

CZESŁAW MACHELSKI<sup>1)</sup>

## SZTYWNOŚĆ POWŁOK WARSTWOWYCH OBIEKTÓW GRUNTOWO-POWŁOKOWYCH

**STRESZCZENIE.** W artykule przedstawiono analizę skutków podatności połączenia arkuszy blach falistych, popartą wynikami badań zrealizowanych na płytach warstwowych z blachy falistej Super Cor. Celem badań była analiza naprężeń i ugięć w funkcji intensywności obciążenia do wartości granicznych włącznie. Analizowano sztywność połączenia w zakresie obciążeń występujących podczas budowy i eksploatacji obiektu. Wyniki tych analiz mogą służyć do prognozowania przemieszczeń powłoki podczas zasypki oraz obliczeń rozkładu sił wewnętrznych pod obciążeniami użytkowymi. Wykazano, że sztywność połączenia zależy od intensywności obciążenia, również podczas budowy i eksploatacji.

**SŁOWA KLUCZOWE:** deformacja powłoki, most gruntowo-powłokowy, sztywność powłok warstwowych

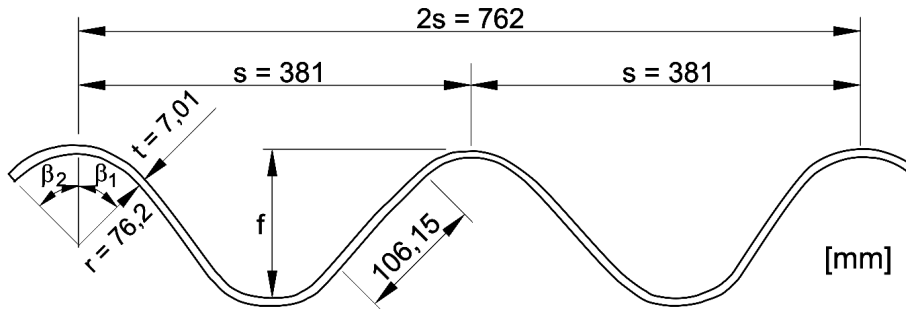
### 1. DEFORMACJA POWŁOKI PODCZAS BUDOWY

Powłoki obiektów gruntowo-powłokowych mostów małych i średnich rozpiętości wykonuje się zwykle z arkuszy blach falistych łączonych na zakładkę. Gdy sztywność powłoki jest niewystarczająca, stosuje się nakładkę obwodową w postaci pełnego płaszcza lub pasm odcinkowych, połączonych śrubami.

W roku 2005 w Kanadzie na terenie kopalni odkrywkowej wybudowano obiekt gruntowo-powłokowy o największej obecnie rozpiętości  $L = 24$  m [1]. Jego konstrukcję utworzono z powłoki o jednym promieniu, ze stalowej blachy o wysokim profilu SC  $381 \times 140 \times 7$  (Super Cor o wymiarach: długość fali, jej wysokość, grubość blachy [2]), jak na rysunku 1. W celu uzyskania niezbędnej sztywności, podczas układania zasypki wzmocniono ją na całym obwodzie żebrami wypełnionymi betonem „EC ribs” [1].

<sup>1)</sup> dr hab. inż. – profesor na Wydziale Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej

Dodatkowo zbrojono zasypkę gruntową ocynkowaną siatką stalową, w obszarze zbliżonym do powłoki. Takie zabiegi techniczne pozwoliły na ograniczenie wskaźnika wypiętrzenia [3, 4] określanego jako  $w/L = 0,396\%$  ( $w$  jest wypiętrzeniem). Obiekt gruntowo-powłokowy pokazany na rysunku 2, o elewacji wykonanej z kamienia zaprojektowano na obciążenie eksploatacyjne w postaci koparki o całkowitej masie 1144 ton [1]. Jest to obciążenie niespotykane w eksploatowanych konstrukcjach mostów drogowych.



Rys. 1. Geometria blachy falistej powłoki Super Cor  
Fig. 1. Corrugated profile shells on Super Cor



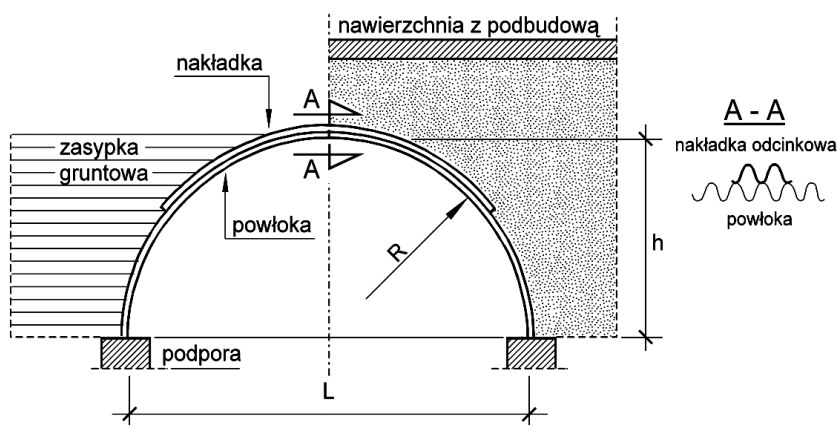
Rys. 2. Mostowy obiektu gruntowo-powłokowy w Whitehorse Creek [1]  
Fig. 2. The Whitehorse Creek soil-steel bridge structure [1]

