



ROMAN NAGÓRSKI¹⁾
PIOTR WIŚNIAKOWSKI²⁾
KRZYSZTOF BŁĄŻEJOWSKI³⁾
MAGDALENA NAGÓRSKA⁴⁾

ANALIZA PORÓWNAWCZA WŁAŚCIWOŚCI MATERIAŁÓW BÜRGERSA, BOGUSŁAVSKICH I ZENERA W ŚWIETLE TESTÓW NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W ODNIESIENIU DO WŁAŚCIWOŚCI MIESZANEK MINERALNO-ASFALTOWYCH

STRESZCZENIE. W artykule zestawiono i omówiono porównawczo rezultaty testów teoretycznych zachowania się materiałów Bürgersa, Bogusławskich i Zenera w osiowym stanie naprężenia-odkształcenia dla wybranych programów naprężenia lub odkształcenia: harmonicznego, pulsacyjnego (sinusoidalnie), impulsowego naprzemiennego (symetrycznie) oraz impulsowego jednostronnego. Przedstawione wyniki wzbogacają obraz zachowań wspomnianych materiałów, które można uznać za stosunkowo proste modele złożonych zachowań lepko-sprężystych mieszanek mineralno-asfaltowych w nawierzchni drogowej. Analizowane modele materiałów wykazały różne zachowania, co pozwala na ocenę ich przydatności do opisu realnych mieszanek mineralno-asfaltowych. Przedstawiono odniesienia do wyników wykonanych eksperymentów na próbkach materiału z nawierzchni drogowej – betonu asfaltowego AC 11.

SŁOWA KLUCZOWE: beton asfaltowy, mieszanki mineralno-asfaltowe, modele lepko-sprężyste, modele materiałów nawierzchni drogowych, testy naprężenia i odkształcenia

¹⁾ prof. dr hab. inż. – Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej
²⁾ dr inż. – Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej
³⁾ dr inż. – Orlen Asphalt Sp. z o.o., Płock
⁴⁾ inż. – Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej

1. WSTĘP

Materiały Bürgersa, Bogusławskich i Zenera [1 - 4] mogą być wykorzystywane do modelowania materiałów nawierzchni drogowych w zakresie właściwości sprężysto-lepkich, zwłaszcza warstw utwardzonych, w tym szczególnie mieszanek mineralno-asfaltowych. Najpowszechniej stosowany z nich, tj. materiał Bürgersa, oprócz zalet względnie dobrej adekwatności opisu rzeczywistych właściwości mieszanek mineralno-asfaltowych ma również wady – między innymi stosunkowo dużą złożoność matematyczną i pewne niezgodności z rzeczywistością odpowiedzi materiału.

W artykule zestawiono i omówiono porównawczo rezultaty ośmiu testów teoretycznych zachowania się materiałów Bürgersa, Bogusławskich i Zenera w osiowym stanie naprężenia-odkształcenia „ $\sigma - \varepsilon$ ”. Są to próby cyklicznego harmonicznego (sinusoidalnego) naprężenia i odkształcenia, cyklicznego pulsacyjnego (sinusoidalnie) naprężenia i odkształcenia, symetrycznego (naprzemiennego) impulsowego (przedziałami stałego) naprężenia i odkształcenia oraz jednostronnego impulsowego naprężenia i odkształcenia. Taka porównawcza analiza, na podstawie wyrażen ogólnych (wzorów) i konkretnych przykładów (wykresów) przebiegów w czasie naprężeń lub odkształceń, z wykorzystaniem rezultatów zawartych w pracach [5 - 7] i sygnałnej analizy w pracy [8], naświetla pełniej właściwości rozpatrywanych materiałów, w tym pod kątem adekwatności do właściwości materiałów nawierzchni drogowych. Testy pulsacyjnego i impulsowego jednostronnego wymuszenia są o tyle istotne, że odpowiadają warunkom drogowym powtarzających się obciążeń w pewnym przedziale czasu pojazdami w danym przekroju nawierzchni, rosnących od zera do określonej wartości – pierwszy w sposób ciągły, drugi w sposób skokowy. Natomiast testy naprzemiennego (symetrycznego) impulsowego (skokowego) i harmonicznego (ciągłego) wymuszenia są niejako „granicznymi reprezentantami” laboratoryjnych testów wymuszenia oddziaływania na próbkę materiału nawierzchni. Testy impulsowe (przedziałami stałego w czasie) naprężenia i odkształcenia „zawierają” jako element próby stałego w czasie naprężenia i odkształcenia w czasie, czyli najbardziej standardowe próby zachowania się reologicznego materiałów.

Z uwagi na ograniczoną objętość tekstu pracy, podajemy jedynie gotowe (bez wyprowadzeń) wyrażenia (wzory niezależne od danych liczbowych) na reakcje materiałów na próby naprężenia lub odkształcenia wraz z wykresami przykładowych przebiegów dla trzech materiałów (dla wybranych warunków początkowych, wartości parametrów materiałowych i parametrów testów), z odpowiednimi komentarzami do tych wzorów i wykresów. Komentarze mają głównie, poza ciekawymi przypadkami szczególnymi, charakter uniwersalny (wynikający ze wzorów), ilustrowany przykładowymi wykresami. Dodatkowo przeprowadzoną analizę wzmocniono odniesieniami do wyników wykonanych eksperymentów dla próbek materiału z nawierzchni drogowej (AC 11), potwierdzających lub nie zgodność z określonymi właściwościami materiałów modelowych.

2. MODELE FIZYCZNE, RÓWNANIA KONSTITUTYWNE I PARAMETRY MATERIAŁOWE

Modele fizyczne materiałów Bürgersa, Bogusławskich i Zenera przedstawiono schematycznie kolejno na rys. 1a-c.

Schematy te zawierają kombinacje połączeń sprężyn o współczynnikach (modułach) sprężystości E_1 i E_2 , symbolizujących właściwości sprężyste materiału i tłumików o współczynnikach (modułach) lepkości η_1 i η_2 , symbolizujących właściwości lepkie materiału. Schemat materiału Bürgersa przedstawia szeregowe połączenie schematów materiałów Maxwella (połączenie szeregowe sprężyny i tłumika) i Kelvina-Voighta (połączenie równoległe sprężyny i tłumika), a schemat materiału Bogusławskich – połączenie równoległe schematów tych materiałów. Natomiast schematy materiału Zenera są dwa, gdyż oba prowadzą do identycznej postaci równania konstytutywnego: (i) przypadek szczególny schematu materiału Bürgersa, (ii) przypadek szczególny schematu materiału Bogusławskich.

Równania konstytutywne analizowanych materiałów, zbudowane zgodnie z powyższymi schematami ze związków konstytutywnych dla materiału liniowo-sprężystego Hooke'a (symbolizowanego przez sprężynę) i materiału liniowo-lepkiego Newtona (symbolizowanego przez tłumik), wiążące zależne od czasu wypadkowe naprężenie $\sigma = \sigma(t)$ i całkowite odkształcenie $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $t \in \mathcal{T} = [0, \infty)$, mają postać następującego równania różniczkowego zwyczajnego:

$$a\sigma + b\dot{\sigma} + c\ddot{\sigma} = d\varepsilon + e\dot{\varepsilon} + f\ddot{\varepsilon}, \quad (1)$$

gdzie współczynniki a, b, \dots, f są zależne od parametrów materiałowych E_1, \dots, η_2 za pomocą odpowiednich dla każdego schematu materiału wzorów [5 -7], przy czym:

- w przypadku materiału Bürgersa

$$a=0, \quad b = \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} + \frac{\eta_2}{E_2}, \quad c = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2}, \quad d=0, \quad e = \eta_1, \quad f = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2}, \quad (2)$$

- w przypadku materiału Bogusławskich

$$a = \frac{1}{E_2}, \quad b = \frac{\eta_1}{E_1 E_2}, \quad c=0, \quad d=1, \quad e = \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} + \frac{\eta_2}{E_2}, \quad f = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2}, \quad (3)$$

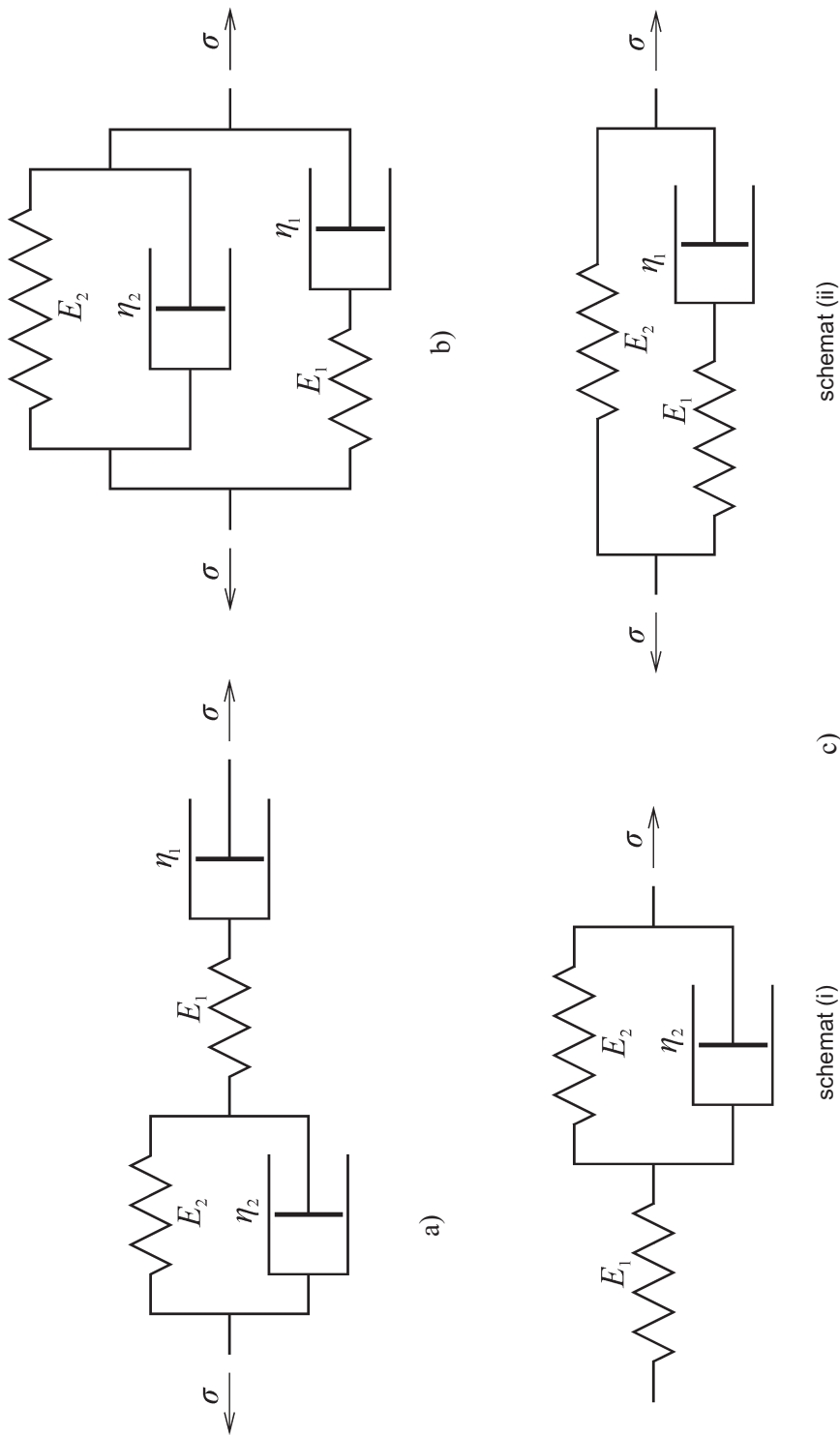
- w przypadku materiału Zenera

- dla schematu (i)

$$a = \frac{\eta_2}{E_1}, \quad b = 1 + \frac{E_2}{E_1}, \quad f = 0, \quad d = \eta_2, \quad e = E_2, \quad f = 0, \quad (4)$$

- dla schematu (ii)

$$a = \frac{\eta_1}{E_1}, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad d = \eta_1 \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right), \quad e = E_2, \quad f = 0. \quad (5)$$



Rys. 1. Schematy klasycznego materiału: a) Bürgersa, b) Boguslavskich, c) Zenera
 Fig. 1. The schemes of : a) Bürgers' material, b) Boguslavskis' material, c) Zener's material

Zerowanie się współczynnika d w przypadku materiału Bürgersa między innymi implikuje, że dowolne stałe odkształcenie $\varepsilon(t) = \text{const}$ przy braku naprężenia $\sigma(t) \equiv 0$ spełnia równanie (1), co ma wpływ na ujęcie zjawiska relaksacji. Mianowicie materiał Bürgersa relaksuje do zerowej wartości naprężenia z dowolnego poziomu naprężenia początkowego, niezależnie od wartości stałego w czasie odkształcenia.

