



JAROSŁAW BĘC<sup>1)</sup>  
 TOMASZ LIPECKI<sup>2)</sup>  
 ANDRZEJ FLAGA<sup>3)</sup>  
 GRZEGORZ BOSAK<sup>4)</sup>

## MODEL INVESTIGATIONS AND NUMERICAL ANALYSIS OF AN ARCH SHAPED FOOTBRIDGE

## BADANIA MODELOWE I NUMERYCZNA ANALIZA AERODYNAMICZNA MOSTU ŁUKOWEGO DLA PIESZYCH

**STRESZCZENIE.** W pracy przedstawiono kompleksową analizę aerodynamiczną mostu dla ruchu pieszego i rowerowego „Kazimierz-Podgórze” przez rzekę Wisłę w Krakowie. Analiza składa się z badań modelowych w tunelu aerodynamicznym oraz obliczeń komputerowych. Przedstawiono wyniki badań dotyczących wyznaczenia funkcji współczynników aerodynamicznych: oporu  $C_x$ , siły unoszenia  $C_y$  oraz momentu  $C_m$  w odniesieniu do trzech sekcji mostu (modeli sekcyjnych), w zależności od kąta napływu wiatru w zakresie od  $-15^\circ$  do  $+15^\circ$ . Wyznaczone funkcje współczynników aerodynamicznych stanowią dane wejściowe do określenia oddziaływania wiatru na przęsło zgodnie z teorią quasi-ustaloną oraz do oceny możliwości wystąpienia drgań samowzbudnych przęsła mostu. W ramach komputerowej analizy aerodynamicznej wyznaczono charakterystyki dynamiczne mostu oraz przemieszczenia, siły wewnętrzne i naprężenia w poszczególnych elementach konstrukcji przy dynamicznym oddziaływaniu wiatru. W celu porównania przeprowadzono analizę statyczną mostu obciążonego wyłącznie ciężarem własnym. Z uwagi na kołowy przekrój poprzeczny dźwigara łukowego mostu wykonano również analizę dynamiczną uwzględniającą siły powodowane wzbudzeniem wirowym łuku, działające równocześnie z obciążeniem dynamicznym wiatrem o średniej prędkości równej prędkości krytycznej. Sprawdzono także kryteria komfortu pieszych przy drganiach generowanych przez wiatr.

**SŁOWA KLUCZOWE:** dynamiczne oddziaływanie wiatru, komfort pieszych, most dla pieszych, teoria quasi-ustalona, tunel aerodynamiczny, wzbudzenie wirowe.

**ABSTRACT.** Complex aerodynamic analysis of the "Kazimierz-Podgórze" bridge for pedestrians and bicycles traffic over Vistula River has been presented in the paper. The analysis consists of model tests performed in the wind tunnel and aerodynamic calculations. Aerodynamic coefficients of drag  $C_x$ , lift  $C_y$  and moment  $C_m$  for three sections of the bridge in dependence on the angle of wind attack in the range  $-15^\circ$  to  $+15^\circ$  have been obtained from the wind tunnel tests. These functions of the aerodynamic coefficients have been used to determine the wind action on the footbridge according to the quasi-steady theory, and to estimate the possibility of self-induced vibrations of the bridge deck. The bridge dynamic characteristics: frequencies and mode shapes, as well as displacements, internal forces and stresses in particular structural elements under the dynamic wind action have been determined numerically. Static analysis of the bridge under a deadweight only has been performed for comparison. Due to circular cross-section of an arch girder, dynamic analysis of the bridge with vortex excitation of the arch girder has also been performed. This excitation has been applied to the structure simultaneously with the dynamic wind action at the mean wind speed equal to the critical wind speed. The criteria for pedestrian comfort in presence of vibrations generated by wind have also been examined.

**KEYWORDS:** dynamic wind action, footbridge, pedestrian comfort, quasi-steady theory, vortex excitation, wind tunnel.

<sup>1)</sup> Wydział Budownictwa i Architektury Politechniki Lubelskiej; j.bec@pollub.pl

<sup>2)</sup> Wydział Budownictwa i Architektury Politechniki Lubelskiej; t.lipecki@pollub.pl (✉)

<sup>3)</sup> Wydział Inżynierii Łądowej Politechniki Krakowskiej; liwpk@windlab.pl

<sup>4)</sup> Wydział Inżynierii Łądowej Politechniki Krakowskiej; gbosak@interia.pl

## 1. OPIS KONSTRUKCJI MOSTU DLA PIESZYCH I ROWERÓW

Most pieszo-rowerowy „Kazimierz-Podgórze” przez Wisłę w Krakowie jest obiektem ciekawym zarówno z architektonicznego, jak i konstrukcyjnego punktu widzenia. Jest to most smukły o dużej rozpiętości, w związku z czym może być podatny na wpływy dynamiczne i aerodynamiczne.

Konstrukcja mostu jest jednoprzęsłowa, o rozpiętości 145,60 m. Głównym elementem nośnym jest łuk składający się z dwóch współśrodkowych rur stalowych o wymiarach odpowiednio: 2020/17,5 mm i 1620/12,5 mm. Przestrzeń między rurami wypełniono betonem C35/45, tworząc rurę zespoloną. Wzniesienie klucza łuku ponad poziom jego utwierdzenia w konstrukcji przyczółków wynosi 14,77 m. Do rury, za pośrednictwem cięgien o średnicy 40 mm, podwieszono dwa pomosty o konstrukcji żelbetowej płytowej. Szerokość pomostów w świetle poręczy wynosi 3,00 m, a całkowita szerokość każdego z nich to 4,06 m. Oba pomosty oparto na poprzecznicach z rur stalowych o średnicy 508 mm i grubości ścianek 16 mm. Pomostom nadano w przekrojach podłużnych kształt łuku pionowego, wypukłego, o promieniu 1098 m. Widok mostu przedstawiono na Rys. 1, zaś przykładowe przekroje poprzeczne na Rys. 2.

## 1. STRUCTURE OF THE FOOTBRIDGE

The “Kazimierz-Podgórze” footbridge over the Vistula River in Cracow is an interesting structure from both an architectural and structural point of view. The bridge can be susceptible to dynamic and aerodynamic loads due to its slenderness and large span.

This is a single-span structure of 145.6 m length. The main carrying element is an arch composed of two concentric steel tubes which dimensions are 2020/17.5 mm and 1620/12.5 mm. Space between tubes is filled with C35/45 concrete creating a composite tube. The arch key-stone is raised 14.7 m over its restraint in the bridge abutments level. There are two decks made of reinforced concrete plate structure hanged to the tube by means of cable links of 40 mm diameter each. The width of the decks between handrails is equal to 3 m while the total width of each deck is equal to 4.06 m. Both decks are supported on the steel tube cross-beams of 508 mm diameter and of 16 mm wall thickness. The shape of decks longitudinal sections is a convex, vertical arc of 1098 m radius. The views of the bridge are shown in Fig. 1 and exemplary cross-sections are shown in Fig. 2.

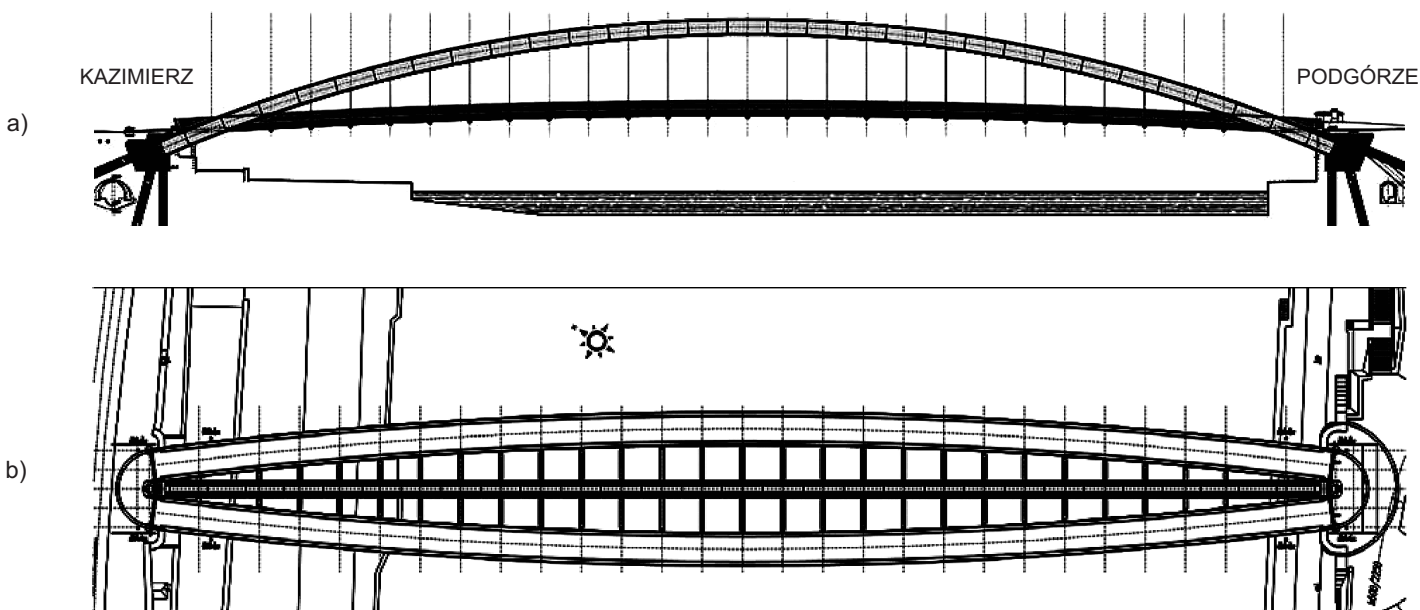


Fig. 1. The footbridge geometry: a) side view, b) top view  
Rys. 1. Geometria mostu: a) widok z boku, b) widok z góry

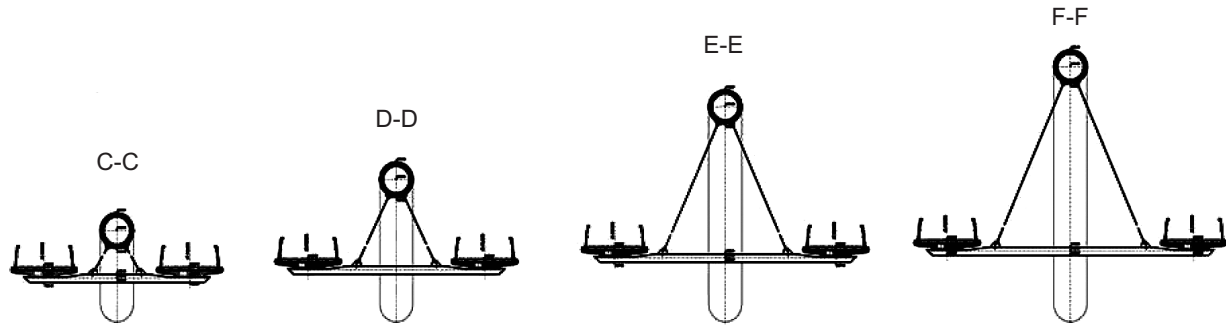


Fig. 2. Cross-sections of the footbridge, according to the changing height of the main arch  
Rys. 2. Przekroje poprzeczne mostu, przy zmieniającej się wysokości łuku nośnego

## 2. INFORMACJE WSTĘPNE

Pomiary i obliczenia aerodynamiczne zostały wcześniej przedstawione w szerszym zakresie w pracach [1 - 3]. Poniżej przedstawiono najważniejsze informacje dotyczące tych etapów analizy aerodynamicznej mostu.

Na podstawie analizy warunków atmosferycznych w miejscu lokalizacji mostu, do badań modelowych i obliczeń aerodynamicznych przyjęto następujące dane:

- most jest zlokalizowany w strefie wiatrowej I, w której ciśnienie wywołane działaniem wiatru o prędkości charakterystycznej  $v_k = 22$  m/s wynosi  $q_k = 0,30$  kPa,
- chropowatość terenu odpowiada kategorii B według Polskiej Normy [4] lub kategorii III według Eurokodu [5].

## 3. BADANIA MODELOWE W TUNELU AERODYNAMICZNYM

Wszystkie pomiary wykonane zostały w tunelu aerodynamicznym z warstwą przyścienną Laboratorium Inżynierii Wiatrowej Politechniki Krakowskiej. Wykonano pomiary prędkości wiatru, pomiary przebiegów czasowych ciśnienia dynamicznego wywołanego działaniem wiatru w obszarze strumienia niezaburzonego przed modelem oraz na powierzchni badanych modeli, pomiary siły oporu aerodynamicznego, aerodynamicznej siły nośnej i momentu aerodynamicznego działających na model sekcyjny przęsła.

W badaniach wykorzystano dwa rodzaje modeli:

1. Model sztywny całego mostu wykonany w skali 1:78, o rozpiętości całkowitej wraz z elementami mocującymi 200 cm. Długość zasadniczej części pomiarowej modelu wynosiła 183,6 cm.