Obecnie największym obiektem gruntowo-powłokowym w Polsce jest przejście dla zwierząt, pokazane na rys. 3. Obiekt zaprojektowano z powłoką o dwóch promieniach krzywizny i rozpiętości  $L = 20$  m z blachy o profilu  $SC 380 \times 140 \times 7,1$  z dodatkowym

uźebrowaniem odcinkowym (rys. 4), z blachy SC 380 × 140 × 5,5 o rozstawie 1,524 m [4]. Takie usztywnienie powłoki pozwoliło na ograniczenie wskaźnika wypiętrzenia do  $w/L = 0,695\%$ .



Rys. 3. Przejście dla zwierząt o konstrukcji gruntowo-powłokowej w Gajcu  
Fig. 3. Animal overpass soil-steel structure in Gajec



Rys. 4. Przekrój poprzeczny obiektu gruntowo-powłokowego  
Fig. 4. Cross-section of a soil-steel structure

W mostowych obiektach gruntowo-powłokowych (rys. 4) elementami konstrukcyjnymi są: stalowa powłoka z blachy falistej, otaczająca i współpracująca z nią zasypka gruntowa oraz nawierzchnia jezdni. Sztywność konstrukcji gruntowo-powłokowej ujęta jest we wskaźniku [2, 3]

$$\lambda = \frac{E_g}{EI} s L^3 \quad , \quad (1)$$

gdzie:

$E_g$  – moduł odkształceń gruntu,

$EI/s$  – sztywność giętna blachy falistej (odniesiona do długości fali  $s$ ),

$L$  – rozpiętość powłoki.

W celu utrzymania projektowej geometrii konstrukcji podczas układania zasypki (jak również uzyskania nośności pod obciążeniami eksploatacyjnymi w obiektach o kształcie skrzynkowym [2, 3]), konieczna jest odpowiednia sztywność powłoki. W grunto-powłokowych obiektach małych i średnich rozpiętościach wykonuje się zwykle powłoki jako jednowarstwowe z blach falistych łączonych na zakładkę [2]. Gdy jej sztywność jest niewystarczająca z uwagi na projektowany kształt powłoki lub jej rozpiętość stosuje się nakładkę w postaci pełnego płaszcza lub pasmowych wycinków obwodowych (rys. 4). Podstawową miarą deformacji powłoki jest jej największe ugięcie gdy zasypka osiąga poziom kluczu, określane jako wypiętrzenie  $w$ . Zwykle odniesione jest ono do rozpiętości  $L$  i ujęte w postaci wskaźnika [3, 4]

$$\frac{w}{L} 100\% = f(P, G) \quad [\%], \quad (2)$$

gdzie:

$P$  – parametry geometryczne kształtu powłoki [2 - 4],

$G$  – cechy geometryczne i fizyczne gruntu zasypki [2, 3].

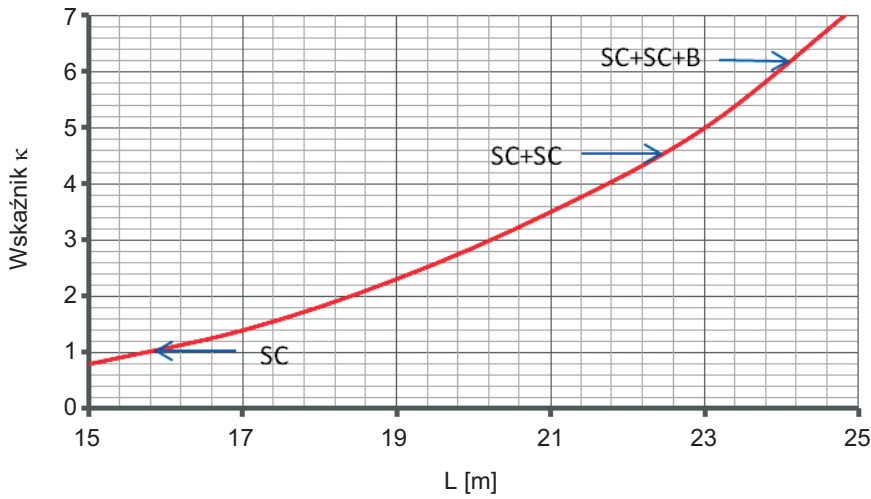
Na rysunku 5 przedstawiono wykres zależności sztywności powłoki od jej rozpiętości wyznaczony przy przyjęciu jako kryterium  $w/L = 0,75\%$  podczas układania zasypki. W modelu obiektu przyjęto powłokę o kształcie kołowym i promieniu krzywizny  $R$  i wysokości  $h = R$  a stąd  $L = 2R$  (rys. 4). Cechy fizyczne zasypki gruntowej to  $E_g = 21000 \text{ kN/m}^2$  oraz  $\gamma_g = 21 \text{ kN/m}^3$ . Moment bezwładności powłoki z nakładką  $I_{SC}$  w analizowanym obiekcie odniesiono do powłoki utworzonej z blachy falistej SC  $380 \times 140 \times 7,1$   $I_b/s = 24164 \text{ mm}^4/\text{mm}$  [2]. Parametrem określającym sztywność powłoki podstawowej, współpracującej z nakładką  $EI_{SC}$  jest wskaźnik