Obecność w równaniu (1) drugich pochodnych odkształcenia i naprężenia w przypadku materiału Bürgersa oraz drugiej pochodnej odkształcenia w przypadku materiału Bogusławskich wynika z konieczności różniczkowania związków konstytutywnych elementów składowych schematu modelu fizycznego przy wyprowadzaniu równania (1). W konsekwencji rozwiązanie ogólne tego równania przy danym $\sigma = \sigma(t)$ wymaga przyjęcia, oprócz początkowej wartości odkształcenia $\varepsilon(0)$, także początkowej prędkości odkształcenia $\dot{\varepsilon}(0)$, a przy danym $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – przyjęcia, oprócz początkowej wartości naprężenia $\sigma(0)$, również początkowej prędkości naprężenia $\dot{\sigma}(0)$ w przypadku materiału Bürgersa. Obecność drugiej pochodnej odkształcenia lub naprężenia komplikuje także stronę rachunkową przy wyznaczaniu rozwiązań równania (1). Niedogodności tych nie wykazuje materiał Zenera („materiał standardowy”).

W podanych dalej przykładach liczbowych odpowiedzi (w postaci wykresów) rozważanych materiałów na wybrane próby (testy) naprężenia lub odkształcenia przyjęto następujące, zestawione w tablicy 1, wartości współczynników materiałowych – identyczne dla wszystkich trzech materiałów. Dane te zaczerpnięto z pracy [9] jako parametry materiałowe modelu Bürgersa betonu asfaltowego dla podbudowy w temperaturze 15°C.

Tablica 1. Przykładowe wartości parametrów materiałowych na podstawie [9]
Table 1. The example values of material parameters [9]

E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	η_1 [MPa·s]	η_2 [MPa·s]
8390	5906	366	156

3. PRÓBA CYKLICZNEGO HARMONICZNEGO NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

Jeśli wymuszone jest naprężenie w sposób harmoniczny, np. sinusoidalny $\sigma(t) = \sigma_o \sin \omega t$, $t \in [0, \infty)$, rys. 2a, to odpowiedzi materiałów Bürgersa, Bogusławskich i Zenera w postaci wyrażen na odkształcenie $\varepsilon(t)$, $t \geq 0$ przedstawiają się następująco:

- w przypadku materiału Bürgersa

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \dot{\varepsilon}(0) \frac{f}{e} \left[1 - \exp \left(-\frac{e}{f} t \right) \right] + \frac{\sigma_o}{E_z} \left\{ \sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi + \right. \\ \left. - \frac{f}{e} \omega \cos \varphi \left[1 - \exp \left(-\frac{e}{f} t \right) \right] \right\}, \quad t \in [0, \infty), \quad (6)$$

przy

$$E_z = |E_c| = \omega \left[\frac{(f\omega)^2 + e^2}{(c\omega^2 - 1)^2 + (b\omega)^2} \right]^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{bf\omega^2 - (c\omega^2 - 1)e}{(c\omega^2 - 1)f\omega + be\omega}, \quad (7)$$

- w przypadku materiału Bogusławskich

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ \varepsilon(0)[p_1 \exp(-p_2 t) - p_2 \exp(-p_1 t)] + \dot{\varepsilon}(0)[\exp(-p_2 t) - \exp(-p_1 t)] \} + \frac{\sigma_0}{E_z} \left\{ \sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{p_1 - p_2} [(\omega \cos \varphi - p_2 \sin \varphi) \exp(-p_1 t) - (\omega \cos \varphi - p_1 \sin \varphi) \exp(-p_2 t)] \right\}, \quad (8)$$

przy p_1 i p_2 określonych wzorami

$$p_{1,2} = \frac{e}{2f} \pm \frac{1}{2f} \sqrt{e^2 - 4f} \geq 0, \quad (9)$$

oraz

$$E_z = |E_c| = \left[\frac{e^2 \omega^2 + (f\omega^2 - 1)^2}{a^2 + \omega^2 b^2} \right]^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \omega \frac{ae + (f\omega^2 - 1)b}{be\omega^2 - (f\omega^2 - 1)a}, \quad (10)$$

- w przypadku materiału Zenera

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) \exp\left(-\frac{e}{d} t\right) + \frac{\sigma_0}{E_z} \left[\sin \varphi \exp\left(-\frac{e}{d} t\right) + \sin(\omega t - \varphi) \right], \quad t \in [0, \infty), \quad (11)$$

przy

$$E_z = |E_c| = \left[\frac{e^2 + \omega^2 d^2}{b^2 + a^2 \omega^2} \right]^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \omega \frac{bd - ae}{be + ad\omega^2}. \quad (12)$$

Wielkości $\varepsilon(0)$ i $\dot{\varepsilon}(0)$ są początkowymi wartościami odkształcenia i prędkości odkształcenia, E_z jest modułem zastępczym (dynamicznym) – wartością modułu zespolonego E_c , a φ jest kątem przesunięcia fazowego odkształcenia w stosunku do naprężenia. Współczynniki te określamy zgodnie ze wzorami:

$$\sigma = E_c \varepsilon, \quad \sigma_0 = E_z \varepsilon_0, \quad (13)$$

$$\sigma = \sigma_0 \exp(i\omega t), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \exp(i\omega t - i\varphi), \quad E_c = E_z \exp(i\varphi). \quad (14)$$

Po przyjęciu (zgodnie z odpowiednimi schematami materiałów z rys. 1):

- w przypadku materiału Bürgersa

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = \frac{\sigma_0 \omega}{E_1}, \quad (15)$$

- w przypadku materiału Bogusławskich

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = \frac{\eta_1}{E_1} \frac{\sigma_0 \omega}{\eta_1 + \eta_2}, \quad (16)$$

- w przypadku materiału Zenera według schematu (i) z rys. 1c:

$$\varepsilon(0) = 0, \quad (17)$$

przy danych materiałowych z tablicy 1 oraz $\omega = 20\pi$ [1/s] i $\sigma_0 = 100$ kPa wykresy odkształceń poszczególnych materiałów są kolejno pokazane na rys. 2b-d.

Wszystkie materiały, przy próbie cyklicznego naprężenia harmonicznego, wykazują po pewnym okresie początkowym (kilku cykli naprężenia) odkształcenia cykliczne również harmoniczne zmienne, z opóźnieniem fazowym φ w stosunku do cyklu naprężenia i z amplitudą równą σ_0/E_z . Różnice dotyczą szybkości stabilizacji (ustalania się postaci harmonicznego wyrażenia na odkształcenie i kształtu krzywej zanikającej, wokół której oscyluje odkształcenie. Istotną cechą jakościową, różnicującą materiał Bürgersa w stosunku do pozostałych jest to, że cykle odkształcenia po ustaleniu następują wokół pewnej niezerowej wartości stałej, zależnej od parametrów materiałowych, wartości amplitudy naprężenia oraz od stanu początkowego (początkowych wartości odkształcenia i prędkości odkształcenia), podczas gdy odkształcenie pozostałych materiałów oscyluje wokół wartości zerowych.

W przypadku próby cyklicznego harmonicznego (sinusoidalnego) odkształcenia $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$, $t \in [0, \infty)$ rozważane materiały zachowują się zgodnie z poniższymi wyrażeniami na naprężenie $\sigma(t)$, $t \in [0, \infty)$:

- w przypadku materiału Bürgersa

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \frac{\sigma(0)}{p_1 - p_2} [p_1 \exp(-p_2 t) - p_2 \exp(-p_1 t)] + \frac{\dot{\sigma}(0)}{p_1 - p_2} [\exp(-p_2 t) - \exp(-p_1 t)] + \\ & + \frac{\varepsilon_0 E_z}{p_1 - p_2} [(\omega \cos \varphi + p_2 \sin \varphi) \exp(-p_1 t) - (\omega \cos \varphi + p_1 \sin \varphi) \exp(-p_2 t)] + \\ & + \varepsilon_0 E_z \sin(\omega t + \varphi), \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (18)$$

przy p_1 i p_2 określonych wzorami

$$p_{1,2} = \frac{b}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{b^2 - 4c} \geq 0, \quad (19)$$

a E_z i φ – wzorami (7),

- w przypadku materiału Bogusławskich

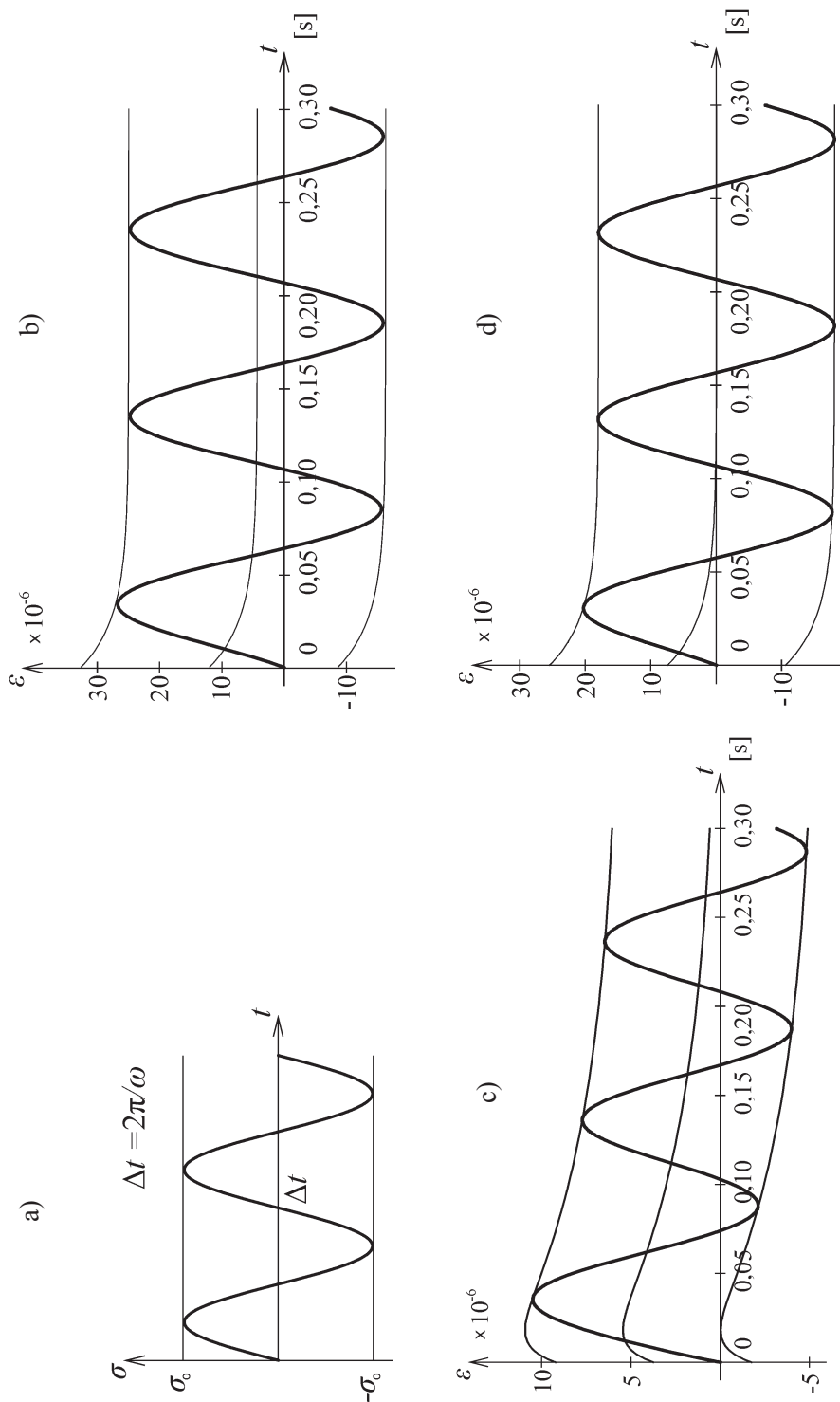
$$\sigma(t) = \sigma(0) \exp\left(-\frac{a}{b} t\right) + \varepsilon_0 E_z \left[\sin(\omega t + \varphi) - \sin \varphi \exp\left(-\frac{a}{b} t\right) \right], \quad t \in [0, \infty), \quad (20)$$