## 2. PRELIMINARIES

Aerodynamic measurements and calculations that relate to the footbridge are shown in wider scope in [1 - 3] whereas the most important information concerning the main stages of the bridge aerodynamic analysis are presented below.

Based on the analysis of the weather conditions at the bridge location, following data have been assumed in aerodynamic calculations and model studies:

- the bridge is located in the wind zone I in which the wind pressure at characteristic speed  $v_k = 22$  m/s is equal to  $q_k = 0.30$  kPa,
- the terrain roughness is classified as category B according to the Polish Standard [4] or category III according to Eurocode [5].

## 3. WIND TUNNEL MODEL TESTING

All the measurements were performed in a boundary layer wind tunnel at the Wind Engineering Laboratory of Cracow University of Technology. The following measurements were performed: wind velocity, measurements of the time-dependent dynamic pressures caused by the wind action in the area of an undisturbed flow in front of the model and on the surface of the models; aerodynamic forces: drag, lift and moment acting on the sectional model of the bridge span.

There were two types of models used for measurements:

1. Rigid model of the whole bridge made in 1:78 scale, 200 cm of total span including fastening elements. Length of the main tested part is equal to 183.6 cm.
2. Three sectional models of both decks made in 1:16.24 scale, 183 cm of total span including fastening elements, 182 cm of tested span. The width of each section

2. Modele sekcyjne trzech segmentów obu pomostów wykonane w skali 1:16,24, o rozpiętości całkowitej wraz z elementami mocującymi 183 cm i rozpiętości pomiarowej 182 cm. Szerokość każdej z sekcji wynosiła 25 cm, natomiast całkowita wysokość przeszła 11,5 cm. Przygotowanie trzech modeli spowodowane było koniecznością rozpatrzenia warunków interferencji aerodynamicznej przy różnych odległościach między pomostami. Oba rodzaje modeli przedstawiono na Rys. 3.

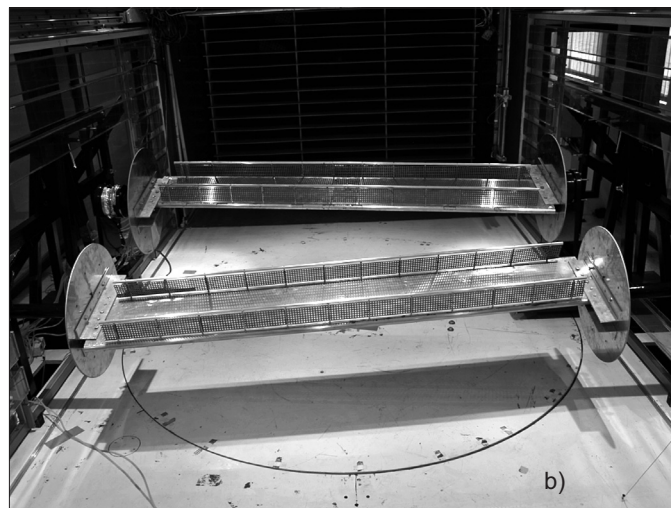


Fig. 3. View of the models attached in the wind tunnel test section: a) model of the entire bridge, b) one of section models  
Rys. 3. Widok modeli ustawionych w przestrzeni pomiarowej tunelu aerodynamicznego: a) model całego mostu, b) jeden z modeli sekcyjnych

Na podstawie pomiarów wyznaczono funkcje współczynników aerodynamicznych mostu w modelu sekcyjnym segmentu przeszły nawietrzny, oznaczonego symbolem  $SA$ , oraz w trzech segmentach przeszły zawietrzny, oznaczonych symbolami  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$ , których położenie zostało przedstawione na Rys. 4. Funkcje współczynników aerodynamicznych wyznaczono w zakresie zmiany kąta napływu wiatru od  $-15^\circ$  do  $+15^\circ$  z krokiem co  $3^\circ$  w odniesieniu do każdego segmentu. Sposób oznaczenia współczynników aerodynamicznych i kątów napływu wiatru przedstawiono na Rys. 5. Współczynniki aerodynamiczne siły oporu  $C_x$ , siły unoszenia  $C_y$  i momentu  $C_m$  obliczono według następujących wzorów:

$$C_x = \frac{\bar{F}_x}{q_{ref}DL}, \quad C_y = \frac{\bar{F}_y}{q_{ref}DL}, \quad C_m = \frac{\bar{M}_z}{q_{ref}D^2L}, \quad (1)$$

w których:

- $q_{ref}$  – ciśnienie referencyjne [Pa],
- $D$  – wymiar charakterystyczny, czyli szerokość całkowita modelu pojedynczego pomostu [m],
- $L$  – długość modelu segmentu pomostu [m],

is equal to 25 cm, whereas the height of the bridge span is equal to 11.5 cm. The three models were prepared due to necessity of examining aerodynamic interference conditions at different distances between decks. Both types of models are shown in Fig. 3.

The functions of aerodynamic coefficients of the bridge in a sectional model of the windward bridge span segment, denoted by  $SA$  symbol and in three segments of the leeward bridge span, denoted by  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  symbols, which positions are shown in Fig. 4, are determined during measurements. The functions of aerodynamic coefficients were determined for the angle of wind attack from  $-15^\circ$  to  $+15^\circ$  with a  $3^\circ$  step in relation to each segment. The way aerodynamic coefficients and the angles of wind attack are denoted as shown in Fig. 5. The aerodynamic coefficients of forces: drag  $C_x$ , lift  $C_y$ , and moment  $C_m$  were calculated according to:

$$C_x = \frac{\bar{F}_x}{q_{ref}DL}, \quad C_y = \frac{\bar{F}_y}{q_{ref}DL}, \quad C_m = \frac{\bar{M}_z}{q_{ref}D^2L}, \quad (1)$$

where:

- $q_{ref}$  – reference pressure [Pa],
- $D$  – characteristic dimension, i.e. total width of a single deck [m],
- $L$  – length of a deck segment model [m],

$\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{M}_z$  – odpowiednio: średnia wartość siły oporu aerodynamicznego [N], siły unoszenia [N] oraz momentu aerodynamicznego [Nm] względem osi wagi aerodynamicznej przy działaniu wiatru na poszczególne sekcje modelu.

$\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{M}_z$  – mean value of the aerodynamic drag [N], lift [N], and moment [Nm], about aerodynamic balance axis parallel to the axis of the span, under wind action on respective model sections.

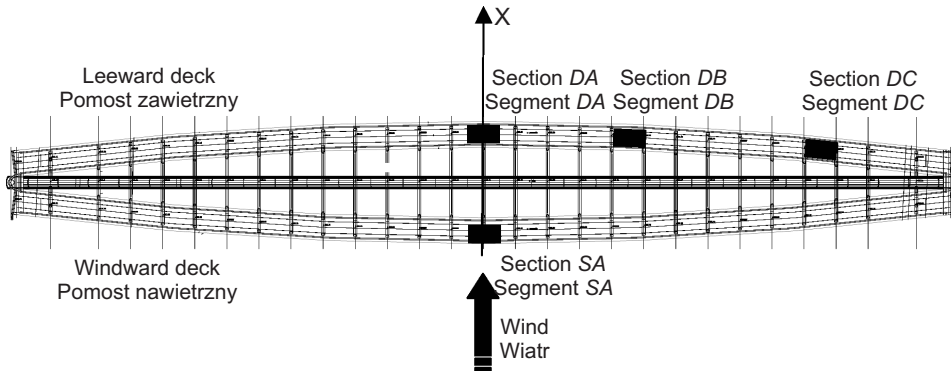


Fig. 4. Bridge segments corresponding to the bridge section models adopted in tests (Fig. 3b)

Rys. 4. Segmenty mostu odpowiadające modelom sekcyjnym przyjętym w badaniach (Rys. 3b)

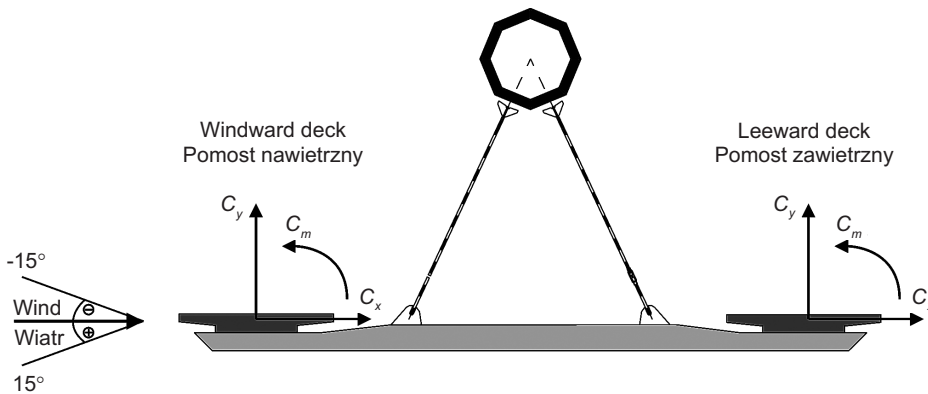


Fig. 5. The definition of the directions of decks aerodynamic forces coefficients  
Rys. 5. Definicja kierunków współczynników sił aerodynamicznych pomostów

Profil wiatru w tunelu aerodynamicznym odpowiadający kategorii B terenu o intensywności turbulencji 25% uzyskano modyfikując warstwę przyścienną za pomocą barier, iglic i klocków. Funkcje współczynników aerodynamicznych w odniesieniu do kąta napływu wiatru wyznaczone w globalnym układzie współrzędnych przedstawiono na Rys. 6. W celu weryfikacji wyników, funkcje współczynników aerodynamicznych sumarycznego oddziaływania wiatru na most wyznaczono przy wykorzystaniu modelu sztywnego całego mostu wykonanego w skali 1:78.

Na podstawie wyznaczonych wartości współczynników aerodynamicznych pomostów (nawietrzny i zawietrzny) zaproponowano przyjęcie we wszystkich segmentach pomostu nawietrzny tych samych współczynników zgodnie z funkcją określoną krzywą SA. Wpływ

The needed wind profile, inside a wind tunnel, corresponding to B category of the terrain with turbulence intensity of 25% is achieved through boundary layer modification using barriers, spires and blocks. The functions of aerodynamic coefficients in relation to the angle of wind attack determined in a global coordinate system are shown in Fig. 6. For the results verification the functions of aerodynamic coefficients of the total wind action on the bridge were determined using the rigid model of the whole bridge in 1:78 scale.

Basing on the determined values of the aerodynamic coefficients of the decks (windward and leeward) assumption of the same values of coefficients, according to the function described by a curve SA, in all windward deck segments was proposed. Moreover the influence of the aerodynamic interference that can appear due to change

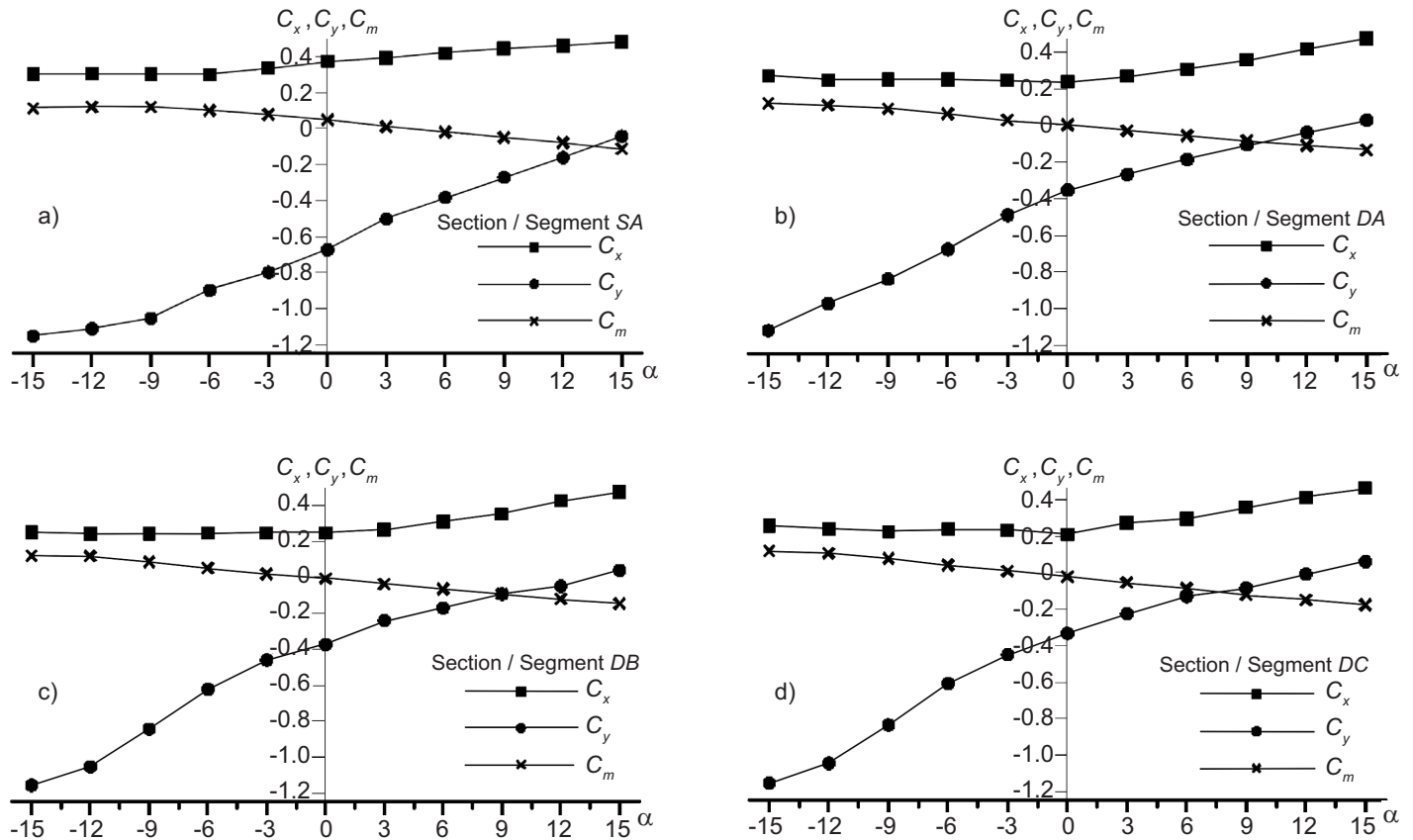


Fig. 6. Values of aerodynamic coefficients functions  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_m$  in sections: a) SA, b) DA, c) DB, d) DC

