodzeniem można wykorzystać model przęsła w postaci płyty ortotropowej [6, 7, 9, 10]. Z założenia metodyki obliczeń płyta jest prostokątna, swobodnie podparta na dwóch przeciwległych krawędziach ($x = 0$ i $x = L$), jak w przykładzie przęsła betonowego, przedstawionego na Rys. 1. Wobec takiego schematu statycznego dogodnie jest przyjęcie rozwiązania równania (1), w którym sztywności giętne i skrętne płyty ortotropowej są określone jako $D_x, D_y, 2H$:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y), \quad (1)$$

w postaci szeregów Fouriera, czyli w formie dwóch, rozseparowanych funkcji określających ugięcia w kierunkach x i y :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w(y) \sin(m \pi x / L). \quad (2)$$

W (2) m jest liczbą falową (harmoniczną) funkcji ugięcia rozłożonej w szereg Fouriera. Do rozdziału poprzecznego obciążenia [6, 9] przyjmujemy jedynie pierwszy wyraz szeregu, a stąd również obciążenie rozłożone, położone wzdłuż linii oddalonej od brzegu o y_o ma postać (Rys. 1):

$$p(x, y_o) = 1 \cdot \sin(\pi x / L), \quad (3)$$

Uzasadnienie tego założenia, czyli wykazanie bardzo dobrej zbieżności szeregów Fouriera w zakresie ugięć, podano w podsumowaniu rozdziału 3.

Bezwymiarowymi parametrami charakterystycznymi [6, 10] rozwiązania równania (1) są:

$$\alpha = \frac{2H}{\sqrt{D_x D_y}} \quad (4)$$

oraz

$$\vartheta = \frac{B}{2L} \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}. \quad (5)$$

configuration (steel, concrete), prefabricated or composite. In this group of structures, the models used for transverse load distribution are flat grillages [1, 6, 8, 10] and orthotropic plates [6, 7, 9, 10]. In the assumptions of the methodology of transverse load distribution, these bridge structures are single-span, rectangular in plan, and the ways for using the results of this model to other static schemes are explained in [6, 10].

2. ORTHOTROPIC PLATE MODEL

To create the transverse load distribution a span model can be successfully used in the form of an orthotropic plate [6, 7, 9, 10]. In principle, according to the calculation methodology, the plate is rectangular, simply supported along two opposite edges ($x = 0$ and $x = L$) as in the example of the concrete span, shown in Fig. 1. In view of such a static scheme, it is convenient to adopt the solution of the equation (1), where the flexural and torsional stiffness of the orthotropic plate are defined as $D_x, D_y, 2H$:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y), \quad (1)$$

in the form of Fourier series, i.e. in the form of two separated functions defining the deflections in the x and y directions:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w(y) \sin(m \pi x / L). \quad (2)$$

In (2) m is a (harmonic) wave number of the deflection function distributed into the Fourier series. For the transverse load distribution [6, 9] we accept only the first term of the series, and hence also the distributed load, located along the line distant from the edge by y_o is in the form shown in Fig. 1:

$$p(x, y_o) = 1 \cdot \sin(\pi x / L), \quad (3)$$

Justification of this assumption, i.e. demonstrating a very good convergence of Fourier series in terms of deflections, is shown in the summary of Chapter 3.

Dimensionless characteristic parameters [6, 10] for the solution of the equation (1) are:

$$\alpha = \frac{2H}{\sqrt{D_x D_y}} \quad (4)$$

and

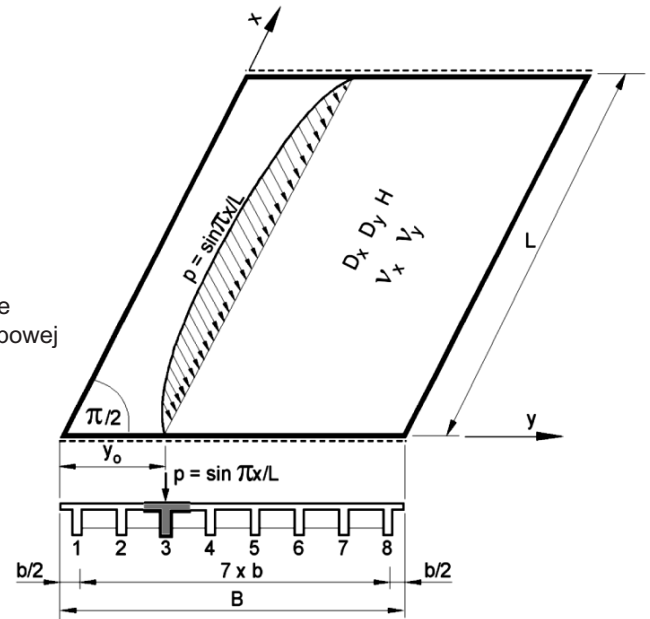
$$\vartheta = \frac{B}{2L} \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}. \quad (5)$$

Geometria płyty opisana jest przez jej rozpiętość L oraz szerokość B . Współczynniki Poissona w płycie ortotropowej spełniają zależność:

$$D_x \cdot \nu_y = D_y \cdot \nu_x \quad (6)$$

gdzie: D_x, D_y – sztywności giętnie płyty.

Fig. 1. Static scheme of orthotropic plate
Rys. 1. Schemat statyczny płyty ortotropowej



Przyjętą jako rozwiązanie równania (1) funkcje ugięcia $w(y)$ oraz funkcję obciążenia wyrażoną wzorem (3) wykorzystuje się do określenia rozdziału poprzecznego obciążenia. Funkcje $w(y)$ zależą od charakterystycznego parametru α jak niżej:

- jeśli $0 \leq \alpha \leq 1$

$$w = Ach(k_y) \cos(l_y) + Bf_0 ch(k_y) \sin(l_y) + Csh(k_y) \cos(l_y) + Df_0 sh(k_y) \sin(l_y), \quad (7)$$

- jeśli $\alpha = 1$

$$w = Ach(a_y) + Ba_y ch(k_y) + Csh(a_y) + Da_y sh(k_y), \quad (8)$$

- jeśli $1 \leq \alpha$

$$w = Ach(k_y) ch(l_y) + Bf_0 ch(k_y) sh(l_y) + Csh(k_y) ch(l_y) + Df_0 sh(k_y) sh(l_y). \quad (9)$$

Funkcje występujące we wzorach (7) - (9) zestawiono w Tabl. 1. Parametry stałe rozwiązania równania (1) określone w tych wzorach jako: A, B, C, D wyznaczamy na podstawie warunków brzegowych krawędzi płyty, $y = 0$ i $y = B$ oraz położenia obciążenia $y = y_0$. Praktyczne realizacje przykładów obliczeń, przedstawionych w niniejszej pracy wykonano z zastosowaniem elementów pasmowych, będących półanalitycznym rozwiązaniem MES [4, 5].