przy E_z i φ określonych wzorami (10),

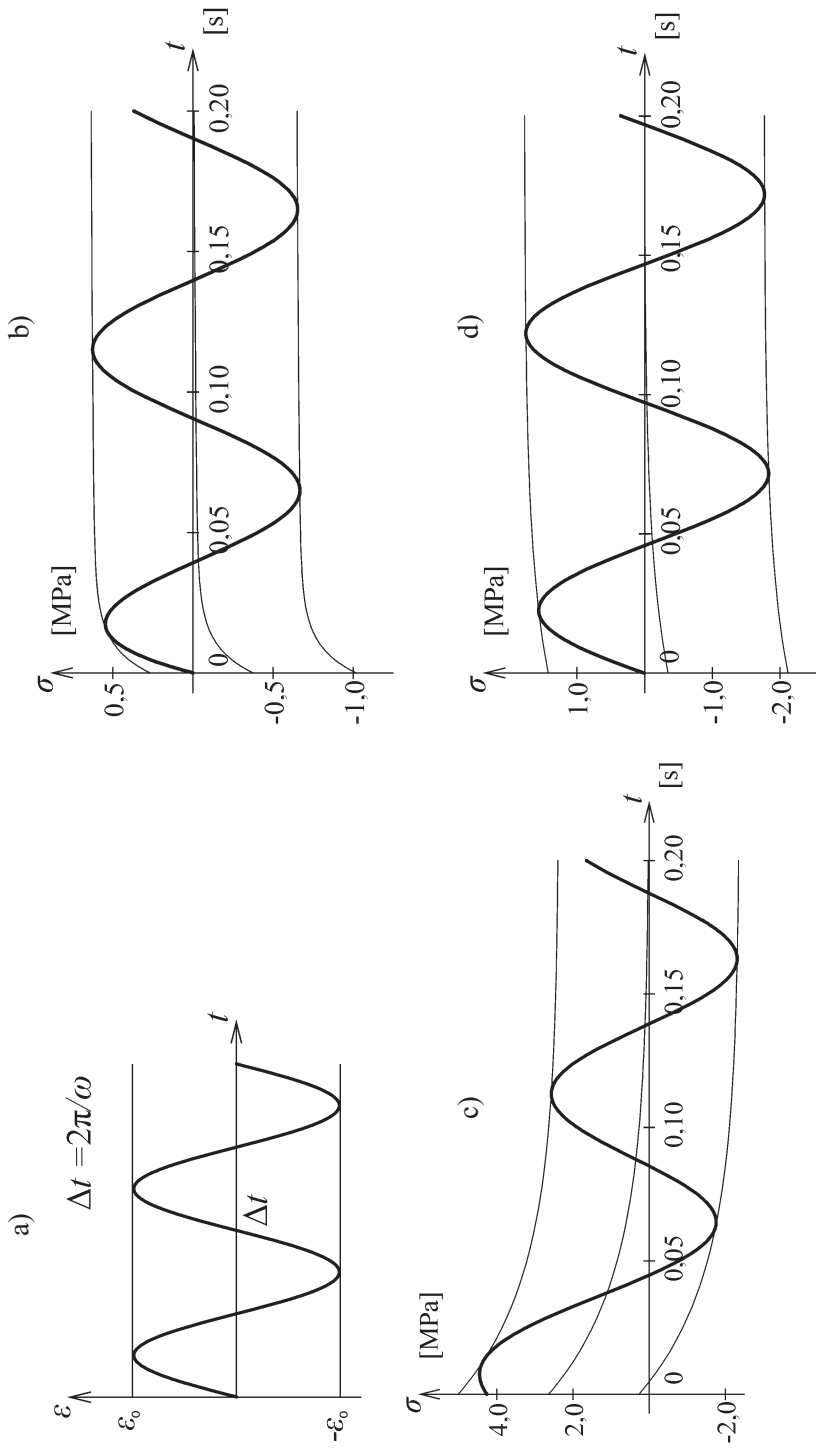
- w przypadku materiału Zenera

$$\sigma(t) = \sigma(0) \exp\left(-\frac{b}{a} t\right) + \varepsilon_0 E_z \left[\sin(\omega t + \varphi) - \sin \varphi \exp\left(-\frac{b}{a} t\right) \right], \quad t \in [0, \infty), \quad (21)$$

przy E_z i φ określonych wzorami (12), przy czym $\sigma(0)$ i $\dot{\sigma}(0)$ są początkowymi wartościami naprężenia i prędkości naprężenia.



Rys. 2. Przykładowe odpowiedzi materiałów: b) Bürgersa, c) Bogusławskich, d) Zenera na cykliczną próbę harmonicznym zmiennym naprężenia (a)
 Fig. 2. The example responses of materials: b) Bürgers', c) Boguslawskis', d) Zener's at the harmonically cyclic alternating stress test (a)



Rys. 3. Przykładowe odpowiedzi materiałów: b) Bürgersa, c) Bogusławskich, d) Zenera na cykliczną próbę harmonicznie zmiennego odkształcenia (a)
 Fig. 3. The example responses of materials: b) Bürgers', c) Boguslawskis', d) Zener's at the harmonically cyclic alternating strain test (a)

Po przyjęciu (zgodnie z odpowiednimi schematami materiałów z rys. 1):

- w przypadku materiału Bürgersa

$$\sigma(0) = 0, \quad \dot{\sigma}(0) = E_1 \varepsilon_0 \omega, \quad (22)$$

- w przypadku materiału Bogusławskich

$$\sigma(0) = (\eta_1 + \eta_2) \varepsilon_0 \omega, \quad (23)$$

- w przypadku materiału Zenera według schematu (ii) z rys. 1c

$$\sigma(0) = 0 \quad (24)$$

oraz danych materiałowych z tablicy 1 i $\omega = 20\pi$ [1/s], $\varepsilon_0 = 130 \times 10^{-6}$ przykładowe wykresy zmienności $\sigma(t)$ pokazano na rys. 3b-d.

Wszystkie materiały, przy próbie cyklicznego odkształcenia harmonicznego, wykazują po pewnym okresie początkowym (kilku cykli odkształcenia) naprężenia cykliczne również harmonicznym zmiennym, z wyprzedzeniem fazowym φ w stosunku do cyklu odkształcenia i z amplitudą równą $\varepsilon_0 E_z$, które wszystkie oscylują wokół wartości zerowych. Różnice dotyczą szybkości stabilizacji (ustalania się postaci harmonicznego) wyrażenia na naprężenie i kształtu krzywej zanikającej, wokół której naprężenie oscyluje.

4. PRÓBA CYKLICZNEGO PULSACYJNEGO NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

W przypadku próby cyklicznego naprężenia pulsacyjnego (sinusoidalnego) $\sigma(t) = \sigma_0 \sin^2(\omega t / 2)$, $t \in [0, \infty)$, (rys. 4a), odpowiedzi materiałów Bürgersa, Bogusławskich i Zenera określone są następującymi wzorami na odkształcenia $\varepsilon(t)$, $t \geq 0$:

- w odniesieniu do materiału Bürgersa

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \dot{\varepsilon}(0) \frac{f}{e} \left[1 - \exp\left(-\frac{e}{f} t\right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{E_z} \{ \sin(\omega t - \tilde{\varphi}) + \sin \tilde{\varphi} + \\ - \frac{f}{e} \omega \cos \tilde{\varphi} \left[1 - \exp\left(-\frac{e}{f} t\right) \right] \} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{e} \frac{1}{e} \left\{ t - \frac{f}{e} \left[1 - \exp\left(-\frac{e}{f} t\right) \right] \right\}, \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie e i f określone są za pomocą (2), a $\tilde{\varphi} = \pi / 2 - \varphi$, przy czym E_z i φ wyrażają się wzorami (7),

- w odniesieniu do materiału Bogusławskich

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ \varepsilon(0) [p_1 \exp(-p_2 t) - p_2 \exp(-p_1 t)] + \dot{\varepsilon}(0) [\exp(-p_2 t) - \exp(-p_1 t)] \} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{E_z} \left\{ 1 + \frac{1}{p_1 - p_2} [p_2 \exp(-p_1 t) - p_1 \exp(-p_2 t)] \right\} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{E_z} \left\{ \sin(\omega t - \tilde{\varphi}) + \frac{1}{p_1 - p_2} [(\omega \cos \tilde{\varphi} - p_2 \sin \tilde{\varphi}) \exp(-p_1 t) + \right. \\ \left. - (\omega \cos \tilde{\varphi} - p_1 \sin \tilde{\varphi}) \exp(-p_2 t)] \right\}, \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie p_1 , p_2 określone są wzorami (9), $\tilde{\varphi} = \varphi - \pi/2$, przy czym E_z i φ wyrażają się za pomocą (10),

- w odniesieniu do materiału Zenera

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \varepsilon(0) \exp\left(-\frac{e}{d}t\right) + \frac{b}{2} \frac{\sigma_0}{e} \left[1 - \exp\left(-\frac{e}{d}t\right)\right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{E_z} \left[\sin(\omega t + \tilde{\varphi}) + \sin \tilde{\varphi} \exp\left(-\frac{d}{c}t\right) \right], \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie b , d i e wyrażają się odpowiednio wzorami odpowiednio (4) lub (5), zaś $\tilde{\varphi} = \pi/2 - \varphi$, przy E_z i φ określonych wzorami (12). Przy tym $\varepsilon(0)$ i $\dot{\varepsilon}(0)$ w powyższych wzorach na $\varepsilon(t)$ są początkowymi wartościami odkształcenia i prędkości odkształcenia odpowiedniego materiału.

Po przyjęciu (zgodnie z odpowiednimi schematami materiałów z rys. 1):

- w przypadku materiału Bürgersa i Bogusławskich

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = 0, \quad (28)$$

- w przypadku materiału Zenera według schematu (i) z rys. 1c

$$\varepsilon(0) = 0, \quad (29)$$

przy danych materiałowych z tablicy 1 oraz $\omega = 20\pi$ [1/s] i $\sigma_0 = 100$ kPa wykresy odkształceń poszczególnych materiałów są kolejno pokazane na rys. 4b-d.