Rys. 6. Wartości funkcji współczynników aerodynamicznych  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_m$  w segmentach: a) SA, b) DA, c) DB, d) DC

interferencji aerodynamicznej związany ze zmianą odległości pomostu nawietrznego i zawietrznego, zgodnie z wynikami pomiarów, jest nieznaczny i możliwy do pominięcia przy obliczeniach aerodynamicznych określających odpowiedź dynamiczną mostu przy oddziaływaniu wiatru. W związku z tym, zaproponowano przyjęcie we wszystkich segmentach pomostu zawietrznego tych samych wartości współczynników zgodnie z funkcją określoną krzywą  $D$ , którą wyznaczono jako średnią arytmetyczną z wartości krzywych  $DA$ ,  $DB$  i  $DC$ . Tak określone wielkości zestawiono na Rys. 7 wraz ze współczynnikami pomostu nawietrznego.

Przebieg funkcji współczynnika unoszenia aerodynamicznego  $C_y$  wskazuje na dociążenie pomostów w kierunku pionowym. Na podstawie wyznaczonych funkcji współczynników aerodynamicznych, zgodnie z warunkami Den Hartoga, można wnioskować o stabilności zarówno przęsła nawietrznego jak i zawietrznego, w aspekcie możliwości wystąpienia galopowania giętnego i skrętnego.

in a distance between the leeward and windward decks is, according to the measurement results, negligible and it is possible to disregard it at aerodynamic calculations of the bridge dynamic response under the wind action. Due to this fact, the same values of coefficients that relate to the function described by the  $D$  curve, in all the segments of the leeward deck were proposed. The  $D$  curve was calculated as an arithmetic mean of the curves  $DA$ ,  $DB$  and  $DC$ . These determined values together with the windward deck coefficients are juxtaposed in Fig. 7.

The function of the aerodynamic lift coefficient  $C_y$  shows an additional loading of the decks in vertical direction. On the basis of the determined functions of aerodynamic coefficients and according to Den Hartog's conditions one can state that the stability of both the leeward and windward bridge spans in terms of the flexural and torsional galloping possibility is fulfilled.

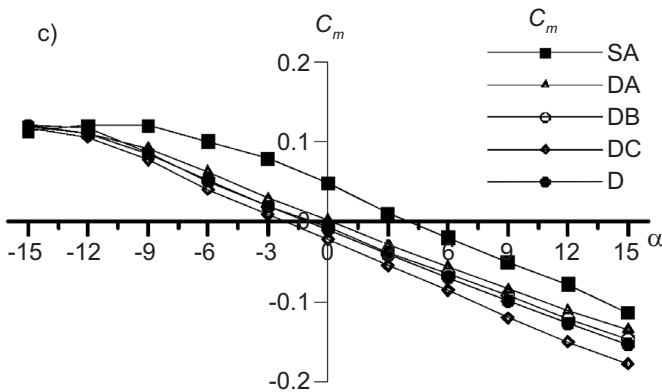
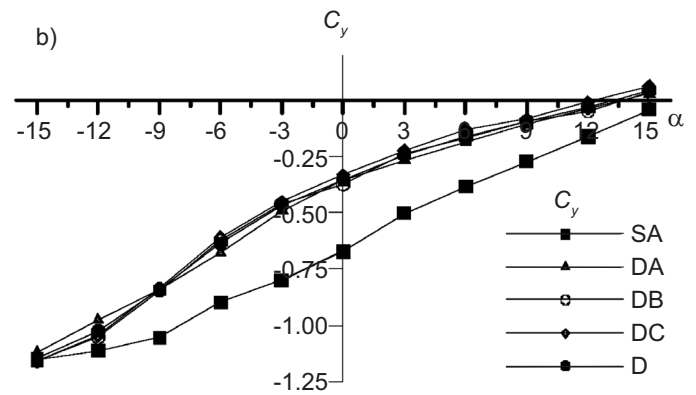
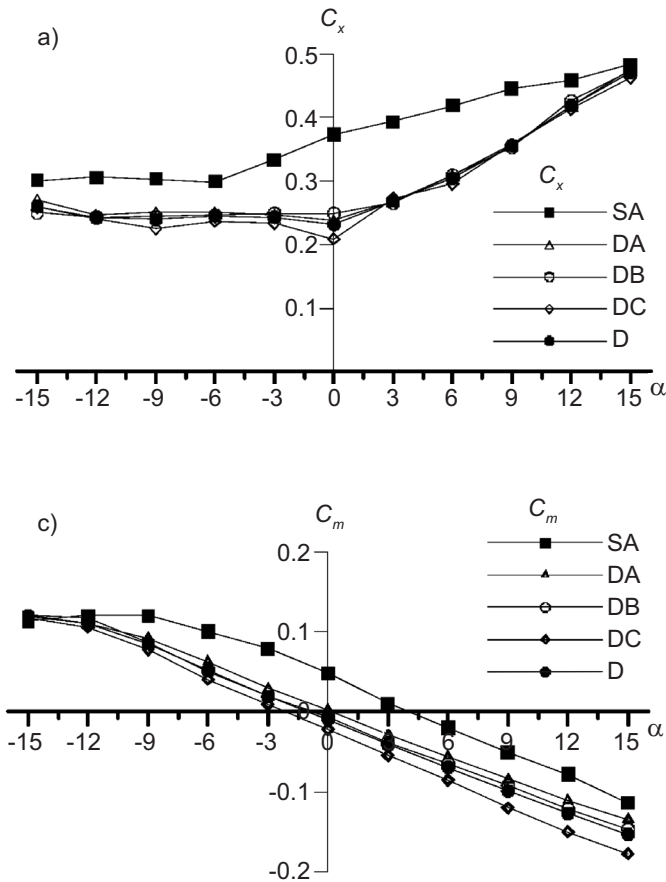


Fig. 7. Comparison of aerodynamic coefficients functions: a)  $C_x$ , b)  $C_y$ , c)  $C_m$  of sections of the leeward deck (function  $D$  is the arithmetic average of the functions  $DA$ ,  $DB$  and  $DC$ ) with the aerodynamic coefficients of the windward deck (function  $SA$ )  
Rys. 7. Porównanie funkcji współczynników aerodynamicznych: a)  $C_x$ , b)  $C_y$ , c)  $C_m$  segmentów przęsła zawietrznego (funkcja  $D$  jako średnia arytmetyczna z funkcji  $DA$ ,  $DB$  i  $DC$ ) ze współczynnikami aerodynamicznymi segmentu przęsła nawietrznego (funkcja  $SA$ )

## 4. NUMERYCZNA ANALIZA AERODYNAMICZNA

### 4.1. MODEL MES KONSTRUKCJI

Wszystkie analizy przeprowadzono przy użyciu systemu MES - ALGOR. W modelowaniu poszczególnych części konstrukcji wykorzystano elementy ramowe. Oś prętów modelu MES łuku, poprzecznic i wieszaków przyjęto jako przechodzące przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych tych elementów. Węzły modelu przyjęto w każdym z przekrojów poprzecznych mostu w sposób pokazany na Rys. 8a. Modelem pomostów są pręty znajdujące się na pionowym mimośrodku  $e$ , w punktach przecięcia osi poprzecznic z osiami pionowymi pomostów. Mimośrodek, jaki nadano prętom pomostu w modelu wynosi 0,2298 m wzdłuż osi  $Z$  globalnego układu współrzędnych. Modelami wieszaków są elementy ramowe, w których zwolniono odpowiednie stopnie swobody w węzłach łączących wieszaki z łukiem i wieszaki z poprzecznicami. Zamocowanie łuku z obu stron przyjęto jako sztywne, natomiast

## 4. NUMERICAL AERODYNAMIC ANALYSIS

### 4.1. FEM MODEL OF THE STRUCTURE

All the analyses were made using ALGOR FEM system. Beam elements were used to create model of respective structural elements. For the FEM model the axes of the arch, cross-beams and hangers were assumed to pass through the centres of gravity of the cross-sections of these elements. In each of the bridge cross-sections, nodes of the model were assumed as shown in Fig. 8a. The deck model is made of two rods located with the vertical eccentric  $e$ , at the points of intersection of the cross-beam axes with deck vertical axis. The eccentric of the deck rods in the model is 0.2298 m along the  $Z$  axis of the global coordinate system. Models of the hangers are beam elements. In these elements appropriate degrees of freedom were released in nodes joining hangers with the arch and hangers with cross-beams. Both ends of the arch are assumed to be supported by a fixed support. Decks are

zamocowanie pomostów z jednej strony przyjęto jako nieprzesuwne, zaś z drugiej zwolniono przesuw wzdłuż osi  $Y$  globalnego układu współrzędnych. Stworzony model MES składa się z 326 elementów: 58 elementów łuku, 158 elementów poprzecznic, 56 elementów pomostów, 54 elementów wieszaków, połączonych w 256 węzłach. Przygotowany do obliczeń model wraz z zaznaczonym globalnym układem współrzędnych przedstawiono na Rys. 8b.

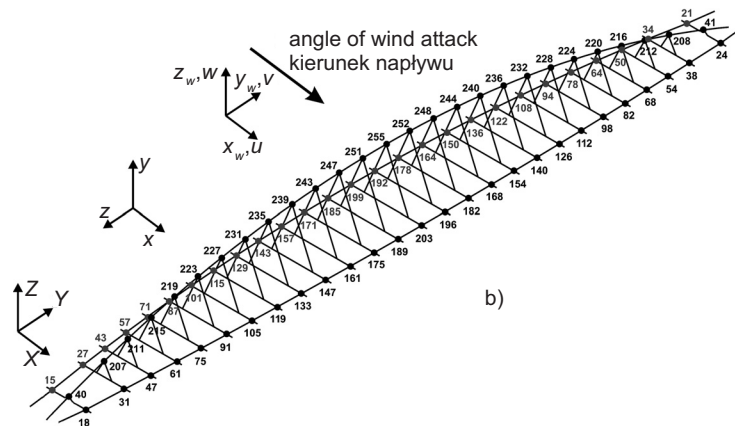
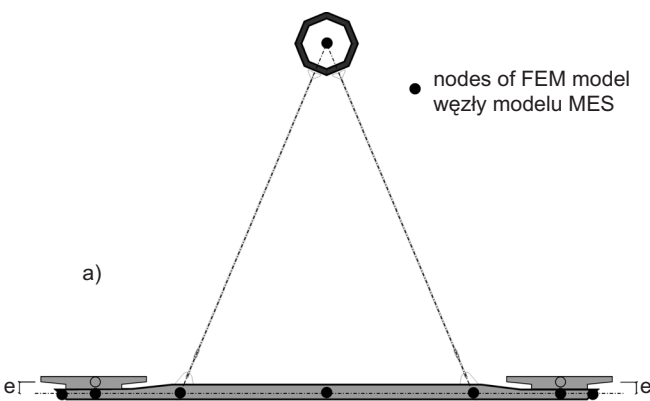


Fig. 8. FEM model of the footbridge: a) nodes in the cross-section, b) the global coordinate system  $XYZ$ , local coordinate systems:  $xyz$  in which aerodynamic coefficients had been defined in model tests in the wind tunnel and  $x_w y_w z_w$  related to the mean wind direction, wind speed components  $u, v, w$  associated with a mean wind direction (in the local coordinate system  $x_w y_w z_w$ ) and nodes of the model, in which time series of wind speed were generated

Rys. 8. Model MES konstrukcji mostu: a) węzły modelu w przekroju poprzecznym, b) globalny układ współrzędnych  $XYZ$ , układy lokalne:  $xyz$ , w którym zdefiniowane były współczynniki aerodynamiczne w badaniach modelowych i  $x_w y_w z_w$  związane ze średnim kierunkiem wiatru, oraz składowe prędkości wiatru  $u, v, w$  związane ze średnim kierunkiem wiatru (w układzie lokalnym  $x_w y_w z_w$ ) oraz węzły modelu, w których generowane były przebiegi prędkości wiatru

Charakterystyki geometryczne poszczególnych elementów przekroju (rury zespolonej, poprzecznic, wieszaków i pomostów) przyjęto w sposób opisany w dokumentacji projektowej i zestawiono w Tabelcy 1. W tabelcy tej zastosowano następujące oznaczenia:

- $A$  – pole przekroju poprzecznego elementu,
- $I_s$  – biegunowy moment bezwładności przekroju,
- $I_2, I_3$  – momenty bezwładności względem osi głównych przekrojów poszczególnych elementów (2 - oś pozioma i 3 - oś pionowa),
- $W_2, W_3$  – wskaźniki wytrzymałości względem osi 2 i 3.