$$\kappa(SC) = \frac{EI_{SC}}{EI_b}, \quad (3)$$

odniesiony do sztywności powłoki podstawowej  $EI_b$ . Sens fizyczny tego wskaźnika omówiono w p. 3 jako parametru służącego do oceny podatności połączenia blach. Na rysunku 5 oznaczono jako SC powłokę utworzoną z blachy Super Cor bez nakładki, natomiast SC+SC jako powłokę z nakładką z tej samej blachy, a w przypadku SC+SC+B z przestrzenią wypełnią betonem pomiędzy blachami.

Z wykresu przedstawionego na rysunku 5 wynikają maksymalne rozpiętości  $L$  powłok o kształcie połowy koła obiektów grunto-powłokowych przy założonym  $w/L = 0,75\%$ . W przypadku powłoki wykonanej z pojedynczej blachy, gdy  $\kappa(SC) = 1$  można zaprojektować obiekt o rozpiętości  $L < 16 \text{ m}$ . W celu uzyskania większych rozpiętości, gdy  $4,5 > \kappa(SC) > 1$  konieczne jest zastosowanie nakładki. Nakładka może

być z blachy o tym samym profilu w układzie odcinkowym, jak na rys. 4. Zwiększenie sztywności w zakresie  $6,6 > \kappa(SC) > 4,5$  możliwe jest w przypadku zastosowania nakładki (SC+SC) w postaci pełnego płaszcza. W nakładkach stosuje się również mniejsze grubości blachy niż w powłoce podstawowej  $t > t_n$ . Wartości  $\kappa(SC) > 6,6$  można uzyskać dopiero po wypełnieniu przestrzeni pomiędzy blachami falistymi betonem „EC ribs” (SC+SC+B), jak w przypadku obiektu podanego na rys. 2.



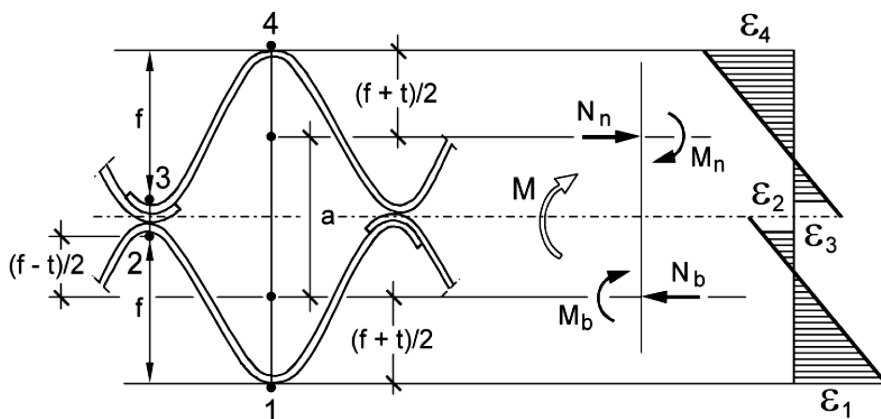
Rys. 5. Zależność sztywności powłoki od jej rozpiętości  
Fig. 5. Dependence of stiffness of shell as span

Wykres przedstawiony na rys. 5 dotyczy wyłącznie powłok o kształcie kołowym [2], jak na rys. 4. Do określenia zakresów wartości  $\kappa(SC)$  przyjęto założenie idealnego połączenia blach powłoki podstawowej z nakładką (jak w połączeniu spawanym). Wpływ podatności punktowego połączenia blach z użyciem śrub, jak w stosowanych konstrukcjach powłok, poddano analizie w niniejszej pracy z wykorzystaniem wyników badań podanych w [5] i metodyki szacowania sztywności omówionej w [6].