Na Rys. 2 przedstawiono przykład linii wpływu rozdziału poprzecznego obciążenia układu płytowo-żebrowego, złożonego z 8 dźwigarów i wyróżnionego na Rys. 1 – dźwigara 3. Na osi pionowej podano wartości współczynników rozdziału poprzecznego obciążenia. W celu skrócenia opisu wyników podanych w dalszej części pracy zastosowano zapis symboliczny funkcji jako K_{3i} , gdzie i jest rzędną wykresu występującą pod dźwigarem o numerze i , jak na Rys. 1.

The geometry of the plate is described by its span L and width B . Poisson's ratios for orthotropic plate satisfy the relation:

$$D_x \cdot \nu_y = D_y \cdot \nu_x \quad (6)$$

where: D_x, D_y – the flexural stiffness of the plate.

The deflection function $w(y)$, adopted as the solution of equation (1), and the function of the load, as expressed by the formula (3), is used to determine the transverse load distribution. The functions $w(y)$ depend on the characteristic parameter α as follows:

- if $0 \leq \alpha \leq 1$

$$w = Ach(k_y) \cos(l_y) + Bf_0 ch(k_y) \sin(l_y) + Csh(k_y) \cos(l_y) + Df_0 sh(k_y) \sin(l_y), \quad (7)$$

- if $\alpha = 1$

$$w = Ach(a_y) + Ba_y ch(k_y) + Csh(a_y) + Da_y sh(k_y), \quad (8)$$

- if $1 \leq \alpha$

$$w = Ach(k_y) ch(l_y) + Bf_0 ch(k_y) sh(l_y) + Csh(k_y) ch(l_y) + Df_0 sh(k_y) sh(l_y). \quad (9)$$

The functions appearing in the formulas (7) - (9) are summarized in Table 1. Constant parameters of the solution of equation (1) defined in these formulas as: A, B, C, D , are determined on the basis of the boundary conditions of the plate edge, $y = 0$ and $y = B$ and the position of the load $y = y_0$. Examples of calculations presented in this paper have been performed using band elements, which are a semi-analytical FEM solution [4, 5].

Table 1. Parameters of deflection function of orthotropic plate
 Tablica 1. Parametry funkcji ugięcia płyty ortotropowej

| Functions Funkcje | Range of characteristic parameters Zakres parametru charakterystycznego | | |
|----------------------|--|--------------|---|
| | $0 \leq \alpha \leq 1$ | $\alpha = 1$ | $1 \leq \alpha$ |
| a_y | $\pi y / L$ | | |
| k_y | $\sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} a_y$ | | |
| l_y | $\sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} a_y$ | - | $\sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \sqrt{\frac{\alpha-1}{2}} a_y$ |
| f_o | $\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ | - | $\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha-1}}$ |

W przykładzie podanym na Rys. 2 założono stałą wartość $\vartheta = 1$. Wobec tego w przypadku kwadratowej płyty ($B/L = 1$) ze wzoru (5) otrzymujemy:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}},$$

a stąd zależność sztywności płyty ortotropowej:

$$D_x = 16D_y.$$

Przyjmując przykładowo $D_x = 100$ otrzymuje się $D_y = 6,25$ a stąd:

$$\sqrt{D_x D_y} = 25.$$

Wobec tego widoczna jest zależność parametrów ze wzoru (4):

$$2H = 25\alpha.$$

Jednostki wielkości $D_x, D_y, 2H$ w takich obliczeniach nie są istotne. Wyniki obliczeń odniesiono do przypadku szczególnego – płyty izotropowej ($D_x = D_y$, gdy $\alpha = 1$ i $\vartheta = 1/2$). Z przedstawionych na Rys. 2 wykresów wynika znaczny wpływ parametru charakterystycznego α , przy stałej wartości ϑ . W analizowanym przypadku zmienność rezultatów spowodowana jest sztywnością H . W przypadku płyty izotropowej wykres zbliżony jest do prostoliniowego.

Na Rys. 3 przedstawiono wykresy rozdziału poprzecznego obciążenia również dźwigara 3, ale w zależności od geometrii rzutu poziomego płyty ortotropowej. W tym przypadku proporcja szerokości przęsła do jego rozpiętości jest określona liczbą dźwigarów n jako:

$$B/L = n/8.$$

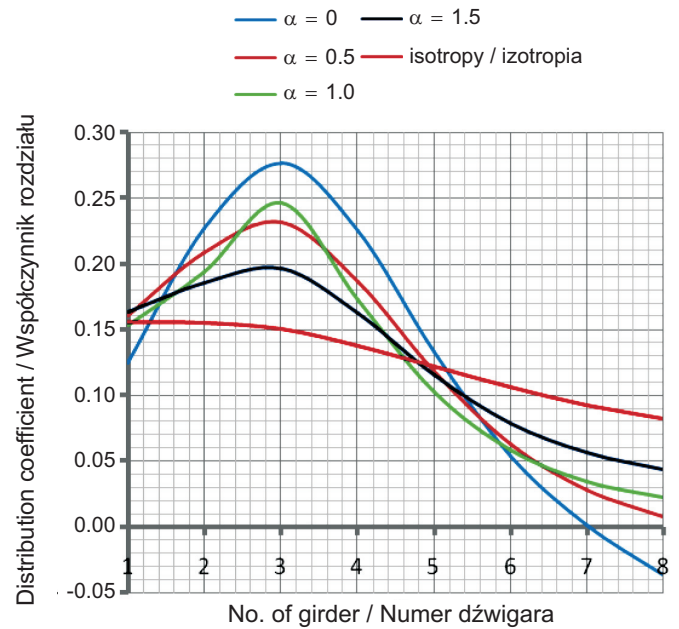


Fig. 2. Graphs of K_{3i} (girder 3) versus parameter α
 Rys. 2. Wykresy K_{3i} (dźwigara 3) w zależności od parametru α

An exemplary load transverse distribution influence line, a of beam-slab span consisting of eight girders, depicted in Fig. 1 as beam 3, is shown in Fig. 2. Load transverse distribution coefficient is shown on vertical axis there. In the following, to shorten the description, symbol K_{3i} , where i is ordinate of the graph under the beam numbered i , is introduced as shown in Fig.1.

In the example given in Fig. 2, the constant value has been assumed $\vartheta = 1$. Therefore, in the case of a square plate ($B/L = 1$) from the formula (5) we obtain:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}},$$

and hence the dependence of the stiffnesses of the orthotropic plate:

$$D_x = 16D_y.$$

Assuming, for example, $D_x = 100$, we obtain $D_y = 6.25$ and hence:

$$\sqrt{D_x D_y} = 25.$$

Therefore, the correlation of parameters from formula (4) can be seen:

$$2H = 25\alpha.$$

Przyjęto w tym przykładzie jako wartości stałe $D_x = 4 D_y$ oraz $D_x = 20 H$, a stąd $\alpha = 0,2$. Wobec tych danych parametr ϑ jest funkcją zależącą od liczby dźwigarów:

$$\vartheta = \frac{n}{16} \sqrt[4]{4} = \frac{\sqrt{2}}{16} n.$$

W Tabl. 2 zestawiono parametry analizy.