W przypadku rury zespolonej przyjęto zastępcze charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego, wyznaczone na podstawie porównania przemieszczeń modelu rzeczywistego (dwie rury stalowe, przestrzeń wypełniona betonem) i modelu zastępczego prętowego, poddanych obciążeniom testowym.

assumed to be supported at one end by pinned support whereas at the other end a displacement along  $Y$  axis of the global coordinate system is released. The created FEM model is composed of 326 elements: 58 arch elements, 158 cross-beam elements, 56 deck elements, 54 hanger elements all joined in 256 nodes. The model prepared for calculations as well as the assumed global coordinate system are shown in Fig. 8b.

Geometric characteristics of respective cross-sectional elements are juxtaposed in Table 1. All cross-sectional geometric characteristics (composite tube, cross-beams, hangers and decks) are assumed according to the design documentation. There are following denotations taken in the table:

- $A$  – element cross-sectional area,
- $I_s$  – cross-sectional polar moment of inertia,
- $I_2, I_3$  – moments of inertia with respect to cross-sectional principal axes of respective elements (2 - horizontal axis and 3 - vertical axis),
- $W_2, W_3$  – section-moduli with respect to axis 2 and 3.

In case of the composite tube the calculated cross-sectional geometric characteristics have been taken determined on the basis of comparison of the real model displacements (two steel tubes, space filled with concrete) and equivalent beam model. Both models were loaded by test loads.



Table 1. Summary of geometric characteristics of cross-sections  
 Tablica 1. Zestawienie charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych

Element	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_s$ [m <sup>4</sup> ]	$I_2$ [m <sup>4</sup> ]	$I_3$ [m <sup>4</sup> ]	$W_2$ [m <sup>3</sup> ]	$W_3$ [m <sup>3</sup> ]
Composite tube / Rura zespolona	0.34943	0.29105	0.14552	0.14552	0.14408	0.14408
Cross-beams / Poprzecznice	0.02470	0.00150	0.00075	0.00075	0.00295	0.00295
Hangers / Wieszaki	0.00126	$2.513 \cdot 10^{-7}$	$1.256 \cdot 10^{-7}$	$1.256 \cdot 10^{-7}$	$6.283 \cdot 10^{-6}$	$6.283 \cdot 10^{-6}$
Decks / Pomosty	1.05600	0.05690	0.01294	0.75797	0.05630	0.44587

## 4.2. ANALIZA MODALNA

Analizę modalną przeprowadzono przy użyciu systemu ALGOR. Charakterystyki dynamiczne mostu ( $f$  - częstotliwość i  $T$  - okres drgań własnych) zestawiono w Tablicy 2 wraz z opisem postaci drgań, a na Rys. 9 pokazano, w kolejnych widokach: aksonometrycznym, rzucie z góry ( $XY$ ), widokach z boku ( $YZ$  i  $XZ$ ), pierwszą i drugą postać drgań ważne ze względu na możliwość wzbudzenia drgań przez przechodniów oraz trzecią i piątą postać, w których może wystąpić wzbudzenie wirowe łuku.

Table 2. Summary of dynamic characteristics of the bridge  
 Tablica 2. Zestawienie charakterystyk dynamicznych mostu

Lp.	$f$ [Hz]	$T$ [s]	Description / Opis
1	0.36	2.79	Horizontal flexural of an arch (symmetric) / Giętna pozioma łuku (symetryczna) Horizontal flexural-torsional of decks (symmetric) / Giętno-skrętna pozioma pomostów (symetryczna)
2	0.53	1.90	Horizontal flexural of an arch (symmetric) / Giętna pozioma łuku (symetryczna) Horizontal flexural-torsional of decks (symmetric) / Giętno-skrętna pozioma pomostów (symetryczna)
3	0.71	1.41	Vertical flexural of an arch (antisymmetric) / Giętna pionowa łuku (antysymetryczna) Vertical flexural of decks (antisymmetric) / Giętna pionowa pomostów (antysymetryczna)
4	0.86	1.16	Horizontal flexural of an arch (antisymmetric) / Giętna pozioma łuku (antysymetryczna) Horizontal and vertical flexural-torsional of decks (antisymmetric) / Giętno-skrętna pionowa i pozioma pomostów (antysymetryczna)
5	1.13	0.88	Vertical flexural of an arch (symmetric) / Giętna pionowa łuku (symetryczna) Vertical flexural of decks (symmetric) / Giętna pionowa pomostów (symetryczna)
6	1.21	0.83	Horizontal flexural of an arch (antisymmetric) / Giętna pozioma łuku (antysymetryczna) Horizontal flexural of decks (antisymmetric) / Giętna pozioma pomostów (antysymetryczna)
7	1.49	0.67	Horizontal flexural of an arch (symmetric) / Giętna pozioma łuku (symetryczna) Horizontal and vertical flexural-torsional of decks (symmetric) / Giętno-skrętna pionowa i pozioma pomostów (symetryczna)
8	1.71	0.58	Vertical flexural of an arch (symmetric) / Giętna pionowa łuku (symetryczna) Vertical flexural of decks (symmetric) / Giętna pionowa pomostów (symetryczna)
9	2.02	0.50	Vertical flexural of an arch (antisymmetric) / Giętna pionowa łuku (antysymetryczna) Vertical flexural of decks (antisymmetric) / Giętna pionowa pomostów (antysymetryczna)
10	2.13	0.47	Horizontal flexural of an arch (antisymmetric) / Giętna pozioma łuku (antysymetryczna) Horizontal and vertical flexural-torsional of decks (antisymmetric) / Giętno-skrętna pionowa i pozioma pomostów (antysymetryczna)

## 4.2. MODAL ANALYSIS

Modal analysis was performed using the ALGOR system. Bridge dynamic characteristics ( $f$  - frequency and  $T$  - period of free vibrations) were juxtaposed in Table 2 together with the description of the modes of vibrations. In Fig. 9, on different types of views: axonometric, top view ( $XY$ ), side views ( $YZ$  and  $XZ$ ) are shown: the first and the second modes of vibration, which are important due to the possibility of vibrations excitation by the pedestrians as well as the third and the fifth modes of vibrations in which vortex excitation of the arch can appear.

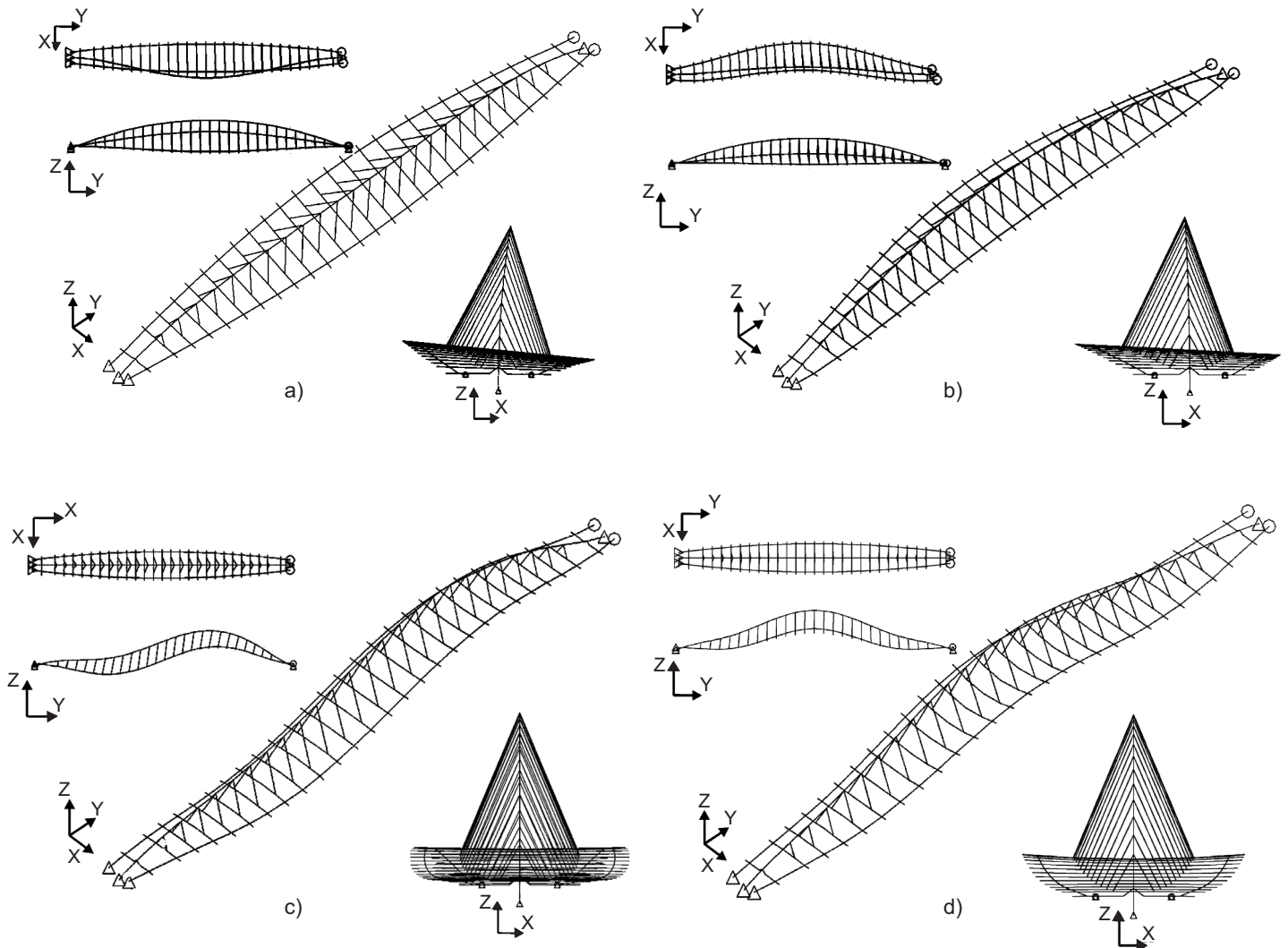


Fig. 9. Modes of vibrations: a) first,  $f_1 = 0.358$  Hz,  $T_1 = 2.792$  s, b) second,  $f_2 = 0.527$  Hz,  $T_2 = 1.898$  s, c) third,  $f_3 = 0.709$  Hz,  $T_3 = 1.411$  s, d) fifth,  $f_5 = 1.130$  Hz,  $T_5 = 0.885$  s

Rys. 9. Postaci drgań własnych: a) pierwsza,  $f_1 = 0,358$  Hz,  $T_1 = 2,792$  s, b) druga,  $f_2 = 0,527$  Hz,  $T_2 = 1,898$  s, c) trzecia,  $f_3 = 0,709$  Hz,  $T_3 = 1,411$  s, d) piąta,  $f_5 = 1,130$  Hz,  $T_5 = 0,885$  s

## 5. MODEL DYNAMICZNEGO ODDZIAŁYWANIA WIATRU

### 5.1. WYBÓR WĘZŁÓW KONSTRUKCJI MOSTU DO SYMULACJI OBCIĄŻENIA

W obliczeniach aerodynamicznych mostu zastosowano algorytm oparty na takich samych założeniach, jak w przypadku mostu Kazimierz-Ludwinów, którego analizę aerodynamiczną opisano w pracy [6]. Jednakże, sposób przykładania sił aerodynamicznych do węzłów modelu konstrukcji w niniejszym przypadku znacznie się różni.