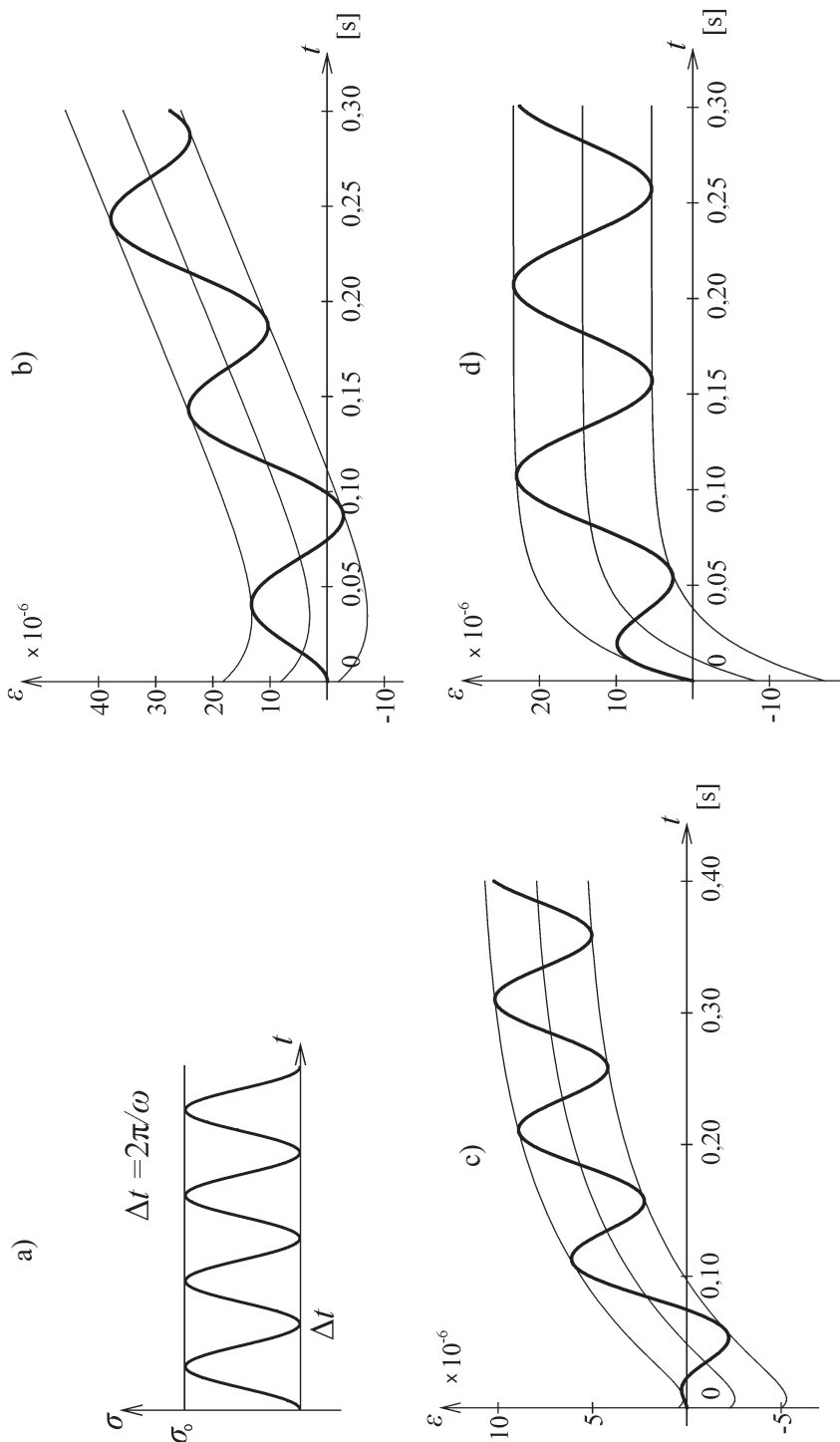
Wszystkie materiały, przy próbie cyklicznego naprężenia pulsacyjnego zachowują się w odpowiedzi podobnie w tym sensie, że odkształcenie implikowane przez to naprężenie jest także pulsujące, ale wokół funkcji, która w przypadku materiału Bürgersa przy rosnącej t zbliża się do prostej ukośnej pod kątem zależnym od lepkości „tłumika Maxwella” i amplitudy naprężenia, wychodzącej z punktu zależnego od stałych materiałowych, amplitudy naprężenia i także od początkowych wartości odkształcenia i prędkości odkształcenia (odkształcenie narasta pulsacyjnie do nieskończoności) – podczas, gdy w przypadku pozostałych materiałów wspomniana funkcja średniego odkształcenia ustala się, z różną szybkością, na poziomie zależnym od stałych materiałowych oraz amplitudy naprężenia i niezależnym od początkowego stanu odkształcenia. Ustalony po kilku cyklach zakres zmienności części pulsacyjnej odkształcenia, przy dodatnich wartościach, jest dla wszystkich materiałów równy σ_0/E_z , z E_z oznaczającym moduł dynamiczny (wartość modułu zespolonego).

Jeśli wymuszone (zadane) jest odkształcenie pulsacyjne $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin^2(1/2\omega t)$, $t \in [0, \infty)$, (rys. 5a), to rozważane materiały zachowują się zgodnie z poniższymi wzorami na naprężenie $\sigma(t)$:

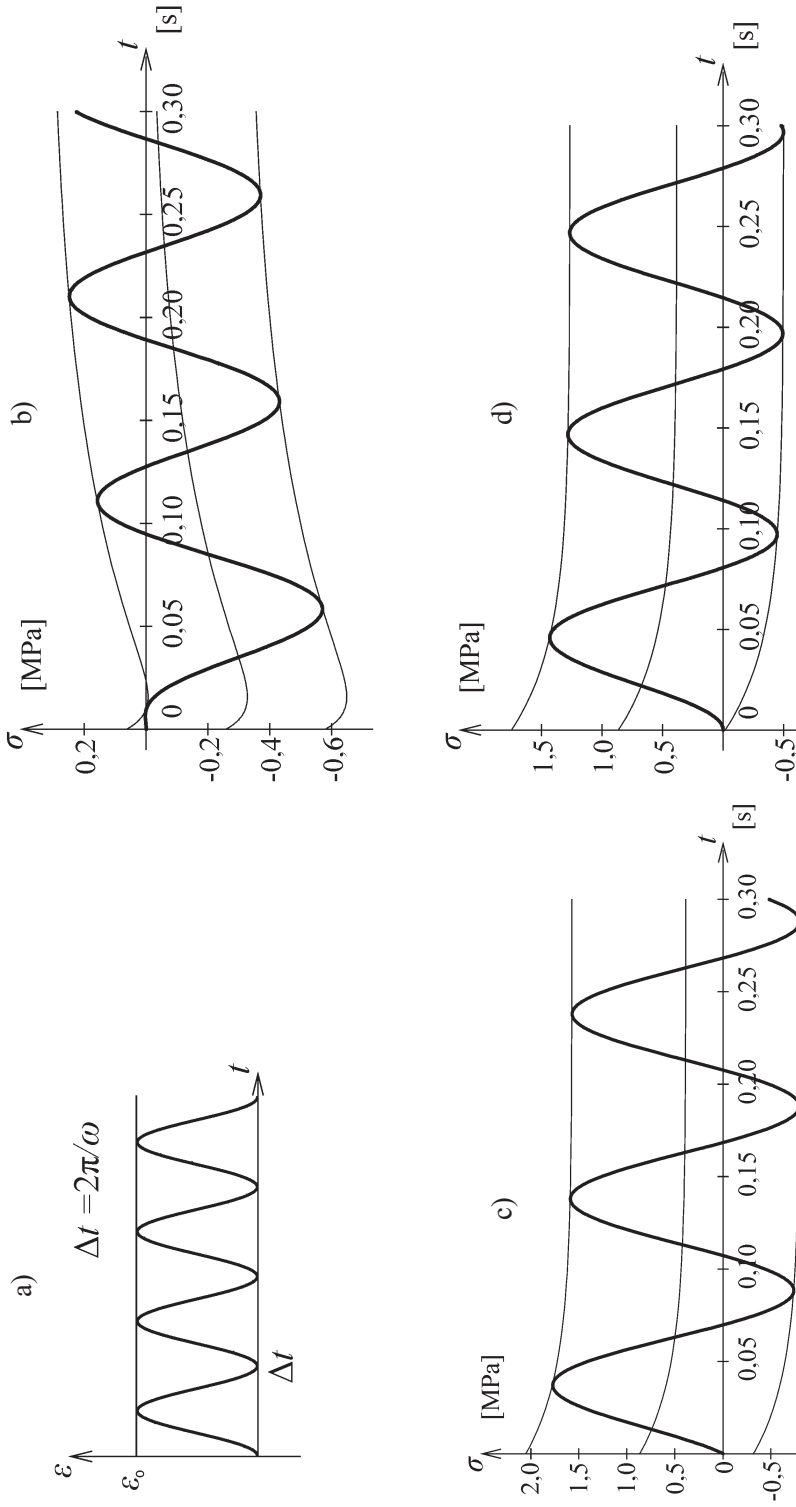
- w przypadku materiału Bürgersa

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \frac{\sigma(0)}{p_1 - p_2} [p_1 \exp(-p_2 t) - p_2 \exp(-p_1 t)] + \frac{\dot{\sigma}(0)}{p_1 - p_2} [\exp(-p_2 t) - \exp(-p_1 t)] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 E_z}{p_1 - p_2} [(\omega \cos \tilde{\psi} + p_2 \sin \tilde{\psi}) \exp(-p_1 t) - (\omega \cos \tilde{\psi} - p_1 \sin \tilde{\psi}) \exp(-p_2 t)] + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_z \sin(\omega t + \tilde{\psi}), \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (30)$$

gdzie p_1 i p_2 określone są za pomocą (19), a $\tilde{\psi} = \pi/2 - \varphi$, przy czym E_z i φ wyrażają się wzorami (7),



Rys. 4. Przykładowe odpowiedzi materiałów: b) Bürgersa, c) Boguslawskich, d) Zenera na cykliczną próbę naprężenia zmiennego pulsacyjnie (sinusoidalnie) – (a)
 Fig. 4. The example responses of materials: b) Bürgers', c) Boguslawskis', d) Zener's at the cyclic haversine (sinusoidal) stress test (a)



Rys. 5. Przykładowe odpowiedzi materiałów: b) Bürgersa, c) Bogusławskich, d) Zenera na cykliczną próbę odkształcenia zmiennego pulsacyjnie (sinusoidalnie) – (a)

Fig. 5. The example responses of materials: b) Bürgers', c) Boguslawskis', d) Zener's at the cyclic haversine (sinusoidal) strain test (a)

- w przypadku materiału Bogusławskich

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \sigma(0) \exp\left(-\frac{a}{b}t\right) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_z \left[1 - \exp\left(-\frac{a}{b}t\right)\right] + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_z \left[\sin(\omega t + \tilde{\psi}) - \sin \tilde{\psi} \exp\left(-\frac{a}{b}t\right)\right], \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (31)$$

gdzie a i b określone są za pomocą (3), a $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi} = \varphi - \pi/2$, przy φ i E_z wyrażonych wzorami (10),

- w przypadku materiału Zenera

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \sigma(0) \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) + \frac{\varepsilon_0 e}{2b} \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{a}t\right)\right] + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_z \left[\sin(\omega t - \tilde{\psi}) + \sin \tilde{\psi} \exp\left(-\frac{b}{a}t\right)\right], \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (32)$$

gdzie a , b i e określone są odpowiednio wzorami (4) i (5), a $\tilde{\psi} = \pi/2 - \varphi$, przy φ i E_z wyrażonych wzorami (12). Przy tym $\sigma(0)$ i $\dot{\sigma}(0)$ są początkowymi wartościami naprężenia i prędkości naprężenia.

Po przyjęciu (zgodnie z odpowiednimi schematami materiałów z rys. 1):

- w przypadku materiału Bürgersa

$$\sigma(0) = 0, \quad \dot{\sigma}(0) = 0, \quad (33)$$

- w przypadku materiału Bogusławskich i materiału Zenera według schematu (ii) z rys. 1c

$$\sigma(0) = 0, \quad (34)$$

oraz danych materiałowych z tablicy 1 i $\omega = 20\pi$ [1/s], $\varepsilon_0 = 130 \times 10^{-6}$ przykładowe wykresy zmienności $\sigma(t)$ pokazano na rys. 5b-d.

Wszystkie materiały, przy próbie cyklicznego odkształcenia pulsacyjnego (sinusoidalnego), wykazują po pewnym okresie początkowym (kilku cykli odkształcenia) naprężenia cykliczne również pulsacyjnie zmienne, z zakresem zmienności $\varepsilon_0 E_z$. Różnice dotyczą szybkości stabilizacji (ustalania się postaci harmoniczej) wyrażenia na naprężenie i kształtu krzywej zanikającej, wokół której oscyluje naprężenie. Ponadto w przypadku materiału Bürgersa wartość średnia naprężenia ustala się na poziomie zerowym, podczas gdy dla pozostałych materiałów na poziomie dodatnim.