Table 2. Geometric parameters of the example of orthotropic plate
Tablica 2. Geometryczne parametry przykładu płyty ortotropowej

| n | 6 | 8 | 10 | 12 |
|-------------|---------------|--------------|---------------|---------------|
| B/L | 0.75 | 1 | 1.25 | 1.50 |
| ϑ | $3\sqrt{2}/8$ | $\sqrt{2}/2$ | $5\sqrt{2}/8$ | $3\sqrt{2}/4$ |

Wykresy przedstawione na Rys. 3 wskazują na mały wpływ geometrii mostu (czyli n) na rozdział poprzeczny obciążenia. Wobec tego na Rys. 4 przedstawiono taką samą analizę, ale przy przyjęciu modelu płyty izotropowej i parametrów charakterystycznych $\alpha = 1$ oraz $\vartheta = B/L$. W tym przypadku wykresy podlegają już widocznej zmianie, a więc wniosek wynikający z wykresów podanych na Rys. 3 nie jest ogólnym.

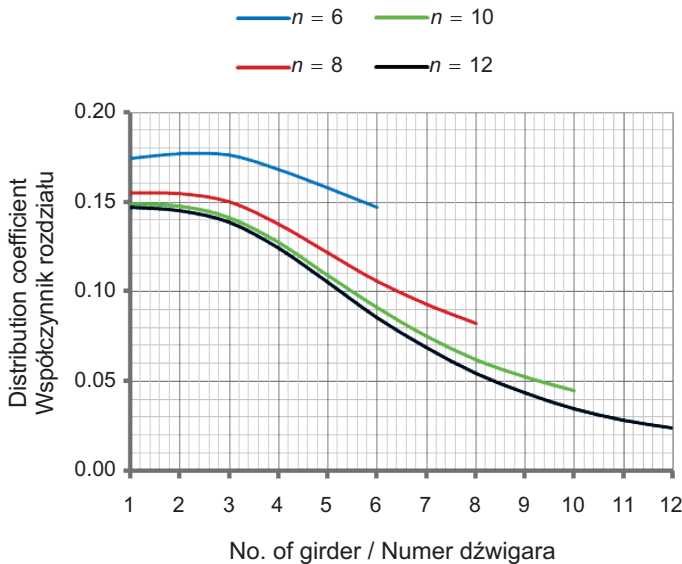


Fig. 4. Graphs of K_{3i} (girder 3) versus width of isotropic plate $B = n \cdot b$
Rys. 4. Wykresy K_{3i} (dźwigara 3) w zależności od szerokości płyty izotropowej $B = n \cdot b$

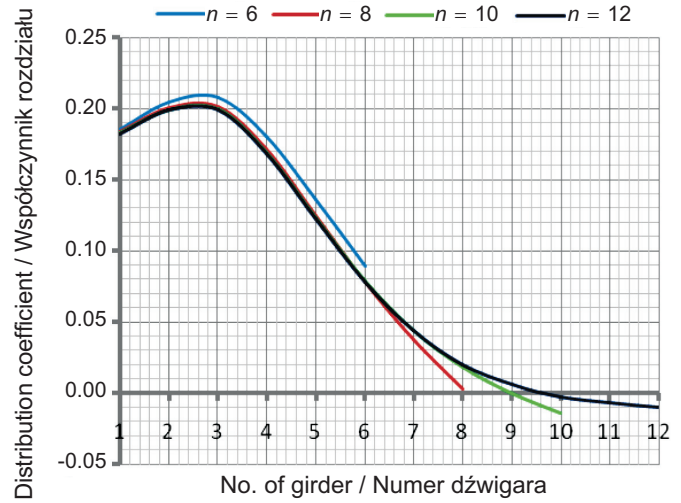


Fig. 3. Graphs of K_{3i} (girder 3) versus width of orthotropic plate $B = n \cdot b$

Rys. 3. Wykresy K_{3i} (dźwigara 3) w zależności od szerokości płyty ortotropowej $B = n \cdot b$

The units of D_x , D_y , $2H$ in such calculations are not relevant. The results of calculations have been related to a special case – the isotropic plate ($D_x = D_y$, where $\alpha = 1$ and $\vartheta = 1/2$). Presented in Fig. 2 graphs show a significant influence of the characteristic parameter α , at a constant value ϑ . In the analysed case, the variability of the results is due to the stiffness of H . In the case of an isotropic plate, the graph is similar to the straight line.

Graphs of the transverse load distribution also of the girder 3 but depending on the in plan geometry of the orthotropic plate are presented in Fig. 3. In this case, the ratio of the span width to its length is defined by the number of girders n as:

$$B/L = n/8.$$

In this example, constant values $D_x = 4 D_y$ and $D_x = 20 H$ have been adopted and thus $\alpha = 0.2$. In view of these data, the parameter ϑ is a function that depends on the number of girders:

$$\vartheta = \frac{n}{16} \sqrt[4]{4} = \frac{\sqrt{2}}{16} n.$$

Table 2 shows the parameters of the analysis.

The graphs given in Fig. 3 indicate a small effect of the bridge geometry (i.e. n) on the transverse load distribution. Whereas, Fig. 4 shows the same analysis, but assuming the model of the isotropic plate and characteristic parameters $\alpha = 1$, and $\vartheta = B/L$. In this case, the graphs are different, thus the conclusion drawn from the graphs shown in Fig. 3 is not general.

3. MODEL RUSZTU PŁASKIEGO

Na Rys. 5 przedstawiono model mostu w postaci rusztu płaskiego, utworzonego z $n = 8$ dźwigarów głównych, o rozstawie b , gdy $m = 3$ jest liczbą poprzecznicy przęsłowych o rozstawie c . Wobec tego szerokość konstrukcji jest równa $B = n \cdot b$, a jej rozpiętość można określić jako $L = (m + 1)c$. Niżej porównujemy dwa modele w postaci płyty ortotropowej (Rys. 1) oraz rusztu płaskiego. Ponieważ w modelu Leonhardta [5] pominięto sztywności na skręcanie, stąd we wzorze (4) $H = 0$ oraz parametr $\alpha = 0$. Jedynym parametrem charakterystycznym modelu płyty ortotropowej pozostaje ϑ . Podstawiając do wzoru (5) parametry geometryczne rusztu, jak na Rys. 5, otrzymujemy:

$$\vartheta = \frac{nb}{2L} \sqrt[4]{\frac{EI_x}{b} \frac{c}{EI_y}}, \quad (10)$$

sztywność płyty ortotropowej określa się wzorami [6, 9]:

$$D_x = \frac{EI_x}{b} \quad (11)$$

oraz

$$D_y = \frac{EI_y}{c}. \quad (12)$$

Z równania (10) otrzymujemy:

$$\vartheta^4 = \frac{n^4 b^4}{16L^4} \frac{EI_x}{b} \frac{c}{EI_y} = \frac{n^4}{2(m+1)} \left(\frac{b}{2L}\right)^3 \frac{EI_x}{EI_y}. \quad (13)$$

Parametr charakterystyczny płyty ortotropowej ϑ związany jest z parametrem charakterystycznym rusztu z zależnością $z = \vartheta^{-4}$. Stąd otrzymamy wzór ogólny w ujęciu metody Leonhardta:

$$z = \frac{2(m+1)}{n^4} \left(\frac{2L}{b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x}. \quad (14)$$

Wprowadzony przez Leonhardta parametr charakterystyczny rusztu z [8] podawany jest w literaturze np. [10] jako:

$$z = \left(\frac{L}{2b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x}, \quad (15)$$

dla układu geometrycznego o czterech dźwigarach głównych, stężonych jedną poprzecznicy przęsłową. Przyjmując oznaczenia stosowane w artykule i na Rys. 5 otrzymujemy $n = 4$ i $m = 1$. Po podstawieniu tych danych do wzoru (14) otrzymujemy postać:

$$z = \frac{2 \cdot 2}{64} \left(\frac{2L}{b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x} = \left(\frac{L}{2b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x},$$

zgodną z (15).