## 5. DYNAMIC WIND ACTION MODEL

### 5.1. SELECTION OF THE BRIDGE STRUCTURAL NODES FOR THE WIND LOAD SIMULATION

The algorithm based on the same assumptions like in the case of aerodynamic analysis of the Kazimierz-Ludwinów footbridge described in the paper [6] was applied for considered footbridge. However, the way of the structural nodes loading with aerodynamic forces differs significantly. Algorithm assumed for the wind dynamic action

Algorytm przyjęty w obliczeniach modelu dynamicznego oddziaływania wiatru przedstawiono na Rys. 10. W wybranych punktach mostu przeprowadzono symulację turbulentnego pola wiatru. Generacja pola wiatru przeprowadzona została w 81 punktach odpowiadającym węzłom modelu MES. Wybrano węzły w kolejnych przekrojach poprzecznych założonych w osiach wieszaków i poprzecznicy (27 płaszczyzn): 2 węzły stanowiące połączenie pomostów nawietrznego i zawietrznego z poprzecznicami i 1 węzeł w osi łuku (Rys. 8).

model calculations is shown in Fig. 10. A simulation of a turbulent wind field was performed at the chosen points of the bridge. The simulation of the wind field was performed at 81 points being the nodes of FEM model. The nodes at consecutive cross-sections created by the axes of hangers and cross-beams (27 surfaces) were chosen: two nodes at a joint of the windward and leeward decks with the cross-beam and one node on the arch axis (Fig. 8).

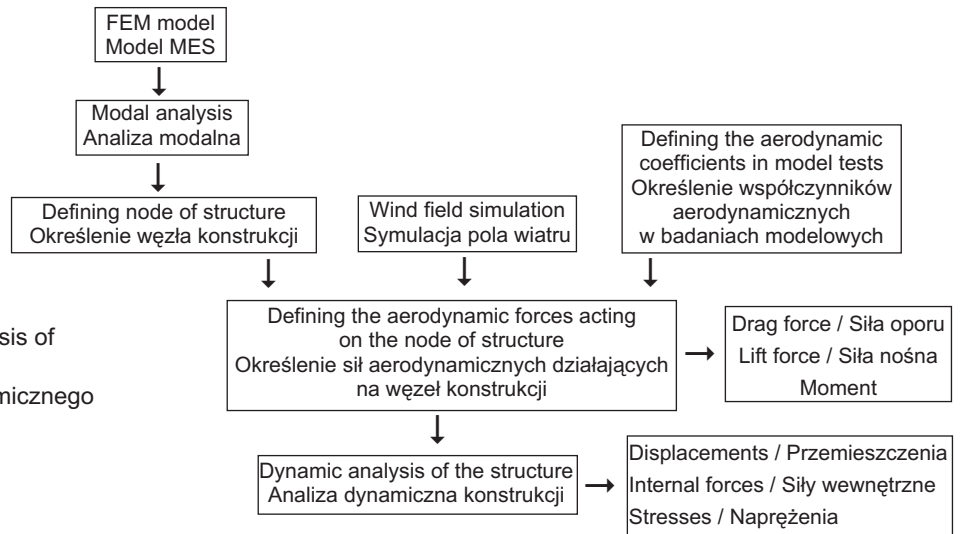


Fig. 10. The algorithm adopted in the analysis of the dynamic wind action

Rys. 10. Algorytm przyjęty w analizie dynamicznego oddziaływania wiatru

## 5.2. SYMULACJA TURBULENTNEGO POLA WIATRU

Do symulacji wykorzystany został program WINDSYM stworzony w Katedrze Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej. Program ten pozwala generować stochastyczne pole wiatru w wielu punktach przestrzeni, w trzech kierunkach, wykorzystując metody symulacji procesów losowych oparte na znajomości funkcji gęstości widmowej mocy i funkcji korelacji tych procesów: WAWS (*Weighted Amplitude Wave Superposition*), MR (*Multi-Regressive*) lub ARMA (*Auto-Regressive Moving Average*).

W procesie symulacji w rozpatrywanym przypadku przyjęto następujące parametry wiatru: funkcja gęstości widmowej mocy według propozycji von Kármána, potęgowy profil pionowy prędkości wiatru, rodzaj terenu B – nierówny, zadrzewiony z budynkami o wysokości do 10 m, metoda symulacji: WAWS, skala turbulencji: 100 m, prędkość średnia na wysokości 10 m: 22 m/s, wielkość kroku czasowego: 0,01 s, liczba kroków czasowych: 8192, szerokość przedziału widma: 0,02 Hz, liczba przedziałów widma: 100. W wyniku przyjęcia powyższych parametrów pola

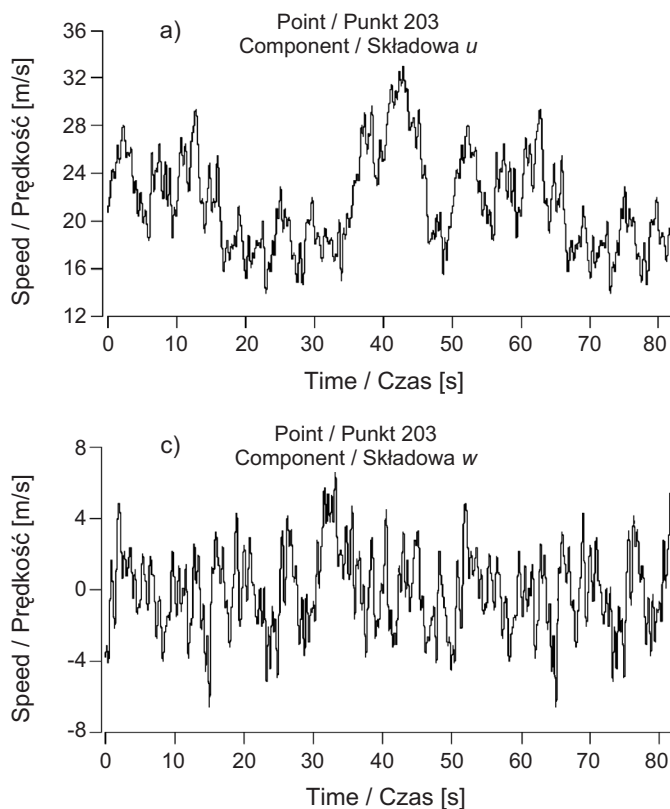
## 5.2. SIMULATION OF THE TURBULENT WIND FIELD

The WINDSYM program created in the Department of Structural Mechanics of Lublin University of Technology was used for simulations. This software enables a user to generate a stochastic wind field in many points of 3D space. It uses random processes simulation methods based on the power spectral density functions and correlation functions of these processes: WAWS (*Weighted Amplitude Wave Superposition*), MR (*Multi-Regressive*) or ARMA (*Auto-Regressive Moving Average*).

In the simulation process of the presented analysis the following wind parameters were assumed: a power spectral density function according to von Kármán's proposal, power-law vertical wind speed profile, type B of the terrain – uneven, forested with buildings of 10 m height, simulation method: WAWS, the turbulence length scale: 100 m, mean speed at the height of 10 m: 22 m/s, size of time step: 0.01 s, number of time steps: 8192, the spectral interval: 0.02 Hz, number of spectral intervals: 100. Due to assumption of the above wind velocity field parameters

prędkości wiatru, składowe częstotliwościowe wyższe niż 2 Hz uległy eliminacji, co odpowiada rzeczywistej charakterystyce częstotliwościowej działania wiatru, gdzie rzędne spektrum znacząco maleją powyżej tej granicy.

Składowe prędkości wiatru zostały określone w lokalnym układzie współrzędnych  $x_w, y_w, z_w$  związanym ze średnim kierunkiem wiatru. Następnie dokonano ich transformacji do układu współrzędnych  $xyz$ , w którym zdefiniowane były współczynniki aerodynamiczne w badaniach modelowych. W tych układach wyznaczone zostały później siły aerodynamiczne. Układy współrzędnych: globalny  $XYZ$ , związany z konstrukcją mostu oraz lokalne  $x_w, y_w, z_w$  i  $xyz$ , związane odpowiednio ze średnim kierunkiem wiatru i z definicją współczynników aerodynamicznych przedstawiono na Rys. 8b. Symulacja pola prędkości wiatru została przeprowadzona z wykorzystaniem metody WAWS bazującej na algorytmie Shinozuka-Jan [7]. Numery i współrzędne węzłów, w których przeprowadzono symulację zostały również pokazane na Rys. 8b. Przykładowe przebiegi prędkości wiatru  $u, v, w$ , w trzech kierunkach układu współrzędnych, w wybranym punkcie w środku mostu przedstawiono na Rys. 11.



constituent frequencies higher than 2 Hz were eliminated which corresponds to the real frequency characteristic of the wind action where values of the spectrum are significantly decreasing above that limit.

The wind speed components were determined in a local  $x_w, y_w, z_w$  coordinate system with respect to a mean wind direction. Next, a transformation of these coordinates to coordinate system  $xyz$  in which aerodynamic coefficients had been defined in model tests in the wind tunnel was done. Aerodynamic forces are determined in that coordinate system. The coordinate systems: the global  $XYZ$  connected to the bridge structure as well as local  $x_w, y_w, z_w$  and  $xyz$  related to the mean wind direction and to the definition of aerodynamic coefficients are shown in Fig. 8b. Simulations of the wind velocity field was performed using the WAWS method basing on the Shinozuka-Jan algorithm [7]. Numbers and nodes coordinates at which simulations were performed are also shown in Fig. 8b. Exemplary functions of  $u, v, w$  wind velocity components at a chosen point in the middle of the bridge are shown in Fig. 11.

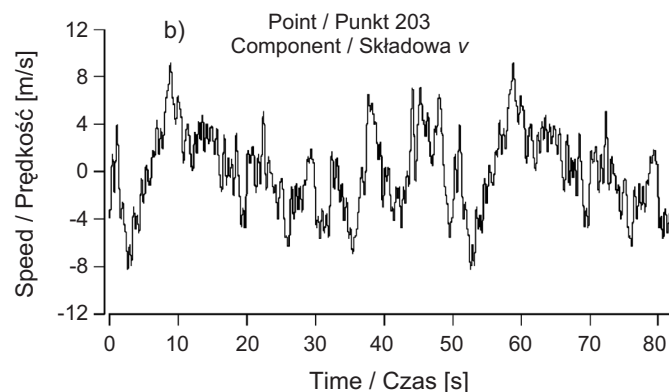


Fig. 11. Time series of wind velocity at node 203: a)  $u$  component, b)  $v$  component, c)  $w$  component  
Rys. 11. Przebiegi czasowe prędkości wiatru w węźle 203: a) składowa  $u$ , b) składowa  $v$ , c) składowa  $w$

### 5.3. OKREŚLENIE SIŁ POWODOWANYCH DYNAMICZNYM ODDZIAŁYWANIEM WIATRU

Na podstawie trzech składowych wektora prędkości wiatru przypisanych poszczególnym węzłom mostu wygenerowane zostało zmienne w czasie oddziaływanie wiatru na łuk i pomosty. Trzy składowe obciążenia (Rys. 12) przypadające na jednostkę długości elementu pomostu określone zostały zgodnie z teorią quasi-ustaloną [8 - 10] za pomocą następujących wzorów:

- siła oporu aerodynamicznego

$$W_x(t) = \frac{1}{2} \rho v^2(t) C_x(\alpha(t)) D, \quad (2)$$

- aerodynamiczna siła unoszenia

$$W_z(t) = \frac{1}{2} \rho v^2(t) C_z(\alpha(t)) D, \quad (3)$$

- moment aerodynamiczny

$$W_m(t) = \frac{1}{2} \rho v^2(t) C_m(\alpha(t)) D^2, \quad (4)$$

w których:

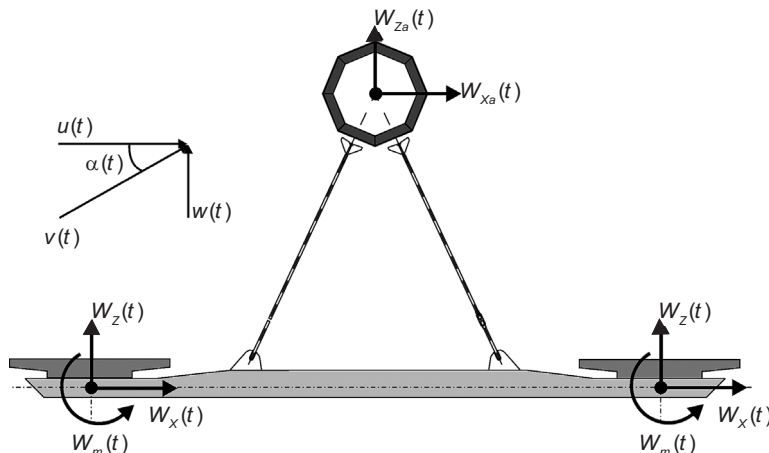
$\rho$  – gęstość powietrza ( $\rho = 1,23 \text{ kg/m}^3$ ),

$v(t)$  – składowa prędkości wiatru prostopadła do osi mostu liczona według wzoru:

$$v(t) = \sqrt{u^2(t) + w^2(t)},$$

gdzie  $u$  jest składową chwilowej prędkości wiatru zgodną ze średnim kierunkiem wiatru, a  $w$  jest składową pionową,

$D$  – wymiar charakterystyczny mostu, odpowiadający przyjętemu w badaniach, czyli całkowita szerokość pomostu równa 4,057 m.