5. PRÓBA IMPULSOWEGO SYMETRYCZNEGO NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

W przypadku naprężenia impulsowego symetrycznego (naprzemiennego): $\sigma(t) = \sigma_0$, $t \in [0, t')$; $\sigma(t) = -\sigma_0$, $t \in [t', \Delta t)$, rys. 6a, odpowiedzi materiałów Bürgersa, Bogusławskich i Zenera w postaci wyrażen na odkształcenie $\varepsilon(t)$, $t \in [0, \Delta t)$ przedstawiają się następująco:

- w przypadku materiału Bürgersa

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \frac{\sigma_0}{e} t + \left(\dot{\varepsilon}(0) - \frac{\sigma_0}{e} \right) \frac{f}{e} \left[1 - \exp \left(-\frac{e}{f} t \right) \right], \quad t \in [0, t'), \quad (35)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t') - \frac{\sigma_0}{e} (t - t') + \left(\dot{\varepsilon}(t') + \frac{\sigma_0}{e} \right) \frac{f}{e} \left[1 - \exp \left(-\frac{e}{f} (t - t') \right) \right], \quad t \in [t', \Delta t), \quad (36)$$

gdzie e i f określone są za pomocą (2),

- w przypadku materiału Bogusławskich

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ \varepsilon(0) [p_1 \exp(-p_2 t) - p_2 \exp(-p_1 t)] + \dot{\varepsilon}(0) [\exp(-p_2 t) - \exp(-p_1 t)] \} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left\{ 1 + \frac{1}{p_1 - p_2} [p_2 \exp(-p_1 t) - p_1 \exp(-p_2 t)] \right\}, \quad t \in [0, t'), \quad (37)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ \varepsilon(t') [p_1 \exp[-p_2(t-t')] - p_2 \exp[-p_1(t-t')]] + \dot{\varepsilon}(t') [\exp[-p_2(t-t')] - \exp[-p_1(t-t')]] \} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left\{ 1 + \frac{1}{p_1 - p_2} [p_2 \exp[-p_1(t-t')] - p_1 \exp[-p_2(t-t')]] \right\}, \quad t \in [t', \Delta t), \quad (38)$$

gdzie p_1 i p_2 określone są wzorami (9),

- w przypadku materiału Zenera

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) \exp \left(-\frac{e}{d} t \right) + \sigma_0 \frac{b}{e} \left[1 - \exp \left(-\frac{e}{d} t \right) \right], \quad t \in [0, t'), \quad (39)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t') \exp \left[-\frac{e}{d} (t - t') \right] - \sigma_0 \frac{b}{e} \left[1 - \exp \left(-\frac{e}{d} (t - t') \right) \right], \quad t \in [t', \Delta t), \quad (40)$$

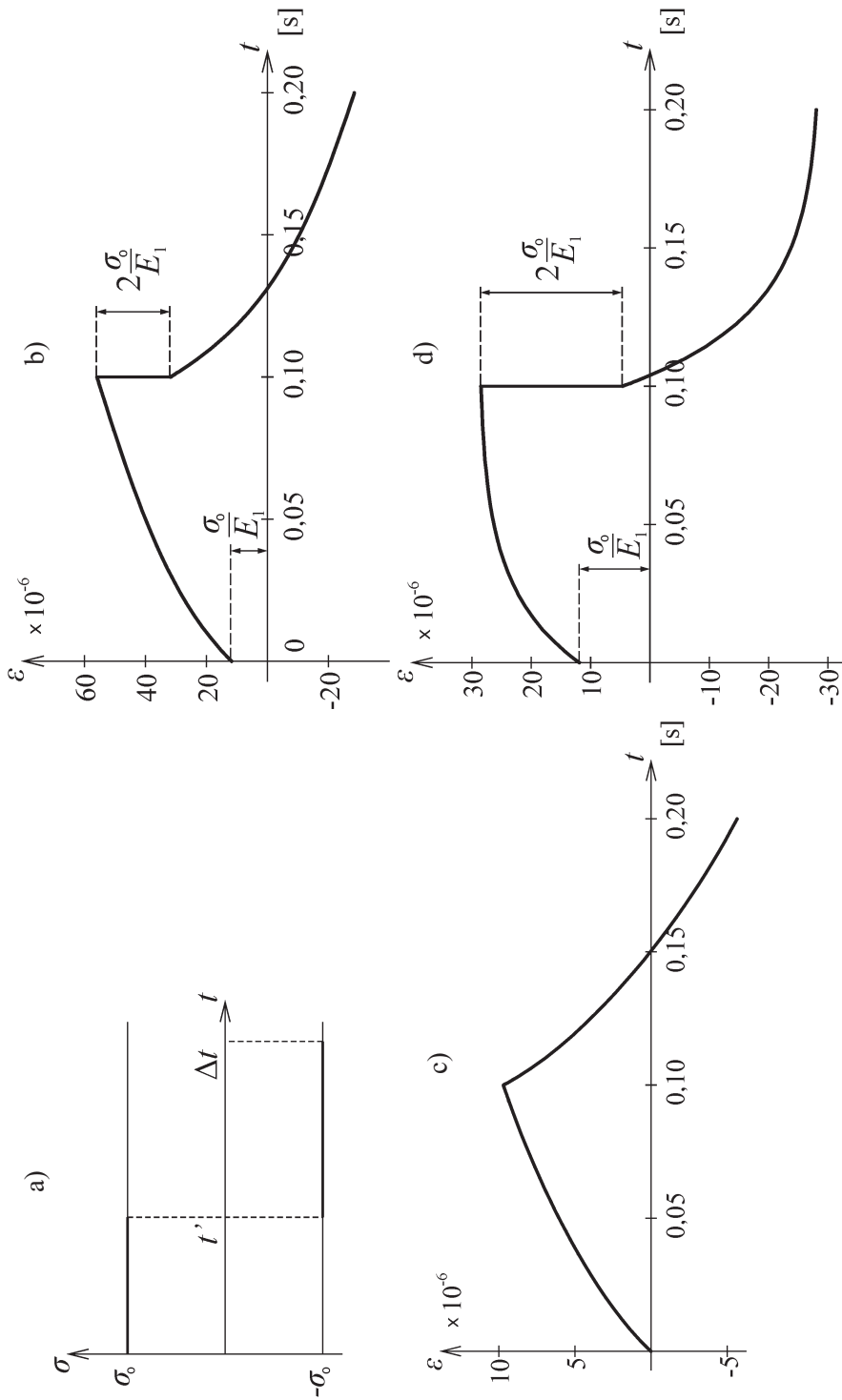
gdzie b , d i e wyrażone są odpowiednio wzorami (4) i (5). Przy tym $\varepsilon(0)$ i $\dot{\varepsilon}(0)$ są początkowymi wartościami odkształcenia i prędkości odkształcenia, $\varepsilon(t') = \varepsilon(t' - 0) + \Delta\varepsilon(t')$ i $\dot{\varepsilon}(t') = \dot{\varepsilon}(t' - 0) + \Delta\dot{\varepsilon}(t')$, a $\Delta\varepsilon(t')$ i $\Delta\dot{\varepsilon}(t')$ oznaczają skoki (natychmiastowe przyrosty) odkształcenia i prędkości odkształcenia w chwili t' .

Przyjmując zgodnie ze schematami materiałów na rys. 1:

- dla materiału Bürgersa

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_1}, \quad \dot{\varepsilon}(0) = \sigma_0 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right), \quad (41)$$

$$\Delta\varepsilon(t') = -\frac{2\sigma_0}{E_1}, \quad \Delta\dot{\varepsilon}(t') = -2\sigma_0 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right), \quad (42)$$



Rys. 6. Przykładowe odpowiedzi materiałów: b) Bürgersa, c) Bogusławskich, d) Zenera na próbę naprężenia zmiennego impulsowo symetrycznie (naprzemiennie) – (a) Fig. 6. The example responses of materials: b) Bürgers', c) Boguslawskis', d) Zener's at the impulse alternating (symmetric) stress test (a)

- dla materiału Bogusławskich

$$\varepsilon(0)=0, \quad \dot{\varepsilon}(0)=\frac{\sigma_0}{\eta_1+\eta_2}, \quad \Delta\varepsilon(t')=0, \quad \Delta\dot{\varepsilon}(t')=-\frac{2\sigma_0}{\eta_1+\eta_2}, \quad (43)$$

- dla materiału Zenera (schemat (i) z rys. 1c)

$$\varepsilon(0)=\frac{\sigma_0}{E_1}, \quad \Delta\varepsilon(t')=-2\frac{\sigma_0}{E_1}, \quad (44)$$

przedstawiono na rys. 6. b-d przykłady wykresów $\varepsilon(t)$, $t \in [0, \Delta t]$ przy danych z tablicy 1 oraz $t' = 0,1$ s, $\Delta t = 0,2$ s, $\sigma_0 = 100$ kPa.

Porównując odkształcenia rozważanych materiałów, można stwierdzić różnice jakościowe w ich zachowaniach przy próbie naprzemiennego impulsowego naprężenia. Materiał Bogusławskich nie wykazuje skokowej zmiany odkształcenia przy zmianie znaku naprężenia, jedynie nawrót („złamanie”) wykresu odkształcenia (skokowa zmiana prędkości odkształcenia), podczas gdy pozostałe materiały natychmiastową (sprężystą) zmianę odkształcenia. Mimo pewnego podobieństwa zachowania się materiałów Bürgersa i Zenera są między nimi istotne różnice jakościowe. Mianowicie, odcinki krzywoliniowe wykresu odkształcenia materiału Bürgersa przy zwiększaniu czasów trwania t' i Δt zbliżają się do prostych ukośnych, zależnych od parametrów materiałowych, a także warunków początkowych w chwilach $t=0^+$ i $t=t'^+$ – podczas, gdy analogiczne odcinki krzywoliniowe w odniesieniu dla materiału Zenera (a także materiału Bogusławskich) zbliżają się do stałych wartości zależnych jedynie od parametrów materiałowych (oczywiście wszystko proporcjonalnie do poziomu naprężenia σ_0). Wynika z tego, że jedynie dla krótkich okresów t' i Δt , czyli dla wymuszenia rzeczywiście impulsowego zachowania materiałów Bürgersa i Zenera są podobne.

W przypadku próby odkształcenia impulsowego symetrycznego (naprzemiennego) $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, $t \in [0, t']$; $\varepsilon(t) = -\varepsilon_0$, $t \in [t', \Delta t]$, rys. 7a, implikowane naprężenia wyrażają się odpowiednio wzorami:

- dla materiału Bürgersa

$$\sigma(t) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ \sigma(0) [p_1 \exp(-p_2 t) - p_2 \exp(-p_1 t)] + \dot{\sigma}(0) [\exp(-p_2 t) - \exp(-p_1 t)] \}, \quad t \in [0, t'], \quad (45)$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{p_2 - p_1} \{ \sigma(t') [p_1 \exp(-p_2 (t - t')) - p_2 \exp(-p_1 (t - t'))] + \dot{\sigma}(t') [\exp(-p_2 (t - t')) - \exp(-p_1 (t - t'))] \}, \quad t \in [t', \Delta t], \quad (46)$$

gdzie p_1 i p_2 określone są wzorami (19),

- dla materiału Bogusławskich

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{a} \left[1 - \exp\left(-\frac{a}{b} t\right) \right] + \sigma(0) \exp\left(-\frac{a}{b} t\right), \quad t \in [0, t'], \quad (47)$$

$$\sigma(t) = -\frac{\varepsilon_0}{a} \left[1 - \exp \left(-\frac{a}{b}(t-t') \right) \right] + \sigma(t') \exp \left(-\frac{a}{b}(t-t') \right), \quad t \in [t', \Delta t], \quad (48)$$

gdzie a i b określone są wzorami (3),

- dla materiału Zenera

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \frac{e}{b} \left[1 - \exp \left(-\frac{b}{a}t \right) \right] + \sigma(0) \exp \left(-\frac{b}{a}t \right), \quad t \in [0, t'], \quad (49)$$

$$\sigma(t) = -\varepsilon_0 \frac{e}{b} \left[1 - \exp \left(-\frac{b}{a}(t-t') \right) \right] + \sigma(t') \exp \left[-\frac{b}{a}(t-t') \right], \quad t \in [t', \Delta t], \quad (50)$$

gdzie a , b i e określone są odpowiednio wzorami (4) i (5), przy czym w powyższych wyrażeniach $\sigma(0)$ i $\dot{\sigma}(0)$ są początkowymi wartościami naprężenia i prędkości naprężenia, $\sigma(t') = \sigma(t' - 0) + \Delta\sigma(t')$ i $\dot{\sigma}(t') = \dot{\sigma}(t' - 0) + \Delta\dot{\sigma}(t')$, a $\Delta\sigma(t')$ i $\Delta\dot{\sigma}(t')$ oznaczają skoki (natychmiastowe przyrosty) naprężenia i prędkości naprężenia w chwili t' .