3. FLAT GRILLAGE MODEL

Fig. 5 shows a model of the bridge, consisting of $n = 8$ main girders, with spacing b , whereas $m = 3$ is the number of cross-beams with the spacing c . Thus, the width of the structure is equal to $B = n \cdot b$, and its span can be defined as $L = (m + 1)c$. Below the orthotropic plate model, as shown in Fig. 1, and the flat grillage model are compared. Since in the Leonhardt model [5], the torsional stiffness is omitted, in the formula (4) $H = 0$ and the parameter $\alpha = 0$. The only characteristic parameter of the orthotropic plate model is ϑ . By substituting to the equation (5) the geometric parameters of the grillage, as shown in Fig. 5, we obtain:

$$\vartheta = \frac{nb}{2L} \sqrt[4]{\frac{EI_x}{b} \frac{c}{EI_y}}, \quad (10)$$

the stiffness of the orthotropic plate is determined by the formulas [6, 9]:

$$D_x = \frac{EI_x}{b} \quad (11)$$

and

$$D_y = \frac{EI_y}{c}. \quad (12)$$

From the equation (10) we obtain:

$$\vartheta^4 = \frac{n^4 b^4}{16L^4} \frac{EI_x}{b} \frac{c}{EI_y} = \frac{n^4}{2(m+1)} \left(\frac{b}{2L}\right)^3 \frac{EI_x}{EI_y}. \quad (13)$$

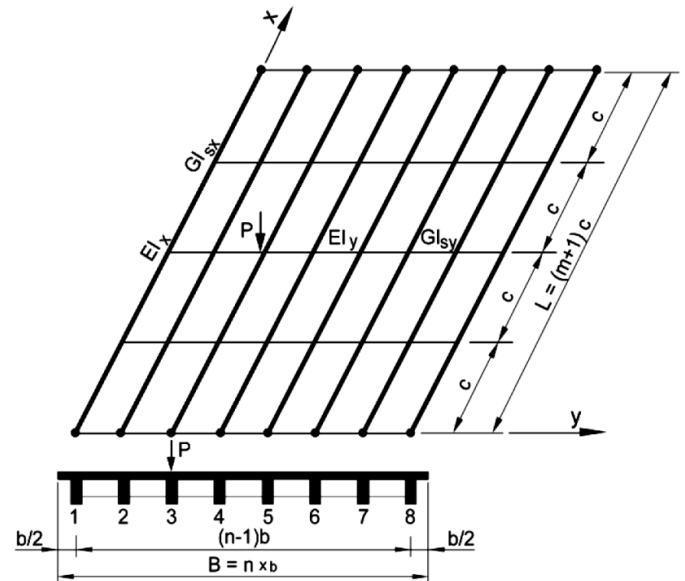


Fig. 5. Flat grillage model
Rys. 5. Model rusztu płaskiego

Jak widać z podanego wywodu wzór (14) powstał z porównania dwóch, różnych modeli i metod obliczeń: płyty ortotropowej [6, 10] i rusztu płaskiego [8]. Jest on stosowany do kwalifikacji rusztu jako układu ze sztywną poprzeczną [2, 3, 10], gdy spełniony jest warunek:

$$z = \left(\frac{L}{2b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x} \geq 30. \quad (16)$$

Wobec założeń przyjętych w [8] do określenia parametru z w (16) widoczne jest, że w metodzie sztywnej poprzeczniczy należy uwzględnić również liczbę dźwigarów głównych n i poprzecznicy przęsłowych m , zgodnie ze wzorem (14):

$$z = \frac{2(m+1)}{n^4} \left(\frac{2L}{b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x} \geq 30. \quad (17)$$

Na Rys. 6 przedstawiono rozdział poprzeczny obciążenia w ruszcie zbudowanym z $n = 8$ dźwigarów głównych i różnej liczby poprzecznicy przęsłowych m . Jako parametry stałe przyjęto proporcję $L/2b = 6$ ($2L/b = 24$) oraz gdy sztywności są w proporcji $EI_x/EI_y = 6$. Zgodnie ze wzorem (15) daje to stałą wartość $z = 6^3/6 = 36$. Wobec tego z obliczonej wartości z , zgodnie z warunkiem podanym w (16) należy wnioskować, że analizowane na Rys. 6 przypadki mieszczą się w zakresie rozwiązań metody sztywnej poprzeczniczy. Jednak w przypadku stosowania właściwego wzoru (17), obliczone wartości:

$$z = \frac{2(m+1)}{8^4} 24^3 \frac{1}{6} = \frac{9}{8}(m+1),$$

zestawione w Tabl. 3 są zupełnie inne. Potwierdza to istotny wpływ liczby dźwigarów głównych i poprzecznicy na kwalifikację stosowaną w metodzie Leonharda.

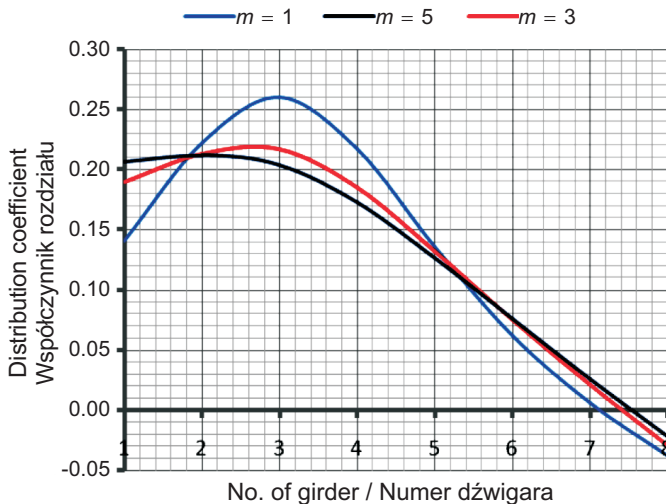


Fig. 6. Graphs of K_{3i} (girder 3) versus the number of cross-beams
Rys. 6. Wykresy K_{3i} (dźwigara 3) w zależności od liczby poprzecznicy przęsłowych

A characteristic parameter of the orthotropic plate ϑ is related to the characteristic parameter of the grillage by the relationship $z = \vartheta^{-4}$. Hence we get the general formula in terms of the Leonhardt method:

$$z = \frac{2(m+1)}{n^4} \left(\frac{2L}{b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x}. \quad (14)$$

The grillage characteristic z parameter [8], introduced by Leonhardt, is mentioned in the literature, e.g. [10] as:

$$z = \left(\frac{L}{2b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x}, \quad (15)$$

for the geometric arrangement consisting of four main girders, braced by one cross-beam. Assuming the notation used in the paper and in Fig. 5, we obtain $n = 4$ and $m = 1$. After substituting these data into the formula (14) we obtain the form:

$$z = \frac{2 \cdot 2}{64} \left(\frac{2L}{b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x} = \left(\frac{L}{2b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x},$$

that is consistent with (15).