### 5.3. DETERMINATION OF FORCES CAUSED BY THE DYNAMIC WIND ACTION

On the basis of the three wind velocity vector components attached to respective bridge nodes the time varying wind action on the arch and decks was generated. Three components of the load (Fig. 12) per unit length of the deck element are determined according to the quasi-steady theory [8 - 10] by using the following formulas:

- aerodynamic drag force

$$W_x(t) = \frac{1}{2} \rho v^2(t) C_x(\alpha(t)) D, \quad (2)$$

- aerodynamic lift force

$$W_z(t) = \frac{1}{2} \rho v^2(t) C_z(\alpha(t)) D, \quad (3)$$

- aerodynamic moment

$$W_m(t) = \frac{1}{2} \rho v^2(t) C_m(\alpha(t)) D^2, \quad (4)$$

where:

$\rho$  – air density ( $\rho = 1,23 \text{ kg/m}^3$ ),

$v(t)$  – wind velocity component perpendicular to the bridge axis determined according to the formula:

$$v(t) = \sqrt{u^2(t) + w^2(t)},$$

where  $u$  is a component of an instantaneous velocity of the wind according to the mean angle of wind attack,  $w$  is a vertical component,

$D$  – characteristic dimension of the bridge, corresponding to one taken in measurements, i.e. a deck width of 4.057 m.

Fig. 12. Components of wind velocity and aerodynamic forces acting in the cross-section of the footbridge  
Rys. 12. Składowe prędkości wiatru i siły aerodynamiczne działające w przekroju poprzecznym mostu

W teorii quasi-ustalonej przyjmuje się bliskie rzeczywistości założenie, że turbulentne pole wiatru może być modelowane tak, jakby był to przepływ ustalony. Wobec powyższego, funkcje współczynników aerodynamicznych mogą być wyznaczone w warunkach przepływu ustalonego z uwzględnieniem zmian kąta napływu wiatru. Przyjęto jednakową, uśrednioną funkcję współczynników aerodynamicznych we wszystkich segmentach pomostu zawietrzego (por. punkt 2). Wartości współczynników pomostów nawietrzego i zawietrzego w danej chwili czasowej wyznaczone zostały w zależności od względnego chwilowego kąta napływu wiatru  $\alpha(t) = \arctg \frac{w(t)}{u(t)}$ .

W odniesieniu do segmentów łuku, na każdym kroku czasowym wyznaczone zostały chwilowe lokalne układy współrzędnych związane z chwilowym kierunkiem napływu wiatru. W tych układach współrzędnych określone zostały składowe prędkości wiatru: styczna, normalna (prostopadła do osi pręta i leżąca w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektor chwilowej prędkości wiatru i oś pręta) i binormalna. W wyniku takiej definicji układu współrzędnych składowa binormalna na każdym kroku czasowym była równa 0. Składowa normalna oddziaływania wiatru została wyznaczona za pomocą wzoru:

$$W_n(t) = \frac{1}{2} \rho v_n^2(t) C_n D_a, \quad (5)$$

gdzie:

$v_n$  – składowa normalna prędkości chwilowej wiatru,

$C_n$  – współczynnik aerodynamiczny przekroju kołowego łuku,

$D_a$  – zewnętrzna średnica przekroju poprzecznego łuku ( $D_a = 2,02$  m).

Składowa styczna została w obliczeniach pominięta, ze względu na jej małą wartość. Wyznaczone oddziaływanie w układzie lokalnym zostało na każdym kroku zamienione na składowe globalne.

Ostatecznie, na podstawie prędkości chwilowych i chwilowego kąta napływu wiatru, wyznaczono w każdym z węzłów charakterystycznych trzy składowe obciążenia wiatrem pomostów  $W_X, W_Z, W_M$  i trzy składowe obciążenia wiatrem łuku  $W_{Xa}, W_{Za}, W_{Ma}$ , określone w globalnym układzie współrzędnych  $XYZ$ . Oddziaływania te zostały uwzględnione w dalszej analizie jako uogólnione siły skupione, zmienne w czasie, przypisane poszczególnym węzłom modelu.

In the quasi-steady theory one assumes that a turbulent wind field can be modelled as steady flow, which is close to reality. This means that functions of aerodynamic coefficients can be determined in steady flow conditions taking into account variations of the angle of wind attack. The same averaged function of aerodynamic coefficients was assumed for all the segments of the leeward deck (cf. point 2). Values of the coefficients of leeward and windward decks, at each time step, were determined in relation to the instantaneous relative angle of wind attack  $\alpha(t) = \arctan \frac{w(t)}{u(t)}$ .

For each arch element, instantaneous local coordinate systems were tied to instantaneous angle of wind attack at each time step. In these coordinate systems the following wind velocity components were determined: tangential, normal (perpendicular to the axis of the rod and located in a plane created by instantaneous wind velocity vector and rod axis) and binormal. Due to such definition of the coordinate system the binormal component at each time step was equal to 0. The normal component of the wind action was calculated by the formula:

$$W_n(t) = \frac{1}{2} \rho v_n^2(t) C_n D_a, \quad (5)$$

where:

$v_n$  – a normal component of the instantaneous wind velocity,

$C_n$  – an aerodynamic coefficient of the arch circular cross-section,

$D_a$  – an outer diameter of the arch cross-section ( $D_a = 2.02$  m).

Tangential component was neglected in calculations due to its small value. Determined wind loads were changed at each time step from local to global coordinates.

Finally, basing on the instantaneous velocities and instantaneous angles of wind attack, three components of decks wind load  $W_X, W_Z, W_M$  and three components of arch wind load  $W_{Xa}, W_{Za}, W_{Ma}$  at each of the characteristic nodes were determined in a  $XYZ$  global coordinate system. These loads were included in further analysis as generalised concentrated forces varying over time, located at respective nodes of the model.

## 5.4. METODY I PARAMETRY SYMULACJI DYNAMICZNEGO ODDZIAŁYWANIA WIATRU NA MOST

Analiza odpowiedzi konstrukcji poddanej dynamicznemu oddziaływaniu wiatru została przeprowadzona z wykorzystaniem systemu ALGOR. W jej trakcie użyty został procesor oparty na metodzie bezpośredniego całkowania równań ruchu. W analizie dynamicznej przyjęto następujące parametry:

- liczba kroków czasowych: 8192,
- wielkość kroku czasowego: 0,01 s,
- liczba węzłów modelu, w których przyłożone zostało obciążenie zmienne w czasie: 81,
- logarytmiczny dekrement tłumienia:  $\Delta = 0,06$ .

Na podstawie wartości  $\Delta$  obliczone zostały parametry tłumienia drgań konstrukcji:

$$\alpha = \frac{\Delta}{\pi} \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = 0,025585, \quad (6)$$

$$\beta = \frac{\Delta}{\pi} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} = 0,003435,$$

niezbędne do określenia macierzy tłumienia w modelu masowo-sztywnościowym tłumienia:

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K} \quad (7)$$

gdzie:

- $\omega_1, \omega_2$  – dwie kolejne częstotliwości kołowe drgań własnych mostu,
- $\mathbf{C}, \mathbf{M}, \mathbf{K}$  – odpowiednio macierze tłumienia, masy i sztywności.

## 6. WYNIKI OBLICZEŃ

### 6.1. METODYKA

Przeprowadzono następujące analizy: dynamiczną mostu poddanego oddziaływaniu wiatru, statyczną konstrukcji obciążonej ciężarem własnym, kombinacją tych dwóch obciążeń oraz siłami powodowanymi wzbudzeniem wirowym łuku nośnego w dwóch przypadkach. Dodatkowo sprawdzono kryteria komfortu pieszych na moście przy drganiach generowanych przez wiatr. W przypadkach każdej kombinacji obciążeń za pomocą metody bezpośredniego całkowania równań ruchu wyznaczone zostały przebiegi przemieszczeń węzłów konstrukcji na poszczególnych krokach czasowych.

## 5.4. METHODS AND PARAMETERS OF THE SIMULATION OF THE DYNAMIC WIND ACTION ON THE BRIDGE

Analysis of structural response under wind dynamic load was performed using ALGOR system. Processor based on direct integration of equations of motion method was used for analysis. In dynamic analysis the following parameters were assumed:

- number of time steps: 8192,
- time step size: 0.01 s,
- number of nodes of the model at which the load varying over time was applied: 81,
- logarithmic decrement of damping:  $\Delta = 0.06$ .

Vibration damping parameters of the structure were determined basing on the  $\Delta$  values:

$$\alpha = \frac{\Delta}{\pi} \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = 0.025585, \quad (6)$$

$$\beta = \frac{\Delta}{\pi} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} = 0.003435,$$

which are essential for determining a damping matrix in the damping stiffness-mass model:

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K} \quad (7)$$

where:

- $\omega_1, \omega_2$  – two consecutive circular frequencies of the bridge free vibrations,
- $\mathbf{C}, \mathbf{M}, \mathbf{K}$  – damping matrix, mass matrix and stiffness matrix respectively.

## 6. CALCULATIONS RESULTS

### 6.1. METHODOLOGY

Following analyses were performed: dynamic of the bridge under a wind action, static of the structure subjected to deadweight, sum of these two loads and loaded by forces caused by vortex excitation of the carrying arch in two cases. Additionally pedestrian comfort criteria were checked for the bridge at vibrations generated by the wind. In case of each of the loads combinations the functions of structural nodes displacements in respective time steps were determined using the method of direct integration of equations of motion.

## 6.2. WPŁYW DYNAMICZNEGO ODDZIAŁYWANIA WIATRU

Wyznaczono maksymalne przemieszczenia w kierunku działania wiatru (oś  $X$  globalnego układu współrzędnych) i w kierunku pionowym (oś  $Z$ ). Znajomość przemieszczeń węzłów pozwoliła na wyznaczenie sił wewnętrznych i naprężeń w elementach konstrukcji na każdym kroku czasowym. Na podstawie wartości naprężeń normalnych wywoływanych przez poszczególne składowe siły wewnętrznych ( $P, M_2, M_3$ ) określone zostały najbardziej niekorzystne rozkłady naprężeń normalnych za pomocą wzoru:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{P}{A} \pm \frac{M_2}{W_2} \pm \frac{M_3}{W_3}, \quad (8)$$

gdzie:  $P$  – oznacza siły osiowe,

$M_2, M_3$  – momenty zginające działające w dwóch prostopadłych do osi pręta kierunkach określonych poprzez lokalne układy odniesienia związane z przekrojem poprzecznym każdego elementu skończonego w modelu konstrukcji,

$W_2, W_3$  – odpowiednie wskaźniki wytrzymałości przekroju pręta.

Wykonano analizę statyczną konstrukcji mostu obciążonego wyłącznie ciężarem własnym, w wyniku której wyznaczono przemieszczenia i naprężenia w elementach konstrukcji. Wielkości ekstremalnych przemieszczeń obliczonych w wyniku symulacji dynamicznego oddziaływania wiatru zostały zsumowane z przemieszczeniami obliczonymi jako efekt działania ciężaru własnego konstrukcji mostu w analizie statycznej. Ekstremalne przemieszczenia i naprężenia w poszczególnych elementach mostu zestawiono w Tablicach 3 i 4.

Table 3. Extreme displacements of the bridge elements under wind dynamic action and deadweight  
Tablica 3. Ekstremalne przemieszczenia w elementach mostu przy dynamicznym oddziaływaniu wiatru i ciężarze własnym konstrukcji

		$x_{\max}$	$x_{\min}$	$z_{\max}$	$z_{\min}$
		[m]	[m]	[m]	[m]
Decks Pomosty	Wind Wiatr	0.031	-0.002	0.022	-0.026
	Deadweight Ciężar własny	–	–	–	-0.185
Arch Łuk	Wind Wiatr	0.046	-0.016	0.005	-0.007
	Deadweight Ciężar własny	–	–	–	-0.130

## 6.2. INFLUENCE OF DYNAMIC WIND ACTION

The maximum displacements in the wind action direction ( $X$  axis of the global coordinate system) as well as in a vertical direction ( $Z$  axis) were determined. The knowledge of nodes displacements enables to compute the internal forces and stresses in the structural elements at each time step. Based on the values of the normal stresses caused by respective internal forces components ( $P, M_2, M_3$ ) the most unfavourable normal stresses distributions were determined according to formula:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{P}{A} \pm \frac{M_2}{W_2} \pm \frac{M_3}{W_3}, \quad (8)$$

where:  $P$  – denotes axial force,

$M_2, M_3$  – bending moments acting in two perpendicular directions determined by local reference system related to the cross-section of the respective finite element in a structure model,

$W_2, W_3$  – respective section moduli of a cross-section.