Jeśli przyjąć (zgodnie ze schematami na rys. 1)

- dla materiału Bürgersa

$$\sigma(0) = E_1 \varepsilon_0, \quad \dot{\sigma}(0) = -\left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_2} \right) E_1 \varepsilon_0, \quad (51)$$

$$\Delta\sigma(t') = -2E_1 \varepsilon_0, \quad \Delta\dot{\sigma}(t') = 2 \left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_2} \right) E_1 \varepsilon_0, \quad (52)$$

- dla materiału Bogusławskich

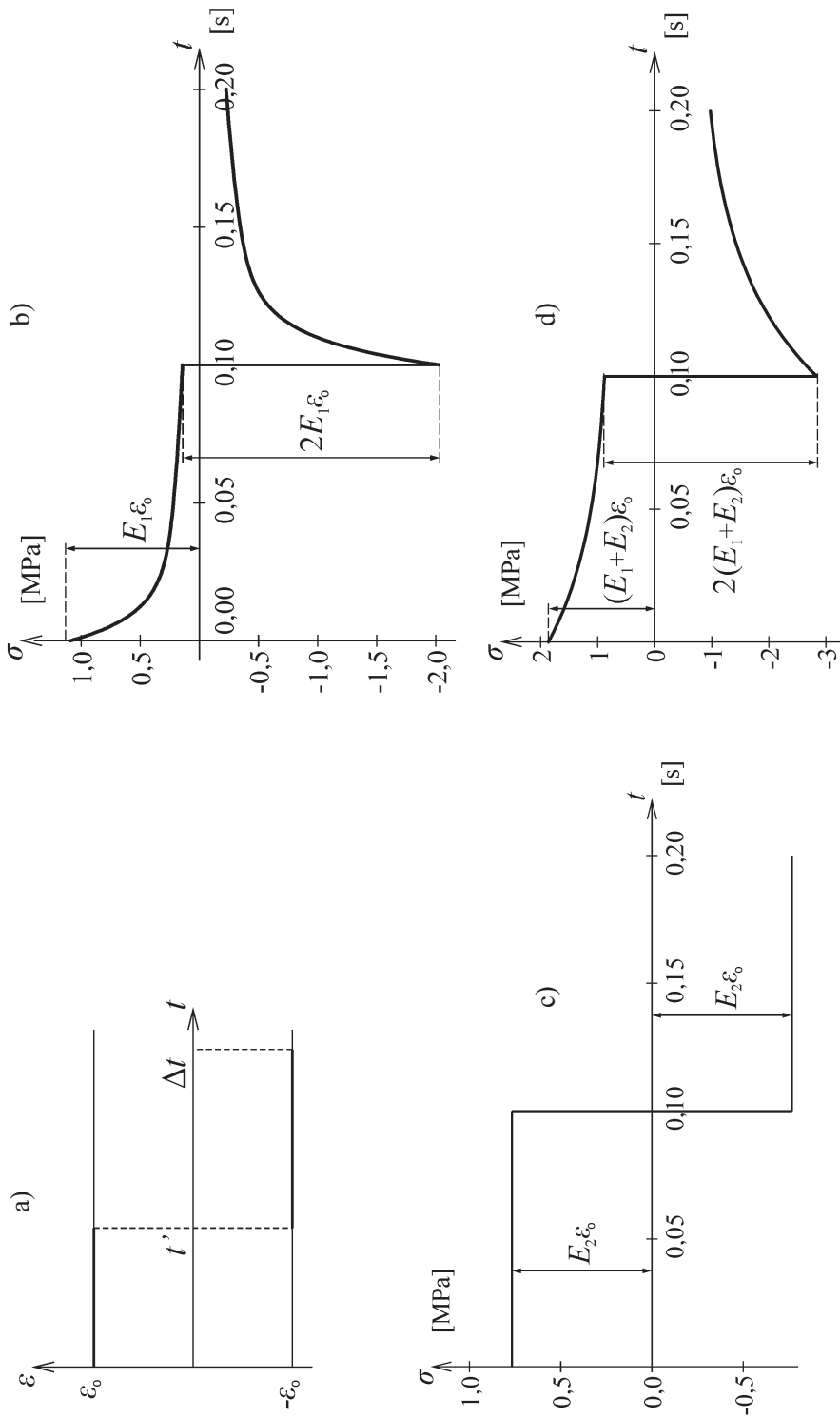
$$\sigma(0) = E_2 \varepsilon_0, \quad \Delta\sigma(t') = -2E_2 \varepsilon_0, \quad (53)$$

- dla materiału Zenera (przy schemacie (ii) z rys. 1c)

$$\sigma(0) = (E_1 + E_2) \varepsilon_0, \quad \Delta\sigma(t') = -2(E_1 + E_2) \varepsilon_0, \quad (54)$$

to rozważane materiały zachowują się jak pokazano na przykładowych wykresach $\sigma(t)$ na rys. 7b-d (przy danych z tablicy 1 oraz $t' = 0,1$ s, $\Delta t = 0,2$ s, $\varepsilon_0 = 130 \times 10^{-6}$).

Mimo pewnego podobieństwa zachowania się materiałów Bürgersa i Zenera jest między nimi istotna różnica jakościowa. Mianowicie, odcinki krzywoliniowe wykresu naprężenia materiału Bürgersa przy zwiększaniu czasów trwania t' i Δt dążą do zerowej wartości niezależnie od warunków początkowych w chwilach $t = 0^+$ i $t = t'^+$ – podczas, gdy analogiczne odcinki krzywoliniowe w odniesieniu dla materiału Zenera (a także materiału Bogusławskich) zbliżają się do stałych (niezerowych) wartości zależnych jedynie od parametrów materiałowych, niezależnie od warunków początkowych w chwilach $t = 0^+$ i $t = t'^+$ (oczywiście wszystko proporcjonalnie do poziomu naprężenia ε_0). Wykres na rys. 7c jest pewną ciekawostką właściwości materiału Bogusławskich (analogiczną właściwość ma materiał Zenera) – przy pewnym wariancie (uzasadnionym) warunków początkowych w chwilach $t = 0^+$ i $t = t'^+$ otrzymujemy naprężenia identycznej postaci jak próba odkształcenia. Przy pewnych warunkach początkowych można w bardzo krótkich przedziałach czasu (przy krótko trwających impulsach odkształcenia) wykorzystać podobne zachowanie się rozważanych materiałów.



Rys. 7. Przykładowe odpowiedzi materiałów: b) Bürgersa, c) Bogusławskich, d) Zener na próbę odkształcenia zmiennego impulsowo symetrycznie (naprzemiennie) – (a)
 Fig. 7. The example responses of materials: b) Bürgers', c) Boguslawskis', d) Zener's at the impulse alternating (symmetric) strain test (a)

6. PRÓBA IMPULSOWEGO JEDNOSTRONNEGO NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

W przypadku naprężenia impulsowego jednostronnego: $\sigma(t) = \sigma_0, t \in [0, t']$; $\sigma(t) = 0, t \in [t', \Delta t]$, rys. 8a, odpowiedzi materiałów Bürgersa, Bogusławskich i Zenera w postaci wyrażen na odkształcenie $\varepsilon(t)$ przedstawiają się następująco:

- w przypadku materiału Bürgersa

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \frac{\sigma_0}{e} t + \left(\dot{\varepsilon}(0) - \frac{\sigma_0}{e} \right) \frac{f}{e} \left[1 - \exp \left(-\frac{e}{f} t \right) \right], \quad t \in [0, t'], \quad (55)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t') + \dot{\varepsilon}(t') \frac{f}{e} \left[1 - \exp \left(-\frac{e}{f} (t - t') \right) \right], \quad t \in [t', \Delta t], \quad (56)$$

gdzie e i f określone są wzorami (2),

- w przypadku materiału Bogusławskich

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ \varepsilon(0) [p_1 \exp(-p_2 t) - p_2 \exp(-p_1 t)] + \dot{\varepsilon}(0) [\exp(-p_2 t) - \exp(-p_1 t)] \} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left\{ 1 + \frac{1}{p_1 - p_2} [p_2 \exp(-p_1 t) - p_1 \exp(-p_2 t)] \right\}, \quad t \in [0, t'], \quad (57)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ \varepsilon(t') [p_1 \exp[-p_2(t-t')] - p_2 \exp[-p_1(t-t')]] + \dot{\varepsilon}(t') [\exp[-p_2(t-t')] - \exp[-p_1(t-t')]] \}, \quad t \in [t', \Delta t], \quad (58)$$

gdzie p_1 i p_2 określone są wzorami (9),

- w przypadku materiału Zenera

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) \exp \left(-\frac{e}{d} t \right) + \sigma_0 \frac{b}{e} \left[1 - \exp \left(-\frac{e}{d} t \right) \right], \quad t \in [0, t'], \quad (59)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t') \exp \left[-\frac{e}{d} (t - t') \right], \quad t \in [t', \Delta t], \quad (60)$$

gdzie b , d i e wyrażają się odpowiednio wzorami (4) i (5). Przy tym $\varepsilon(0)$ i $\dot{\varepsilon}(0)$ są początkowymi wartościami odkształcenia i prędkości odkształcenia, $\varepsilon(t') = \varepsilon(t' - 0) + \Delta\varepsilon(t')$ i $\dot{\varepsilon}(t') = \dot{\varepsilon}(t' - 0) + \Delta\dot{\varepsilon}(t')$, a $\Delta\varepsilon(t')$ i $\Delta\dot{\varepsilon}(t')$ oznaczają skoki (natychmiastowe przyrosty) odkształcenia i prędkości odkształcenia w chwili t' .

Po przyjęciu w szczególności (zgodnie ze schematami na rys. 1)

- dla materiału Bürgersa

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_1}, \quad \dot{\varepsilon}(0) = \sigma_0 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right), \quad (61)$$

$$\Delta\varepsilon(t') = -\frac{\sigma_o}{E_1}, \quad \Delta\dot{\varepsilon}(t') = -\sigma_o \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right), \quad (62)$$

- dla materiału Bogusławskich

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = \frac{\sigma_o}{\eta_1 + \eta_2}, \quad \Delta\varepsilon(t') = 0, \quad \Delta\dot{\varepsilon}(t') = -\frac{\sigma_o}{\eta_1 + \eta_2}, \quad (63)$$

- dla materiału Zenera (według schematu (ii) z rys. 1c)

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_o}{E_1}, \quad \Delta\varepsilon(t') = -\frac{\sigma_o}{E_1}, \quad (64)$$

przykładowe wykresy zmienności $\varepsilon(t)$, $t \in [0, \Delta t]$ przy danych z tablicy 1 oraz $t' = 0,02$ s, $\Delta t = 0,1$ s, $\sigma_o = 100$ kPa są kolejno pokazane na rys. 8b-d.

Obserwując wykresy odkształcenia wszystkich trzech materiałów można skonstatować, że są one zbudowane z prawie podobnych dwóch części krzywoliniowych tylko inaczej zestawionych. Jednakże w materiale Bürgersa pozostaje po zakończeniu próby odkształcenie zależne od warunków początkowych w chwili $t = t'$, a te zależą od czasu trwania części pierwszej próby. Im dłuższy przedział $[0, t']$, tym większa wartość odkształcenia i potem większa wartość pozostałego odkształcenia trwałego, w tym lepkiego $\sigma_o t' / \eta_1$ (na rys. 8b mamy przypadek krótkotrwałego naprężenia, odpowiadającego normalnej prędkości przejazdu koła samochodu ciężarowego). Tymczasem materiał Bogusławskich nie wykazuje skoku odkształcenia (tylko jego nawrót), a ponadto przy każdym stanie początkowym drugiej części wykresu odkształcenia (w chwili $t = t'$) materiał się odpręża do zerowej wartości odkształcenia.