As can be seen from the above analysis, the formula (14) was derived from a comparison of two different models and methods of calculation: of the orthotropic plate [6, 10] and the flat grillage [8]. It is used for the qualification of the grillage as a structure meeting the assumptions of the Courbon's Theory [2, 3, 10], after meeting the condition:

$$z = \left(\frac{L}{2b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x} \geq 30. \quad (16)$$

In view of the assumptions adopted in [8] to define a parameter z in (16) it can be seen that in the stiff cross-beam method one must also take into account the number of main girders n and cross-beams m , according to (14):

$$z = \frac{2(m+1)}{n^4} \left(\frac{2L}{b}\right)^3 \frac{EI_y}{EI_x} \geq 30. \quad (17)$$

Fig. 6 shows the transverse load distribution in the grillage consisting of $n = 8$ main girders and a changing number of cross-beams m . As constant parameters there was assumed a ratio $L/2b = 6$ ($2L/b = 24$), and the stiffness ratio $EI_x/EI_y = 6$. In accordance with the formula (15), it gives a constant value of $z = 6^3/6 = 36$. Therefore, from the calculated value of z , in accordance with the condition given in (16), it must be concluded that the cases analysed in Fig. 6 are meeting the conditions of the Courbon's Theory. However, in the case of using the correct formula (17), the calculated values:

$$z = \frac{2(m+1)}{8^4} 24^3 \frac{1}{6} = \frac{9}{8}(m+1),$$

Table 3. Characteristic parameters of grid and orthotropic plate in the analysed example of span
 Tablica 3. Charakterystyczne parametry rusztu i płyty ortotropowej w analizowanym przykładzie przęsła

| m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| z | 2.25 | 3.375 | 4.50 | 5.625 | 6.75 | 7.875 |
| ϑ | 0.8165 | 0.7378 | 0.6866 | 0.6493 | 0.6204 | 0.5969 |

Wyniki obliczeń podane na Rys. 6 wykonano z wykorzystaniem modelu podanego na Rys. 1 a więc płyty ortotropowej – przy przyjęciu $H = 0$. Wartość D_y obliczono z zależności (4) i wartości ϑ zestawionych w Tabl. 2. Wobec danej geometrii rusztu (i płyty ortotropowej), ze wzoru (5) o postaci:

$$\vartheta = \frac{8}{24} \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}},$$

otrzymujemy w tym przykładzie następującą zależność pomiędzy sztywnościami giętnymi:

$$D_y = \frac{D_x}{3^4 \vartheta^4} = \frac{z}{81} D_x.$$

Z wykresów podanych na Rys. 6 wynika, że odbiegają one znacznie od linii prostej a więc od rozwiązania uzyskanego z metody sztywnej poprzecznic, a proporcje wyników uzyskanych ze wzorów (14) i (15):

$$\Delta = \frac{2(m+1)}{n^4} \left(\frac{2L}{b}\right)^3 \left(\frac{2b}{L}\right)^3 = \left(\frac{4}{n}\right)^4 \frac{m+1}{2}, \quad (18)$$

zestawionych w Tabl. 4 są bardzo zróżnicowane. Wobec tego stosowany wzór (14) może powodować znaczne błędy wyników, co pokazano na Rys. 6.

Model rusztu płaskiego, podany na Rys. 5, można więc zastępować modelem płyty ortotropowej, bowiem gdy uwzględniamy sztywność na skręcanie elementów rusztu:

$$2H = \frac{GI_{sx}}{b} + \frac{GI_{sy}}{c} + \frac{Gt^3}{12}, \quad (19)$$

istotny staje się parametr charakterystyczny α ze wzoru (4). Ostatni człon wzoru (19) dotyczy płyty pomostowej zespolonej z belkami rusztu, o grubości t . Wobec tego w rozwiązaniu równania (1) wystąpią obydwa parametry charakterystyczne płyty ortotropowej, podane we wzorach (4) i (5).

W modelu płyty ortotropowej stosujemy jako obciążenie służące do rozdziału poprzecznego obciążenia siłę rozłożoną wzdłuż dźwigara głównego $p = \sin(\pi x/L)$, natomiast w przypadku rusztu siłę skupioną $P = 1$ w środku rozpiętości przęsła. Jeżeli w obydwu przypadkach za podstawę

sumaryzowane w Tabeli 3 są zupełnie inne. To potwierdza istotny wpływ liczby głównych belek i poprzecznic na klasyfikację używaną w metodzie Leonhardt.

Wyniki obliczeń przedstawione na Rys. 6 zostały wykonane przy użyciu modelu z rys. 1, tzn. płyty ortotropowej – zakładając $H = 0$. Wartość D_y została obliczona z zależności (4) i wartości ϑ z tabeli 2. Wobec przyjętej geometrii rusztu (i płyty ortotropowej), z wzoru (5) w postaci:

$$\vartheta = \frac{8}{24} \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}},$$

w tym przykładzie otrzymujemy następującą zależność między sztywnościami giętnymi:

$$D_y = \frac{D_x}{3^4 \vartheta^4} = \frac{z}{81} D_x.$$

Z wykresów z rys. 6 wynika, że wyniki odbiegają od linii prostej, tzn. od rozwiązania uzyskanego z teorii Courbona, a proporcje wyników z wzorów (14) i (15):

$$\Delta = \frac{2(m+1)}{n^4} \left(\frac{2L}{b}\right)^3 \left(\frac{2b}{L}\right)^3 = \left(\frac{4}{n}\right)^4 \frac{m+1}{2}, \quad (18)$$

zestawionych w Tabeli 4 są bardzo zróżnicowane. Dlatego używanie wzoru (14) może powodować znaczne błędy, co jest widoczne na rys. 6.