Static analysis of the bridge under deadweight only was performed through which displacements and stresses at structural elements were determined. Values of extreme displacements calculated through the dynamic wind action simulation were added to the displacements resulting from deadweight in a static analysis. Extreme displacements and stresses in respective bridge elements are juxtaposed in Tables 3 and 4.

Table 4. Extreme normal stresses of the bridge elements under wind dynamic action and deadweight  
Tablica 4. Ekstremalne naprężenia w elementach mostu przy dynamicznym oddziaływaniu wiatru i ciężarze własnym konstrukcji

	Wind Wiatr	Deadweight Ciężar własny
	[MPa]	[MPa]
Arch Łuk	-16.3 ÷ -4.9	-82.4 ÷ -59.0
Hangers Wieszaki	5.5 ÷ 16.6	69.6 ÷ 250.0
Cross-beams Poprzecznicze	-51.5 ÷ 48.7	-200.0 ÷ 150.0
Decks Pomosty	-3.5 ÷ 3.2	-11.9 ÷ 3.5



Analizując wyniki obliczeń, można stwierdzić, że ekstremalne przemieszczenia i naprężenia w poszczególnych elementach konstrukcyjnych mostu wywołane ciężarem własnym są na ogół znacznie większe od efektów dynamicznego oddziaływania wiatru w warunkach turbulencji atmosferycznej. Dynamiczne oddziaływanie wiatru nie stanowi zagrożenia bezpieczeństwa konstrukcji mostu. Zaobserwowane znaczne wartości naprężeń w wieszakach skrajnych spowodowane są niedokładnym odwzorowaniem masywnych połączeń przy wybranym sposobie modelowania konstrukcji mostu za pomocą elementów prętowych. W rzeczywistości pręty te mają znacznie mniejsze długości niż elementy modelowane pomiędzy osiami łączonych elementów składowych mostu i tworzą niemal sztywny element bryłowy w strefach przypodporowych mostu.

### 6.3. ANALIZA WZBUDZENIA WIROWEGO ŁUKU

Rozpatrzono dwa warianty obciążenia wzbudzeniem wirowym rury zespolonej łuku. Jako najbardziej niekorzystną założono możliwość wzbudzenia wirowego w przypadku antysymetrycznej i symetrycznej postaci drgań giętnych łuku (odpowiednio trzecia i piąta postać drgań - Rys. 9 c,d). W obu postaciach drgań założono dynamiczne oddziaływanie wiatru na cały most, przy kierunku wektora średniej prędkości wiatru zgodnym z osią  $X$  globalnego układu współrzędnych oraz dodatkowo wzbudzenie wirowe w płaszczyźnie pionowej, prostopadle do osi łuku. Wartość prędkości średniej przyjęto równą prędkości krytycznej dla danej postaci drgań. Modelowanie dynamicznego oddziaływania wiatru odbywało się zgodnie z procedurami opisanymi w rozdziale 5, ze zmianą średniej prędkości wiatru do wartości prędkości krytycznej. Obciążenie wzbudzeniem wirowym w węźle  $j$  przy prędkości krytycznej  $i$  przyjęto według wzoru:

$$p_{j,i} = q_{kr,i} D_a C_{y,i} \sin(\omega_i t) \cdot \psi_j, \quad (9)$$

w którym:

$q_{kr,i}$  – ciśnienie wywołane wiatrem o prędkości krytycznej,  $q_{kr,i} = \rho v_{kr,i}^2 / 2$ ,

$\rho$  – gęstość powietrza,

$v_{kr,i}$  – prędkość krytyczna wiatru, przy której może wystąpić wzbudzenie wirowe,  $v_{kr,i} = f_i D / St$ ,

$f_i$  –  $i$ -ta częstotliwość drgań własnych,

Analysing the computational results one can find that the extreme stresses and displacements in respective structural elements of the bridge caused by deadweight are generally much higher than those caused by the dynamic wind action in the conditions of atmospheric turbulence. The dynamic wind action is not a threat for the safety of the bridge structure. High values of stresses observed in the outer hangers are caused by inaccuracy in modelling of massive joints in a chosen modelling method of the bridge structural members as beam elements. In reality these rods are much shorter than the elements modelled between the axes of the constituent joined elements of the bridge and create almost stiff solid element in the support zone of the bridge.

### 6.3. ANALYSIS OF VORTEX EXCITATION OF THE ARCH

Two cases of the arch composite tube loading with the vortex excitation were analysed. The possibility of the vortex excitation in case of antisymmetric and symmetric mode of the flexural arch vibrations (the third and the fifth mode of vibrations respectively - Fig. 9 c,d) was assumed to be the most unfavourable. In both modes of vibrations the dynamic wind action on the whole bridge, with the wind mean velocity vector acting in the direction of the  $X$  axis of global coordinate system and additionally the vortex excitation in the vertical plane, perpendicular to the axis of the arch, were assumed. The value of the mean speed was assumed to be equal to critical speed for a given mode of vibrations. A dynamic wind action modelling was performed according to the procedures described in Chapter 5, with the change of the mean wind speed to the value of critical speed. A loading by the vortex excitation in the node  $j$  at the critical speed  $i$  was calculated using:

$$p_{j,i} = q_{kr,i} D_a C_{y,i} \sin(\omega_i t) \cdot \psi_j, \quad (9)$$

where:

$q_{kr,i}$  – pressure caused by the critical wind speed,  $q_{kr,i} = \rho v_{kr,i}^2 / 2$ ,

$\rho$  – density of air,

$v_{kr,i}$  – the critical wind speed at which the vortex excitation may appear,  $v_{kr,i} = f_i D / St$ ,

$f_i$  –  $i$ -th frequency of the free vibrations,

$St$  – Strouhal number,

$St$  – liczba Strouhala,  
 $D_a$  – średnica zewnętrzna przekroju poprzecznego łuku,  
 $C_{y,i}$  – współczynnik aerodynamiczny siły unoszenia,  
 $\omega_i$  –  $i$ -ta częstość kołowa drgań własnych mostu,  
 $t$  – czas,  
 $\psi_j$  – rzędna unormowanej  $i$ -tej postaci drgań w  $j$ -tym węźle.

W analizie przyjęto:  $\rho = 1,23 \text{ kg/m}^3$ ,  $D_a = 2,02 \text{ m}$ ,  $St = 0,2$ ,  $t \in (0; 81,92 \text{ s})$ . Pozostałe wartości zestawiono w Tabelicy 5.

Table 5. Vortex excitation parameters  
 Tablica 5. Parametry wzbudzenia wirowego

		Third mode of vibrations Trzecia postać drgań	Fifth mode of vibrations Piąta postać drgań
$f$	[Hz]	0.709	1.130
$\omega$	[rad/s]	4.454	7,101
$v_{kr,i}$	[m/s]	7.17	11.414
$q_{kr,i}$	[N/m <sup>2</sup> ]	31.615	80.122
$C_{y,i}$	[-]	0.2	0.2

Wielkości ekstremalnych przemieszczeń obliczonych w wyniku symulacji dynamicznego oddziaływania wiatru z prędkością krytyczną, zgodnie z teorią quasi-ustaloną (patrz punkt 5) zostały zsumowane z przemieszczeniami obliczonymi w wyniku symulacji dynamicznego oddziaływania wzbudzenia wirowego. Ekstremalne przemieszczenia i naprężenia w poszczególnych elementach mostu od wzbudzenia wirowego związane odpowiednio z trzecią i piątą postacią drgań własnych zestawiono w Tablicach 6 i 7. Z analizy otrzymanych wyników można wyciągnąć wniosek, iż wzbudzenie wirowe nie stanowi zagrożenia bezpieczeństwa konstrukcji mostu.

Table 7. Extreme stresses under vortex excitation  
 Tablica 7. Ekstremalne naprężenia przy wzbudzeniu wirowym

	Third mode of vibrations Trzecia postać drgań	Fifth mode of vibrations Piąta postać drgań
	[MPa]	[MPa]
Arch / Łuk	-1.6 ÷ -0.4	-4.4 ÷ -1.3
Hangers / Wieszaki	-15.4 ÷ 14.9	1.7 ÷ 36.0
Cross-beams / Poprzecznice	-5.5 ÷ 4.0	-14.2 ÷ 11.8
Deck / Pomost	- 0.39 ÷ 0.33	-0.94 ÷ 0.85

$D_a$  – outer cross-sectional diameter of the arch,  
 $C_{y,i}$  – aerodynamic coefficient of lift force,  
 $\omega_i$  –  $i$ -th circular frequency of the free vibrations of the bridge,  
 $t$  – time,  
 $\psi_j$  – ordinate of the normalized  $i$ -th mode of vibrations at  $j$ -th node.

In the analysis the following data were assumed:  
 $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$ ,  $D_a = 2.02 \text{ m}$ ,  $St = 0.2$ ,  $t \in (0, 81.92 \text{ s})$ .  
 Remaining values are juxtaposed in Table 5.

The values of extreme displacements calculated through dynamic wind action simulation at the critical speed, according to quasi-steady theory (cf. point 5) are added to displacements calculated through dynamic action of the vortex excitation. Extreme displacements and stresses at respective bridge elements caused by the vortex excitation tied to the third and the fifth mode of the free vibrations are juxtaposed in Tables 6 and 7. From the analysis of the data received one can deduce that the vortex excitation doesn't endanger the safety of the bridge structure.

Table 6. Extreme displacements under vortex excitation  
 Tablica 6. Ekstremalne przemieszczenia przy wzbudzeniu wirowym

	$x_{\max}$	$x_{\min}$	$z_{\max}$	$z_{\min}$
	[m]	[m]	[m]	[m]
Third mode of free vibrations Trzecia postać drgań własnych				
Deck / Pomost	0.004	-0.001	0.0025	-0.0025
Arch / Łuk	0.005	-0.002	0.001	-0.001
Fifth mode of free vibrations Piąta postać drgań własnych				
Deck / Pomost	0.008	-0.001	0.006	-0.007
Arch / Łuk	0.012	-0.003	0.002	-0.002

## 7. KOMFORT PIESZYCH

Sprawdzono kryteria komfortu wibracyjnego przy dynamicznym oddziaływaniu wiatru w warunkach turbulencji atmosferycznej. W wyniku bezpośredniego całkowania równań ruchu, na każdym kroku czasowym obok przemieszczeń, uzyskane zostały także przyspieszenia. Na Rys. 13 przedstawiono wykresy przyspieszeń w kierunkach prostopadłych do osi mostu (poziomym  $X$  i pionowym  $Z$ ), w przykładowym węźle pomostu nawietrznego. W odniesieniu do wyznaczonych wartości, w wybranych punktach została przeprowadzona analiza widmowa, tj. wyznaczone zostały gęstości widmowe mocy przyspieszeń. Wybrane wykresy gęstości widmowych mocy składowych przyspieszeń w kierunkach  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  przedstawiono na Rys. 14.

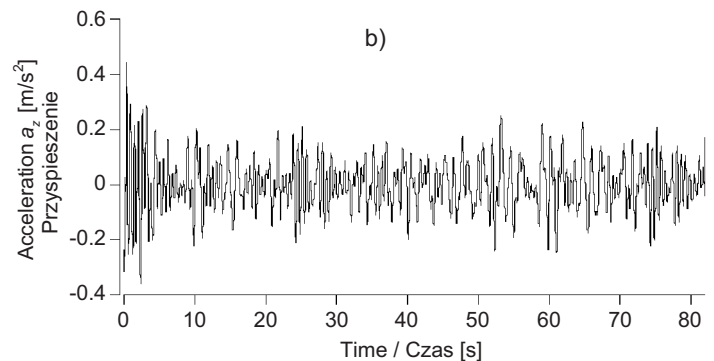
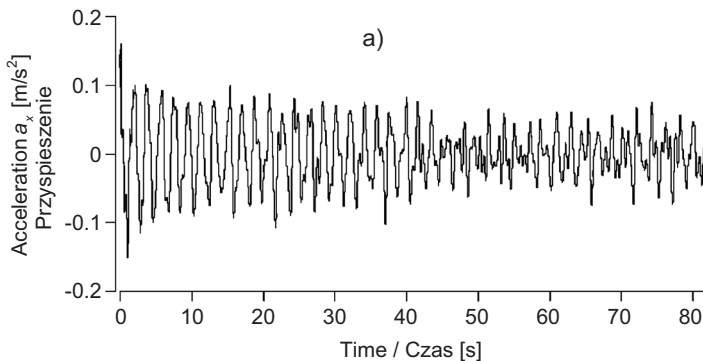


Fig. 13. Time series of accelerations at 1/4 of the span of the windward deck, node 101: a) in  $X$  direction, b) in  $Z$  direction  
Rys. 13. Przebiegi przyspieszeń w 1/4 rozpiętości pomostu nawietrznego, węzeł 101: a) w kierunku  $X$ , b) w kierunku  $Z$

Z wykresów gęstości widmowej mocy odczytane zostały częstotliwości, którym odpowiadały największe rzędne spektrum, a następnie przeprowadzono filtrację cyfrową wybranych przebiegów. Zastosowano filtr pasmowy Butterwotha rzędu 8 z częstotliwościami granicznymi w otoczeniu wartości ekstremalnych spektrum. W odniesieniu do filtrowanych przebiegów wyznaczono wartości skuteczne RMS przyspieszeń według wzoru:

$$a_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a(n \cdot \Delta t)}. \quad (10)$$

Filtrację cyfrową i wyznaczenie wartości skutecznych przyspieszeń wykonano za pomocą oprogramowania Catman firmy Hottinger Baldwin Messtechnik. Otrzymane wartości RMS przyspieszeń zostały porównane z kryteriami komfortu ludzkiego zaproponowanymi w pracach Flaga i Pańtaka [11, 12]. Przyspieszenia otrzymane w wyniku obliczeń są mniejsze od granicznych wartości komfortu.