Natomiast materiał Zenera przy krótkim czasie trwania pierwszej części próby t' (w fazie narastania odkształcenia) zachowuje się podobnie jak materiał Bürgersa (jednakże przy rosnącym t' odkształcenie dąży do stałej wartości proporcjonalnej do σ_o), natomiast w drugiej części próby odpręża się, praktycznie do zerowej wartości odkształcenia przy odpowiednio długim czasie trwania Δt próby.

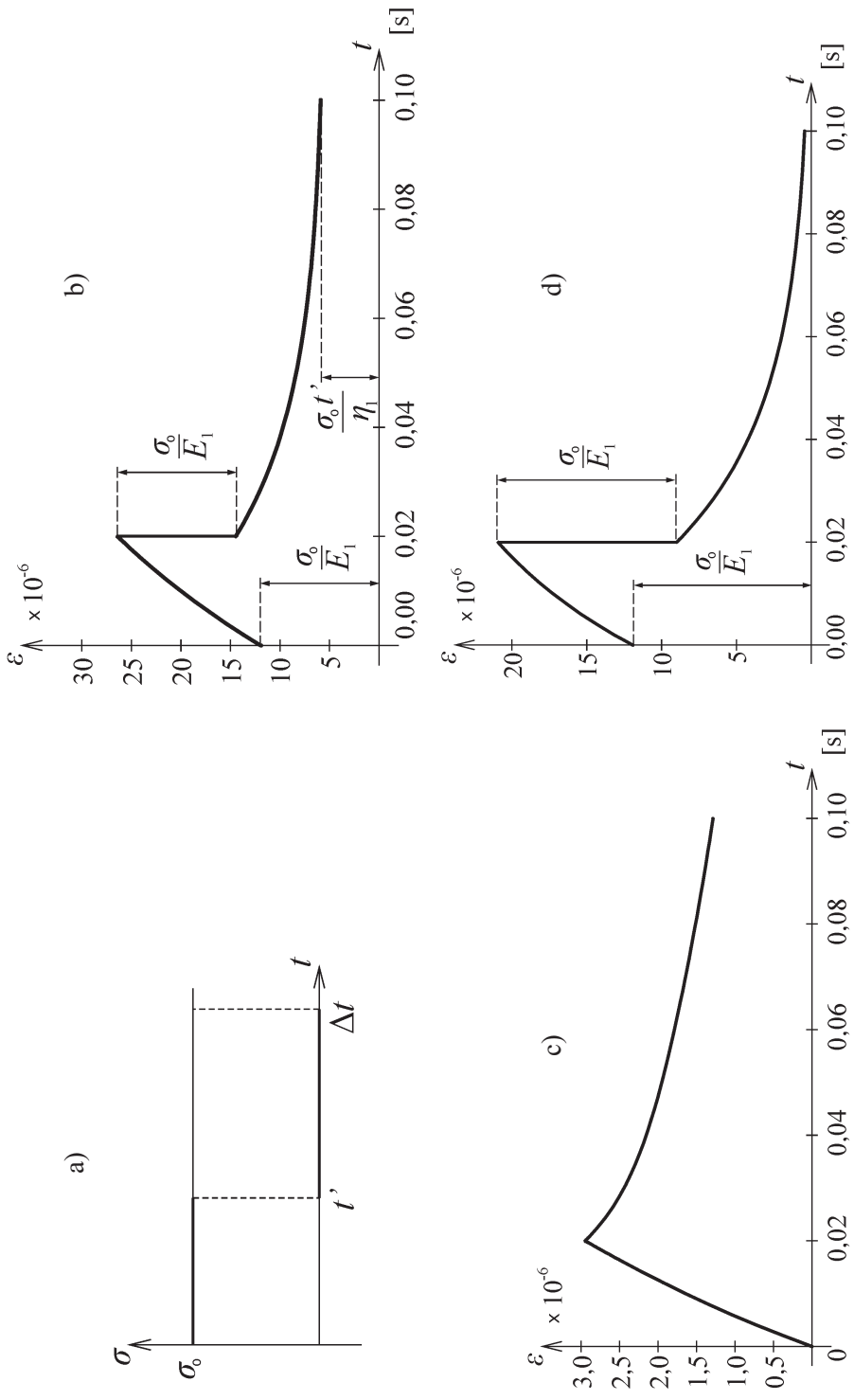
W przypadku próby odkształcenia impulsowego jednostronnego $\varepsilon(t) = \varepsilon_o$, $t \in [0, t']$; $\varepsilon(t) = 0$, $t \in [t', \Delta t]$, rys. 9a, rozważane materiały zachowują się odpowiednio zgodnie z następującymi wzorami:

- dla materiału Bürgersa

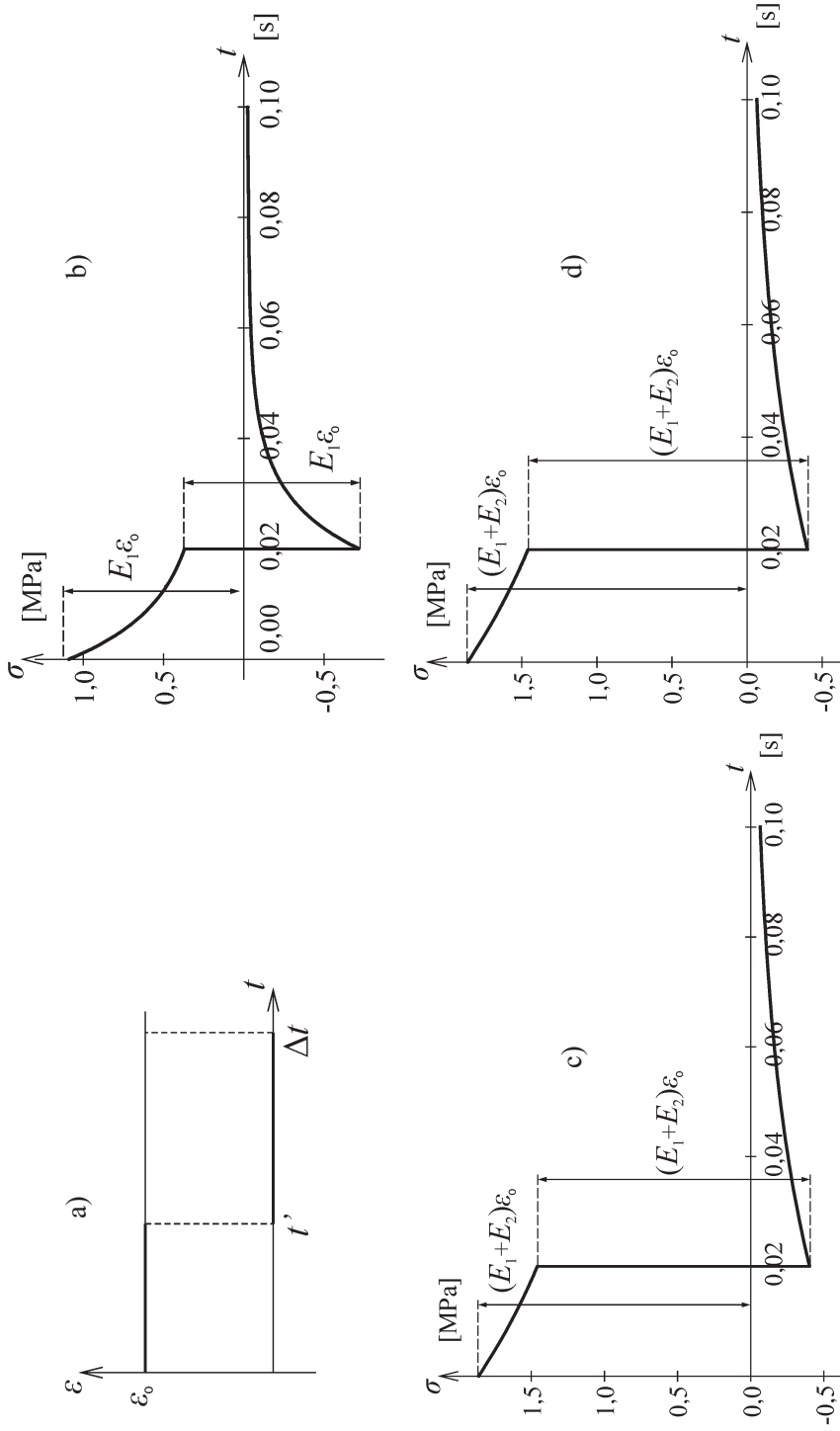
$$\sigma(t) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ \sigma(0) [p_1 \exp(-p_2 t) - p_2 \exp(-p_1 t)] + \dot{\sigma}(0) [\exp(-p_2 t) - \exp(-p_1 t)] \}, \quad t \in [0, t'], \quad (65)$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ \sigma(t') [p_1 \exp(-p_2 (t - t')) - p_2 \exp(-p_1 (t - t'))] + \dot{\sigma}(t') [\exp(-p_2 (t - t')) - \exp(-p_1 (t - t'))] \}, \quad t \in [t', \Delta t], \quad (66)$$

gdzie p_1 i p_2 określone są wzorami (19),



Rys. 8. Przykładowe odpowiedzi materiałów: b) Bürgersa, c) Boguslawskich, d) Zenera na próbę naprężenia zmiennego impulsowo jednostronnie (a)
 Fig. 8. The example responses of materials: b) Bürgers', c) Boguslavskis', d) Zener's at the impulse alternating one-side stress test (a)



Rys. 9. Przykładowe odpowiedzi materiałów: b) Bürgersa, c) Bogusławskich, d) Zenera na próbę odkształcenia zmiennego impulsowo jednostronnie (a)
 Fig. 9. The example responses of materials: b) Bürgers', c) Boguslavskis', d) Zener's at the impulse alternating one-side strain test (a)

- dla materiału Bogusławskich

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{a} \left[1 - \exp\left(-\frac{a}{b}t\right) \right] + \sigma(0) \exp\left(-\frac{a}{b}t\right), \quad t \in [0, t'), \quad (67)$$

$$\sigma(t) = \sigma(t') \exp\left[-\frac{a}{b}(t - t')\right], \quad t \in [t', \Delta t), \quad (68)$$

gdzie a i b określone są wzorami (3),

- dla materiału Zenera

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \frac{e}{b} \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) \right] + \sigma(0) \exp\left(-\frac{b}{a}t\right), \quad t \in [0, t'), \quad (69)$$

$$\sigma(t) = \sigma(t') \exp\left[-\frac{b}{a}(t - t')\right], \quad t \in [t', \Delta t), \quad (70)$$

gdzie a , b i e określone są odpowiednio wzorami (4) i (5), przy czym w powyższych wyrażeniach $\sigma(0)$ i $\dot{\sigma}(0)$ są początkowymi wartościami naprężenia i prędkości naprężenia, $\sigma(t') = \sigma(t' - 0) + \Delta\sigma(t')$ i $\dot{\sigma}(t') = \dot{\sigma}(t' - 0) + \Delta\dot{\sigma}(t')$, a $\Delta\sigma(t')$ i $\Delta\dot{\sigma}(t')$ oznaczają skoki (natychmiastowe przyrosty) naprężenia i prędkości naprężenia w chwili t' .