Table 4. Results of comparison of parameter calculated according to the global formula (15) and simplified formula (16)

Tablica 4. Wyniki porównania parametru z obliczonych ze wzoru ogólnego (15) i uproszczonego (16)

| m or/lub n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $n = 4$ | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 |
| $n = 8$ | 1/16 | 3/32 | 1/8 | 5/32 | 3/16 | 7/32 | 1/4 |
| $m = 1$ | – | 8 | 3.16 | 1.00 | 0.41 | 0.20 | 0.11 |

Wobec tego model rusztu płaskiego z rys. 5 można zastępować modelem płyty ortotropowej, ponieważ uwzględniamy sztywność na skręcanie elementów rusztu:

$$2H = \frac{GI_{sx}}{b} + \frac{GI_{sy}}{c} + \frac{Gt^3}{12}, \quad (19)$$

W tym przykładzie istotny staje się parametr charakterystyczny α z wzoru (4). Ostatni człon równania (19) dotyczy płyty pomostowej zespolonej z belkami rusztu, o grubości t . Wobec tego w rozwiązaniu równania (1) wystąpią obydwa parametry charakterystyczne płyty ortotropowej, podane w wzorach (4) i (5).

tworzenia rozdziału poprzecznego obciążenia przyjmujemy ugięcia w środku rozpiętości przęsła (w_r – rusztu i w_o – płyty) powstanie różnica wyników o stałej wartości:

$$\frac{w_r}{w_o} = \frac{PL^3}{48EI_x} \frac{LEI_x}{2P} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 = \frac{\pi^4}{96} = 1,015. \quad (20)$$

Względna różnica wyników występująca w obydwu modela jest więc niewielka bo sięga 1,5%. Oczywiście można ją zredukować stosując zamiast pojedynczego wyrazu szeregu Fouriera kilka wyrazów.

4. POWIERZCHNIE WPŁYWU W MODELACH PRĘTOWYCH

Do obliczeń statycznych pomostów o konstrukcji płytowo-żebrowej wykorzystujemy obecnie powierzchnie wpływu sił przekrojowych. W obliczeniach, z zastosowaniem MES, można realizować modele zbliżone do rzeczywistego układu konstrukcji, a więc odwzorowane w przestrzeni 3D, natomiast w przypadku mostów płytowo-żebrowych wystarczająco dokładne są modele 2D. Do tworzenia powierzchni wpływu sił przekrojowych dogodnie jest korzystanie z metody kinematycznej, podanej w [1]. W przypadku określania kształtu wykresu rozdziału poprzecznego obciążenia korzystamy z powierzchni wpływu momentów zginających [1] lub ugięcia w środku rozpiętości dowolnie wybranego dźwigara głównego.

Na Rys. 7 przedstawiono wynik obliczeń układu złożonego z 8 dźwigarów głównych i 7 poprzecznicy przęsłowych. W przyjętym modelu rusztu płaskiego zastosowano proporcje sztywności prętów $EI_x/EI_y = 3,292$ oraz jednakowy ich rozstaw $b = c = L/8$ (por. Rys. 5). Wobec tego geometria przęsła tworzy proporcję $B/L = 1$. Parametr charakterystyczny Leonharda rusztu płaskiego:

$$z = \frac{2(7+1)}{8^4} \frac{16^3}{3,292} = 4,86$$

jest w tym przypadku znacznie mniejszy od wartości przyjmowanej w metodzie sztywnej poprzeczniczy gdyby proporcje sztywności prętów spełniały warunek $EI_x/EI_y < 1,875$. Wyróżniony na Rys. 7 wykres, powstały w środku rozpiętości przęsła, wzdłuż poprzeczniczy środkowej tworzy profil poprzeczny powierzchni wpływu momentów o kształcie zbliżonym do rozdziału poprzecznego obciążenia analizowanego dźwigara 3.

Na Rys. 8 naniesiono wykres z Rys. 7, uzyskany z powierzchni wpływu momentów (oznaczony jako M), i odniesiono go do linii uzyskanej z klasycznego rozdziału poprzecznego

bridge plate connected to beams of the grillage of the thickness t . Thus, in the solution of equation (1) there will occur both characteristic parameters of the orthotropic plate given in the formulas (4) and (5).

In the orthotropic plate model we use as a load for the transverse load distribution the force distributed along the main girder $p = \sin(\pi x/L)$, whereas in the case of the grillage, the force $P = 1$ concentrated in the middle of the span. If in both cases we accept, as the criterion for the creation of transverse load distribution, deflections in the middle of the beam span (w_r – grillage and w_o – plate) a constant difference of results will appear:

$$\frac{w_r}{w_o} = \frac{PL^3}{48EI_x} \frac{LEI_x}{2P} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 = \frac{\pi^4}{96} = 1.015. \quad (20)$$

Thus, the relative difference of results occurring in both models is small reaching 1.5%. Of course, it can be reduced by using several terms instead of a single term of a Fourier series.

4. INFLUENCE SURFACES IN BAR MODELS

For the static calculations of beam-slab decks the influence surfaces of cross-sectional forces can be used. In the FEM calculations, the models close to the actual structural system can be used, i.e. discretised in 3D space. In the case of beam-slab bridges 2D models are sufficient. To create influence surfaces of cross-sectional forces it is convenient to use the kinematic method described in [1]. In determining the shape of the graph presenting the transverse load distribution we use the influence surfaces of bending moments [1] or deflections in the middle of the span of the arbitrarily selected main girder.

Results of calculations of the structure consisting of eight main girders and seven cross-beams are shown in Fig. 7. This model of the flat grillage uses stiffness ratio of the bars $EI_x/EI_y = 3.292$, and their identical spacing $b = c = L/8$ (see Fig. 5). Therefore, the geometry of the span forms a proportion of $B/L = 1$. The Leonhardt characteristic parameter of the flat grillage:

$$z = \frac{2(7+1)}{8^4} \frac{16^3}{3,292} = 4.86$$

is in this case much smaller than the value adopted in the Courbon's method if the proportions of bar stiffness met the condition $EI_x/EI_y < 1.875$. The graph highlighted in Fig. 7, formed in the middle of the span along the central cross-beam forms a transversal profile of the influence

obciążenia a więc powstałego na podstawie ugięć (oznaczony jako w). Widoczna różnica wyników jest spowodowana metodyką wyznaczania obydwu wykresów (na podstawie ugięć i momentów zginających). Nie jest to błąd obliczeń lub modelu obiektu. Pełną zgodność wykresów podanych na Rys. 8 uzyskuje się gdy w ruszcie występuje jedna poprzeczka przęsłowa. Wówczas wyniki nie zależą od proporcji sztywności EI_x/EI_y .