## 7. PEDESTRIAN COMFORT

The criteria of pedestrian vibrational comfort under the dynamic wind action in atmospheric turbulence conditions were checked. Accelerations as well as displacements at each time step were calculated through the direct integration of equations of motion. Graphs of accelerations in directions perpendicular to the bridge axes (horizontal direction  $X$  and vertical direction  $Z$ ) at the exemplary node of the windward deck are shown in Fig. 13. On the base of the calculated values, at chosen points the spectral analysis was performed i.e. spectral densities of accelerations were determined. Chosen graphs of the power spectral densities of accelerations components in the  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  directions are shown in Fig. 14.

Frequencies of the highest ordinates of the power spectral density were read from graphs. Afterward a digital filtration of chosen functions was performed. Butterworth's band filter of 8<sup>th</sup> order with limit frequencies in the neighbourhood of the extreme values of spectrum was used. From the filtered functions the RMS values of accelerations were determined according to the formula:

$$a_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a(n \cdot \Delta t)}. \quad (10)$$

Catman software from Hottinger Baldwin Messtechnik was used for digital filtering and determination of acceleration RMS values. Obtained RMS values of accelerations were compared to the human's comfort criteria proposed by Flaga and Pańtak [11, 12]. Accelerations received through calculations are lower than limiting values of comfort. So, one can state that the influence of vibrations caused by the dynamic wind action on the comfort

Można uznać, że wpływ drgań spowodowanych dynamicznym oddziaływaniem wiatru na komfort osób przebywających na kładce jest niewielki. Ponadto trzeba zauważyć, że obliczone wielkości przyspieszeń odpowiadają średniej prędkości wiatru równej 22 m/s. W rzeczywistych warunkach można przyjąć, że ruch pieszo-rowerowy nie będzie się odbywał powyżej prędkości wiatru 15 m/s. Takie zmniejszenie prędkości wiatru spowoduje proporcjonalne zmniejszenie wielkości analizowanych przyspieszeń, co tym bardziej korzystnie wpłynie na spełnienie kryteriów komfortu. Poziom przyspieszeń uzyskanych w obliczeniach uwzględniających wzbudzenie wirowe jest jeszcze mniejszy, zatem kryteria komfortu wibracyjnego dla użytkowników mostu będą również spełnione ze znacznym zapasem.

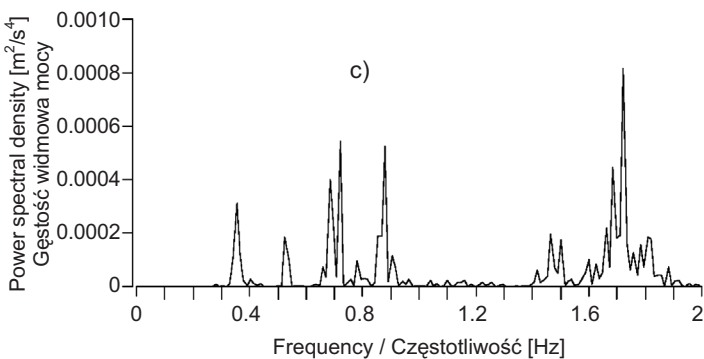
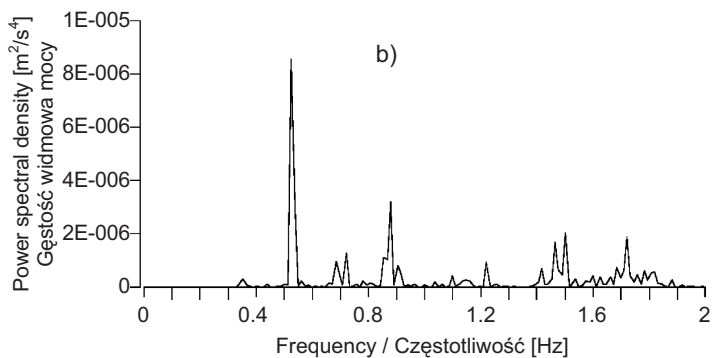
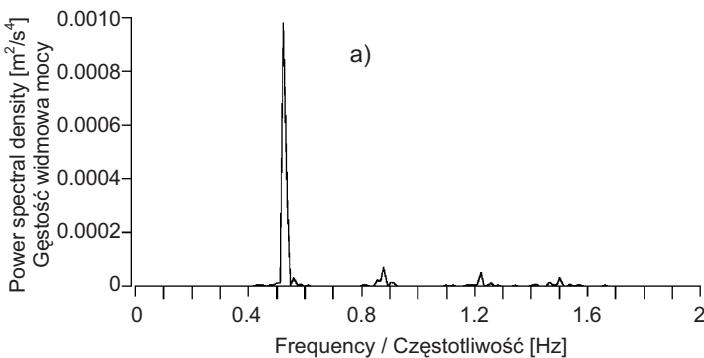


Fig. 14. Power spectral densities of accelerations at 1/4 of the bridge span, node 101, windward deck: a)  $u$  component, b)  $v$  component, c)  $w$  component

Rys. 14. Gęstości widmowe mocy przyspieszeń w 1/4 rozpiętości mostu, węzeł 101, pomost nawietrzny: a) składowej  $u$ , b) składowej  $v$ , c) składowej  $w$

## 8. WNIOSKI

Na podstawie analizy wyników badań modelowych w tunelu aerodynamicznym oraz obliczeń aerodynamicznych można sformułować następujące wnioski końcowe:

1. Wpływ interferencji aerodynamicznej związany ze zmianą odległości pomiędzy pomostami nawietrzny i zawietrzny jest nieznaczny i możliwy do pominięcia w obliczeniach aerodynamicznych odpowiedzi mostu przy dynamicznym oddziaływaniu wiatru. Wobec tego

of people on the bridge is small. Moreover, it's worth notifying that calculated values of accelerations correspond to the mean wind speed equal to 22 m/s. In reality one can assume that the pedestrian as well as bicycle traffic won't take place for the wind speed over 15 m/s. Such diminution of the wind speed causes a proportional diminution of the analysed accelerations what is favourably influencing the comfort criteria fulfilment. Accelerations level obtained through calculations including vortex excitation is even lower, therefore the criteria for vibrational comfort for bridge users are fulfilled with a significant margin.

## 8. CONCLUSIONS

On the basis of the results of the above analysis of both model tests in a wind tunnel and aerodynamic calculations one can formulate the following conclusions:

1. The influence of aerodynamic interference caused by a change in distance between the leeward and windward decks is insignificant and neglectable in aerodynamic calculations of the bridge response under the dynamic wind action. Due to this, in the case of all leeward deck segments the same functions of aerodynamic coefficients were assumed.

w przypadku wszystkich segmentów pomostu zawietrznego przyjęto te same funkcje współczynników aerodynamicznych.

2. Przebieg funkcji współczynnika aerodynamicznego siły unoszenia  $C_y$  wskazuje na dociążenie pomostów w kierunku pionowym. Na podstawie wyznaczonych funkcji współczynników aerodynamicznych, zgodnie z warunkami Den Hartoga, można wnioskować o stabilności zarówno przeszła nawietrznego, jak i zawietrznego w aspekcie możliwości wystąpienia galopowania giętnego i skrętnego.
  3. Ekstremalne przemieszczenia i naprężenia w poszczególnych elementach konstrukcyjnych mostu od ciężaru własnego są na ogół znacznie większe niż otrzymane przy dynamicznym oddziaływaniu wiatru w warunkach turbulencji atmosferycznej. Dynamiczne oddziaływanie wiatru nie stanowi więc zagrożenia bezpieczeństwa konstrukcji mostu.
  4. Przemieszczenia i naprężenia otrzymane przy wzbudzeniu wirowym rury zespolonej łuku są również niewielkie. Wzbudzenie wirowe nie stanowi zagrożenia bezpieczeństwa konstrukcji mostu.
  5. Przyspieszenia drgań pomostów przy dynamicznym oddziaływaniu wiatru spowodowanym turbulencją atmosferyczną są mniejsze od dopuszczalnych wartości komfortu wibracyjnego. Poziom przyspieszeń od wzbudzenia wirowego jest jeszcze mniejszy, zatem kryteria komfortu wibracyjnego użytkowników mostu będą również spełnione i w tym przypadku ze znacznym zapasem. Most spełnia wymagania komfortu wibracyjnego przy dynamicznym oddziaływaniu wiatru.
2. The function of the aerodynamic lift force shows the weighting of decks in vertical direction. Based on the determined functions of aerodynamic coefficients, according to Den Hartog's conditions, one can infer on the stability of both the leeward and the windward bridge spans in terms of the possibility of flexural and torsional galloping.
  3. Extreme displacements and stresses in the respective bridge structural elements resulting from deadweight are generally much bigger than those received under the dynamic wind action in the atmospheric turbulence conditions. Dynamic wind action is not a threat for the safety of the bridge structure.
  4. Displacements and stresses received under the vortex excitation of the composite tube of the arch are also small. Vortex excitation is not a threat for the safety of the bridge structure.
  5. Accelerations of the decks vibrations under the wind dynamic action caused by atmospheric turbulence are smaller than the acceptable limits of vibrational comfort. Level of accelerations from the vortex excitation is even lower, therefore the criteria for the vibrational comfort of the users are fulfilled with significant margin in this case. The bridge fulfils the requirements for the vibrational comfort at the dynamic wind action.

## BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] Flaga A., Lipecki T., Bęc J.: Quasi-steady approach to the dynamic wind action on footbridges, in: Recent advances in research on environmental effects on buildings and people (ed.: Flaga A., Lipecki T.). Polish Association For Wind Engineering, Kraków, 2010, 31-142
- [2] Lipecki T., Bęc J., Flaga A.: Complex aerodynamic analysis of a single-span arch footbridge. Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Symposium on Computational Wind Engineering, Chapel Hill, North Carolina, USA, 2010, USB stick, paper no. 304
- [3] Lipecki T., Bęc J., Flaga A., Bosak G.: Dynamiczne oddziaływanie wiatru na dwa różne mosty dla pieszych przez rzekę Wisłę w Krakowie. Inżynieria i Budownictwo, **66**, 8, 2010, 420-425
- [4] PN-77/B-02011. Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie wiatrem. Wydawnictwa Normalizacyjne, 1985
- [5] PN-EN 1991-1-4:2008 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje – Część 1-4: Oddziaływania ogólne – Oddziaływania wiatru
- [6] Lipecki T., Bęc J., Flaga A., Bosak G., Aerodynamic analysis of a sinusoidal footbridge for pedestrian and bicycle traffic. Roads and Bridges - Drogi i Mosty, **12**, 3, 2013, 297-316
- [7] Shinozuka M.: Stochastic Mechanics, v. 1. Dep. of Civil Eng. & Eng. Mech., Columbia Univ., NY, 1987, USA
- [8] Flaga A., Błazik-Borowa E., Podgórski J.: Aerodynamika smukłych budowli i konstrukcji prętowo-ciężnowych. Politechnika Lubelska, Lublin, 2004

- [9] *Flaga A.*: Quasisteady theory in aerodynamics of slender structures. Sonderforschungsbereich 151 – Tragwerksdynamik, Berichte, **25**, 1994, Ruhr Universität Bochum, Germany
- [10] *Flaga A.*: Inżynieria wiatrowa. Podstawy i zastosowania. Arkady, Warszawa, 2008
- [11] *Flaga A., Błazik-Borowa E., Pańtak M.*: Wind comfort criteria for pedestrians on footbridges. Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Conference on Wind Engineering, Cairns, Australia, 2007, 2623-2630
- [12] *Flaga A., Pańtak M.*: Krzywe komfortu wibracyjnego mostów dla pieszych według normy ISO/CD 10137:2005 i propozycji własnych. Inżynieria i Budownictwo, **62**, 10, 2006, 541-547