Jeśli przyjąć (zgodnie ze schematami na rys. 1)

- dla materiału Bürgersa

$$\sigma(0) = E_1 \varepsilon_0, \quad \dot{\sigma}(0) = -\left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_2}\right) E_1 \varepsilon_0, \quad (71)$$

$$\Delta\sigma(t') = -E_1 \varepsilon_0, \quad \Delta\dot{\sigma}(t') = \left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_2}\right) E_1 \varepsilon_0, \quad (72)$$

- dla materiału Bogusławskich

$$\sigma(0) = E_2 \varepsilon_0, \quad \Delta\sigma(t') = -E_2 \varepsilon_0, \quad (73)$$

- dla materiału Zenera (przy schemacie (ii) z rys. 1c)

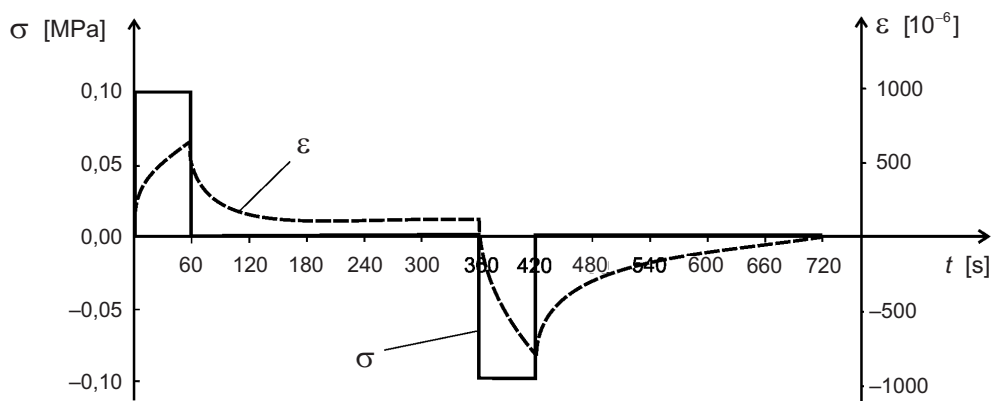
$$\sigma(0) = (E_1 + E_2) \varepsilon_0, \quad \Delta\sigma(t') = -(E_1 + E_2) \varepsilon_0, \quad (74)$$

to rozważane materiały zachowują się tak, jak pokazano na przykładowych wykresach $\sigma(t)$ na rys. 9b-d (przy danych z tablicy 1 oraz $t' = 0,02$ s, $\Delta t = 0,1$ s, $\varepsilon_0 = 130 \times 10^{-6}$).

Przy tej próbie wszystkie materiały zachowują się podobnie, zwłaszcza gdy czas trwania pierwszej części próby t' jest krótki. Identyczne jakościowo są wykresy naprężenia materiałów Bogusławskich i Zenera (przy analogicznych warunkach początkowych). Natomiast materiał Bürgersa zachowuje się podobnie – z tym, że przy dłuższym czasie t' materiał Bürgersa relaksuje do zerowych wartości σ w sposób niezależny od poziomu odkształcenia ε_0 , gdy tymczasem w pozostałych materiałach naprężenie maleje do ustalonej wartości proporcjonalnej do ε_0 . Przy $t > t'$ wszystkie trzy materiały odprężają się do zerowych wartości naprężenia.

7. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA W ODNIESIENIU DO MIESZANEK MINERALNO-ASFALTOWYCH

W uzupełnieniu rozważań zawartych w poprzednich punktach wykonano na maszynie wytrzymałościowej INSTRON⁵⁾ dwa jakościowe programy badań⁶⁾, które wraz z wynikami przedstawiono na rys. 10 i 11. Badaniu poddano próbkę walcową mieszanki mineralno-asfaltowej o średnicy 50 mm i wysokości 50 mm (AC 0/11), wyciętej z płyty powierzchni przygotowanej w laboratorium.



Rys. 10. Pełny cykl symetrycznego, skokowo zmiennego, okresowo stałego naprężenia:
program obciążenia – sterowanie naprężeniem σ w czasie;
odpowiedź próbki – zmienność odkształcenia ε w czasie

Fig. 10. Full cycle of symmetrically alternating and periodically constant stress: the load – the stress control σ in time; the sample response – the strain variation ε in time

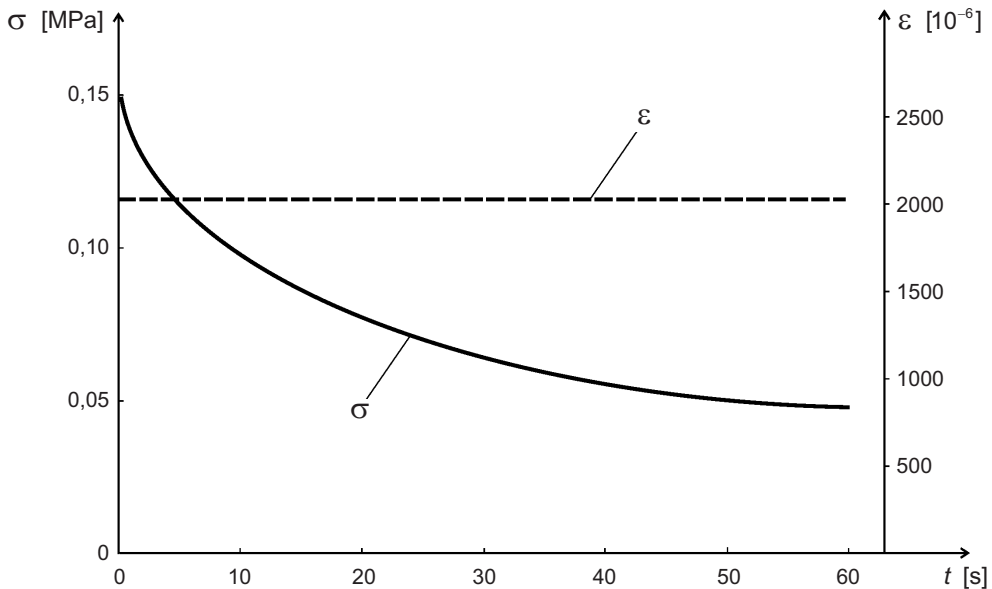
Jak można zauważyć pierwsza próba odpowiada jakościowo testowi materiału Bürgersa z rys. 8a-b, czyli według wzorów (55) i (56). Natomiast druga próba jest zgodna z testem stałego odkształcenia (ujemnego) materiału Zenera, z odpowiedzią według wzoru (69). Potwierdza to w szczególności tezę, że w zależności od charakteru i warunków „pracy” mieszanki, różne modele bardziej lub mniej adekwatnie opisują zachowanie się tej mieszanki.

Zauważone różnice między rzeczywistą odpowiedzią materiału a testami teoretycznymi dla przedziałów czasu przyjętych w badaniu laboratoryjnym mają przyczynę

⁵⁾ w Katedrze Inżynierii Materiałów Budowlanych Politechniki Warszawskiej

⁶⁾ jakościowych w tym sensie, że drugorzędne były wartości mierzonych wielkości, natomiast istotny był charakter odpowiedzi w czasie badanej próbki przedstawiony na wykresach

między innymi w charakterze struktury materiałowej zastosowanego betonu asfaltowego AC 11. Materiał jest mieszaniną lepkosprężystego lepiszcza asfaltowego i relatywnie nieodkształcalnych ziaren kruszyw różnej wielkości. Udział objętościowy lepiszcza wynosi około 13% v/v, pozostała część to kruszywo 83% i wolne przestrzenie 4% v/v. W większości testów kruszywo odgrywa dominującą rolę w zaburzaniu teoretycznej odpowiedzi materiału „czysto lepkosprężystego”. Można przypuszczać, że istnieje zależność między wielkością maksymalnego ziarna w badanym materiale a stopniem zgodności jego rzeczywistej odpowiedzi z teoretycznym modelem lepkosprężystym.



Rys. 11. Próba relaksacji: program sterowania – stałe odkształcenie ε w czasie; odpowiedź próbki – zmienność naprężenia σ w czasie

Fig. 11. Test of relaxation: the control program – the constant strain ε in time; the sample response – the stress variation σ in time

8. PODSUMOWANIE

Podane w postaci wzorów ogólnych odpowiedzi materiałów na rozważane testy naprężenia lub odkształcenia mają charakter uniwersalny, tj. niezależny od wartości przyjętych stałych materiałowych i warunków początkowych oraz parametrów programów naprężenia testowego.

Natomiast ilustracje liczbowe na wykresach zostały przygotowane po przyjęciu wartości parametrów testów odpowiadających charakterystykom ruchu realnego pojazdu na drodze z realną prędkością (Δt rzędu 0,1 s). W szczególności dla takich wartości parametrów testu zostały zidentyfikowane wartości współczynników materiałowych w modelu Bürgersa, przyjęte dla celów porównawczych do obliczeń dla rozważanych modeli

materiałów. Jednakże tego rodzaju testy, zwłaszcza próba impulsowego jednostronnego naprężenia przy małych wartościach t' ($t' = 0,02$ s) pokazująca zachowanie materiału przy przejeździe koła samochodowego z realną prędkością oraz próby wymuszenia odkształcenia, są praktycznie bardzo trudne do zrealizowania w laboratorium. Stąd konieczność walidacji pośrednich rozważanych „materiałów teoretycznych” jako modeli materiałów i mieszanek w nawierzchniach drogowych. Do tego pomocne mogą być zaprezentowane testy teoretyczne i ich analiza porównawcza.

W zależności od czynników oddziałujących na nawierzchnię lub warunków w nawierzchni przydatne mogą być różne modele materiałów w zależności od zagadnienia opisywanego z wykorzystaniem określonego modelu materiału. Na przykład, przy obciążeniu udarowym (występującym przy skokowej nierówności poprzecznej) materiał Bogusławskich nie wykazujący z racji „początkowej lepkości” doraźnych odkształceń sprężystych jest najbardziej adekwatny do modelowania dynamicznego tego zjawiska. Z kolei materiał Zenera dobrze opisuje relaksację mieszanki mineralno-asfaltowej.

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Kalabińska M., Pilat J.*: Reologia asfaltów i mas mineralno-asfaltowych. WKŁ, Warszawa 1982
- [2] *Judycki J.*: Modele Reologiczne Betonu Asfaltowego. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, seria „Budownictwo Lądowe”, nr 368, 1984
- [3] *Boguslavski A.M., Boguslavski L.A.*: Vorausschätzung der Sprung und Deformationbeständigkeit der Asphaltbeläge. 3. Konferencja Drogowa, Budapeszt, 1973
- [4] *Derski W., Ziemia S.*: Analiza modeli reologicznych. PWN, Warszawa 1968
- [5] *Nagórski R., Wiśniakowski P., Błażejowski K., Nagórska M.*: Materiał Bürgersa w świetle podstawowych testów naprężenia i odkształcenia, w: Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions „Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Ed. Szcześniak W., **18**, 219 - 228, Warsaw 2010
- [6] *Nagórski R., Wiśniakowski P., Błażejowski K., Nagórska M.*: Materiał Boguslavskich w świetle podstawowych testów naprężenia i odkształcenia, w: Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions „Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Ed. Szcześniak W., **18**, 229 - 238, Warsaw 2010
- [7] *Nagórski R., Wiśniakowski P., Błażejowski K., Nagórska M.*: Materiał Zenera w świetle testów naprężenia i odkształcenia”, w: Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions „Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Ed. Szcześniak W., **19**, 191 - 202, Warsaw 2011
- [8] *Nagórski R., Wiśniakowski P., Błażejowski K., Nagórska M.*: Analiza porównawcza właściwości materiałów Bürgersa, Boguslavskich i Zenera w świetle testów naprężenia i odkształcenia, w: Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions „Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Ed. Szcześniak W., **19**, 179 - 190, Warsaw 2011

- [9] Nilsson R.: A viscoelastic approach to flexible pavement design. Licentiate Thesis, Royal Institute of Technology, Department of Infrastructure and Planning, Stockholm 1999

INFORMACJE DODATKOWE

Praca przedstawia fragment rezultatów prac statutowych na temat modeli materiałów nawierzchni drogowych, prowadzonych przez autorów w Zakładzie Mechaniki Teoretycznej i Mechaniki Nawierzchni Komunikacyjnych Instytutu Dróg i Mostów Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej.

COMPARATIVE ANALYSIS OF PROPERTIES OF BÜRGERS', BOGUSLAVSKIS' AND ZENER'S MATERIALS IN VIEW OF TESTS OF STRESS AND STRAIN IN REFERENCE TO PROPERTIES OF ASPHALT MIXES

Abstract

In the paper a comparative analysis of behaviour and properties of Bürgers', Boguslavskis' and Zener's materials is presented. The analysis is based on results of a series of tests of one-dimensional stress-strain relations under selected programs of stress or strain control: harmonic, haversine, alternate and impulse type. The presented results enrich the image of behaviour of mentioned materials which can be considered as the relatively simple models of complex visco-elastic behaviour of asphalt mix in road pavement. Analyzed models showed different responses and then it was possible to evaluate of their applicability to modelling of real asphalt mixtures. In the laboratory two simple tests were carried out to check the responses of the samples made of asphalt concrete AC 11 to verify different models behaviour.

Keywords

Asphalt concrete, comparative analysis, models of pavement materials, tests of stress and strain, visco-elastic models