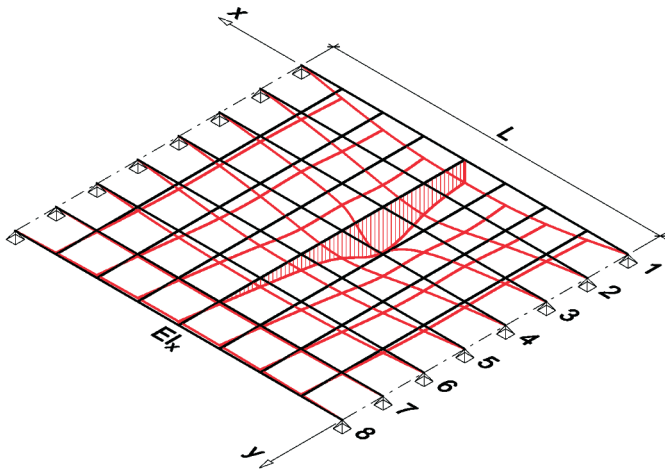


Fig. 7. The influence surface of bending moment in the centre of girder 3 span
Rys. 7. Powierzchnia wpływu momentu zginającego w środku rozpiętości dźwigara 3

Przy zachowaniu odpowiednich parametrów charakterystycznych rusztu i płyty ortotropowej oraz z powierzchni wpływu ugięcia uzyskuje się zbliżone wartości rozdziału poprzecznego obciążenia. Wykres przedstawiony na Rys. 8 można uzyskać również w przypadku jednej poprzeczki przęsłowej, gdy $EI_x/EI_y = 0,823$ w przęśle utworzonym z $n = 8$ dźwigarów głównych i proporcji $B/L = 1$, bowiem spełniony będzie warunek:

$$z = \frac{2(1+1)}{8^4} \frac{16^3}{0,823} = 4,86.$$

Model płyty ortotropowej dotyczy przeszł o regularnej budowie, czyli układu o jednakowych rozstawach dźwigarów głównych b i poprzecznik przęsłowych c oraz ich sztywności EI_x i EI_y . W układach nieregularnych model ten nie jest przydatny do tworzenia rozdziału poprzecznego obciążenia. Skutecznym w takim przypadku pozostaje model rusztu płaskiego ale w ujęciu ogólnym z zastosowaniem MES. Na Rys. 9 porównano dwa wykresy utworzone z rozwiązania rusztu o ogólnej geometrii podanej na Rys. 7. W rozpatrywanym przypadku przyjęto ruszt o geometrii i sztywnościach

surface of the moments with a shape similar to a transverse load distribution of the analysed girder No. 3.

Fig. 8 includes a graph from Fig. 7, obtained from the influence surface of the moments (denoted as M), and referenced to the line obtained from the classical transverse load distribution and hence created on the basis of deflections (indicated by w). The apparent difference of the results is due to the methodology for determining the two graphs (based on deflections and bending moments). This is not computational or modeling error. The full compatibility of graphs shown in Fig. 8 is obtained when there is a single cross-beam in the grillage. Then the results do not depend on the ratio of the stiffness EI_x/EI_y .

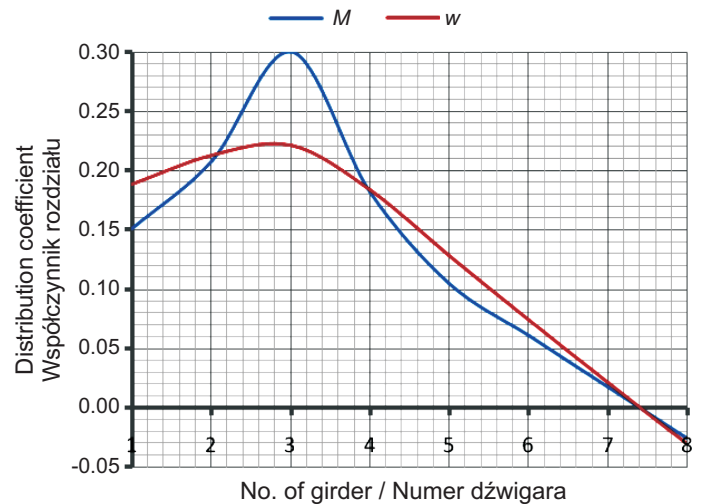


Fig. 8. Graphs of K_{3j} (girder 3) created from the influence surfaces of bending moments M and deflections w
Rys. 8. Wykresy K_{3j} (dźwigara 3) utworzone z powierzchni wpływu momentów zginających M i ugięć w

Taking into account the adequate characteristic parameters of the grillage and the orthotropic plate and the influence surface of the deflection, the similar values of the transverse load distribution are obtained. The graph shown in Fig. 8 can also be obtained in the case of a single cross-beam when $EI_x/EI_y = 0.823$ in the span consisting of $n = 8$ main girders and the ratio $B/L = 1$ because the following condition is met:

$$z = \frac{2(1+1)}{8^4} \frac{16^3}{0,823} = 4,86.$$

The orthotropic plate model applies to regular spans, i.e. with equal spacing of main girders b and cross-beams c and constant stiffness EI_x and EI_y . In irregular systems this model is not suitable for the generation of the transverse

regularnych (jak na Rys. 7) oraz układ, w którym sztywność dźwigara 1 jest dwukrotnie mniejsza od pozostałych dźwigarów głównych, czyli gdy $EI_x(1)/EI_x = 0,5$. Obydwa wykresy utworzono z wykorzystaniem ugięć, stąd jeden z nich przedstawiono wcześniej na Rys. 8.

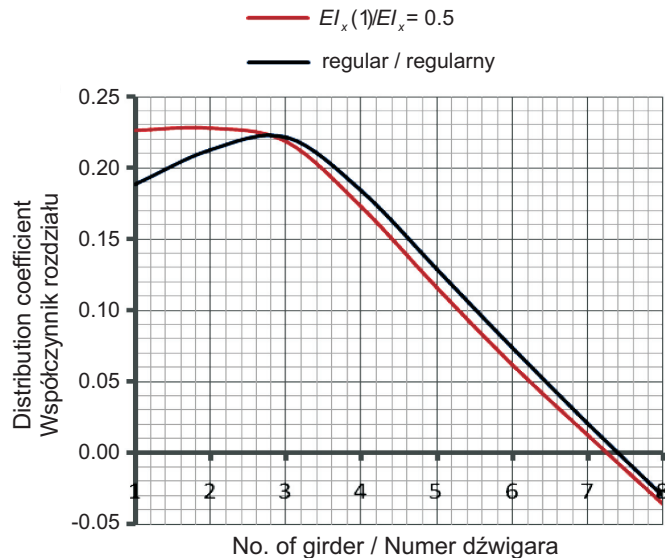


Fig. 9. Graphs of K_{3i} (girder 3) in the regular and irregular spacing

Rys. 9. Wykresy K_{3i} (dźwigara 3) w układzie regularnym i nieregularnym

Z porównania tych wykresów wynika, że dwukrotne zmniejszenie sztywności dźwigara skrajnego wywołuje znaczne zmiany rozdziału poprzecznego obciążenia w strefie dźwigarów przyległych 1, 2, 3. Jest to efekt spełnienia zasady wytrzymałościowej: elementy o większej sztywności przejmują w układzie większą część obciążenia, odciażając tym samym elementy o mniejszej sztywności. Należy przy tym pamiętać, że w układach nieregularnych współczynniki rozdziału poprzecznego obciążenia, w ogólności nie zachowują zasady wzajemności, czyli:

$$K_{ij} \neq K_{ji} . \quad (21)$$

Dotyczy to również metody sztywnej poprzecznic, gdy $z > 30$.

5. WNIOSKI

Rozdział poprzeczny obciążenia jest od dawna stosowany do obliczeń statycznych mostów. Umożliwia on bowiem uproszczenie obliczeń pręseł: wielobelkowych, płytowo-żebrowych i płytowych. Obecnie, mimo wielu udogodnień

load distribution. In such a case, the model of the flat grillage is effective, but in general approach, with the use of FEM. Two graphs created with the solution of the grillage with the general geometry shown in Fig. 7 are compared in Fig. 9. In the considered case, the grillage with regular geometry and stiffness has been adopted (as shown in Fig. 7) and the structure in which the stiffness of the girder 1 is two times smaller than the other main girders, i.e. when $EI_x(1)/EI_x = 0.5$. Both graphs were created with the use of deflections, hence one of them was previously presented in Fig. 8.

The comparison of these graphs shows that a double reduction in stiffness of the edge girder results in significant changes in the transverse load distribution in the zone of adjacent girders 1, 2, 3. It is the effect of meeting the following principle: elements having a larger stiffness take in the system the greater part of the load, thus unloading elements with a lower stiffness. It should be remembered that in irregular systems, the transverse load distribution factors, in general, do not retain the principle of reciprocity, i.e.:

$$K_{ij} \neq K_{ji} . \quad (21)$$

This also applies to the Courbon's method, when $z > 30$.

5. CONCLUSIONS

The transverse load distribution has long been used for static calculations of bridges. It allows to simplify the calculations of spans: multi-beam, beam-slab, and plate bridges. Currently, despite many computational improvements, the methods based on the transverse load distribution are used for case study analyses and in teaching, where it is possible to obtain general conclusions on selected groups of bridges using simple computational models.

The model of a flat grillage in terms of the Leonhardt method [8] is of limited use because of the assumptions: the lack of the bridge plate and a small torsional stiffness (steel girders). As is clear from the general formula, elaborated in the paper, given in formula (14) in the calculations of the characteristic parameter z of the method, the number of the main beams and cross-beams must be taken into account. This also applies to the qualifications of the grillage model in the case of the the Courbon's method.

The model of an orthotropic plate is more versatile (more general). It also enables to solve the models implemented in the Leonhardt method. However, the model of the orthotropic plate in the Guyon-Massonnet and Cusens-Puma

obliczeniowych sposoby oparte na rozdziale poprzecznym obciążeń są wykorzystywane do analiz studialnych i w dydaktyce, gdzie możliwe jest uzyskanie ogólnych wniosków dotyczących wybranych grup obiektów mostowych przy zastosowaniu prostych modeli obliczeniowych.

Model rusztu płaskiego w ujęciu metody Leonhardta [8] ma ograniczone zastosowanie z uwagi na przyjęte założenia: brak płyty pomostowej i małą sztywność na skręcanie (dźwigary stalowe). Jak wynika z wyprowadzonej w pracy ogólnej formule podanej we wzorze (14) w obliczeniach parametru charakterystycznego metody z należy uwzględnić liczbę dźwigarów głównych i poprzecznic przęsłowych. Dotyczy to również kwalifikacji modelu rusztu do przypadku metody sztywnej poprzecznic.

Bardziej uniwersalnym (ogólniejszym) jest model płyty ortotropowej. Umożliwia on bowiem rozwiązywanie również modeli realizowanych w metodzie Leonharda. Model płyty ortotropowej w rozwiązaniach Guyon-Massonnet oraz Cusens-Puma dotyczy jednak układów o regularnej budowie. Najbardziej uniwersalnym modelem jest układ prętowy z zastosowaniem MES [1]. Pozwala on bowiem na odwzorowanie dowolnych mostów, również nieregularnych jako układów prętowych płaskich (2D) i przestrzennych (3D), o różnych schematach statycznych. W tym ujęciu rozwiązania nie jest konieczna korekta rozdziału poprzecznego obciążenia jaką stosujemy w przypadku modeli jedno-przęsłowych, w rzucie prostokątnych jak na Rys. 1 i Rys. 5 czyli gdy schemat mostu jest np. ramowy.

W przypadku wyników podanym na Rys. 8 wskazano na różnice wykresów wynikających z metodyki wyznaczania rozdziału poprzecznego obciążenia. W klasycznej metodzie obliczeń [2-6, 8] wykorzystujemy ugięcia. W przypadku stosowania powierzchni wpływu [1] dogodne jest korzystanie z momentów zginających. W ogólności wyniki w postaci rozdziału poprzecznego obciążenia mogą się różnić.

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

[1] *Machelski C.*: Zastosowanie metody kinematycznej do wyznaczania funkcji wpływu sił wewnętrznych w układach prętowych. *Inżynieria i Budownictwo*, **54**, 7, 1998, 372-375

[2] *Chelstowski Ł., Oleszek R., Radomski W.*: O możliwościach modelowania przęseł dwubelkowych mostów betonowych. *Inżynieria i Budownictwo*, **69**, 7-8, 2013, 422-428

[3] *Hołowaty J.*: Live load distribution for assessment of highway bridges in american and european codes, *Structural Engineering International*, **22**, 4, 2012, 574-578

solutions, concerns regular structures. The most universal is the bar FEM model [1]. It enables to discretise any selected bridges, also irregular ones, as 2D bar structures and 3D structures, with different static schemes. In this kind of a solution, it is not necessary to make the adjustment of the transverse load distribution as we use in single-span models, as in Fig. 1 and Fig. 5, e.g. when the scheme of the bridge is frame.

In the case of the results shown in Fig. 8, the graphs differences have been shown resulting from the methodology of determining the transverse load distribution. In the classical method of calculation [2-6, 8] it is used deflections. In the case of using the influence surface [1] it is convenient to use bending moments. In general, results in the shape of transverse load distribution may vary.

[4] *Machelski C.*: Rozdział poprzeczny obciążenia w przęsłach dwudźwigarowych. *Inżynieria i Budownictwo*, **59**, 9, 2003, 490--493

[5] *Machelski C., Gluch G., Pigoń M.*: Analiza parametryczna trzydźwigarowych przęseł betonowych. *Roads and Bridges - Drogi i Mosty*, **5**, 4, 2006, 41-55

[6] *Cusens A.R., Puma R.P.*: Bridge Deck Analysis. John Wiley & Sons, London, 1975. Analiza statyczna pomostów. WKiŁ, Warszawa, 1981

[7] *Guyon Y.*: Calcul des ponts larges á poutres multiples solidarisées par les entretoises. *Annales des Ponts et Chaussées*, **24**, 9-10, 1946, 553-612

[8] *Leonhardt F.*: Die vereinfachte Berechnung zweiseitig gelagerter Trägerroste. Ernst & Sohn, Berlin, 1939

[9] *Massonnet Ch.*: Méthode de calcul des ponts á poutres multiples tenant compte de leur re-sistance á la torsion. International Association for Bridge and Structural Engineering, Zürich, 1950

[10] *Szczygiel J.*: Mosty z betonu zbrojonego i sprężonego. WKiŁ, Warszawa, 1972