## 2. SIŁY WEWNĘTRZNE W ZGINANYM ELEMENTIE WARSTWOWYM

Układ sił wewnętrznych w powłoce podstawowej i nakładce, przedstawiony na rys. 6, zależy od sztywności połączenia obydwu elementów z uwagi na ścinanie. W analizach statycznych konstrukcji warstwowych, w tym także zespolonych, stosuje się zwykle rozdział sił wewnętrznych na elementy stanowiące dźwigar [6, 7]. W rozpatrywanym przypadku globalny moment zginający  $M$  rozkłada się na dwa układy sił oddziałujących na blachę podstawową (bazową) i nakładkę. Odniesione są one do geometrycznych środków elementów składowych przekroju poprzecznego. Ich odległość jest stała i wynosi:

$$a = f + \frac{3}{2}t . \quad (4)$$



Rys. 6. Geometria, siły wewnętrzne i odkształcenia w połączonych elementach

Fig. 6. Shape of cross-section, schematic internal forces and deformation distribution in connecting elements

Na rys. 6 przedstawiono oznaczenia pionowych wymiarów przekroju poprzecznego i składowych sił wewnętrznych, odniesionych do jego części (z odpowiednimi indeksami:  $n$  w przypadku nakładki i  $b$  w przypadku blachy podstawowej). W wykresie odkształceń jednostkowych, powstałych od zginania widoczna jest nieciągłość odkształceń w styku obydwu elementów, zależąca od sztywności połączenia  $C_z$  [7], definiowanej jako stosunek siły stycznej  $T$  do wartości wzajemnego przemieszczenia  $\delta$ , jak we wzorze:

$$C_z = \frac{T}{\delta} . \quad (5)$$

Ze wzoru (5) korzysta się w badaniach połączenia elementów blach w próbie czystego ścinania (ang. *push out test*), realizowanych w laboratorium z użyciem maszyny wytrzymałościowej. Takie badanie dotyczy połączenia poprzecznego powłokach w postaci zakładki [8] a nie podłużnego (obwodowego) [5], jak rozpatrywanego w pracy. W pierwszym przypadku linia połączenia blach jest prostopadła do kierunku wypadkowej siły  $T$  natomiast w drugim jest współliniowa. W ogólnym przypadku, a w szczególności, w układach elementów poddanych zginaniu, jak w pracy, siła styczna  $T(x)$  lub sztywność połączenia  $C_z(x)$ , na długości nie jest stała. Wówczas korzysta się z zależności [7]:

$$C_z(x) \frac{d\delta}{dx} = \frac{dT}{dx} . \quad (6)$$

Określona w taki sposób sztywność połączenia  $C_z(x)$  jest stosowana w obliczeniach zginanych dźwigarów zespolonych, z wykorzystaniem równania [6]:

$$\frac{E}{C_z} \frac{I_b + I_a}{a} \left( \frac{d^2 N_b}{dx^2} - \frac{1}{C_z} \frac{dN_b}{dx} \frac{dC_z}{dx} \right) - \frac{I_x (A_b + A_n)}{a A_b A_n} N_b + M = 0 , \quad (7)$$

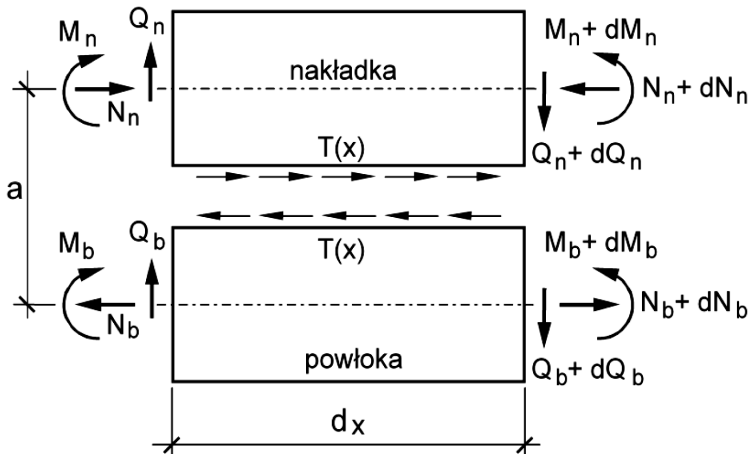
gdzie zgodnie z rys. 6:

- $M$  – moment zginający w analizowanym przekroju poprzecznym,
- $A_b, A_n$  – pola powierzchni elementów składowych przekroju poprzecznego,
- $I_b, I_n$  – momenty bezwładności blach falistych względem własnych osi bezwładności,
- $E$  – moduł Younga stali = 205 000 kN/m<sup>2</sup>.

Na rys. 7 przedstawiono układ sił wewnętrznych w wycinku obwodowym łączonych elementów. Z warunku statycznego wynika, że siła styczna w połączeniu zależy od siły osiowej  $N_b$ , jak we wzorze:

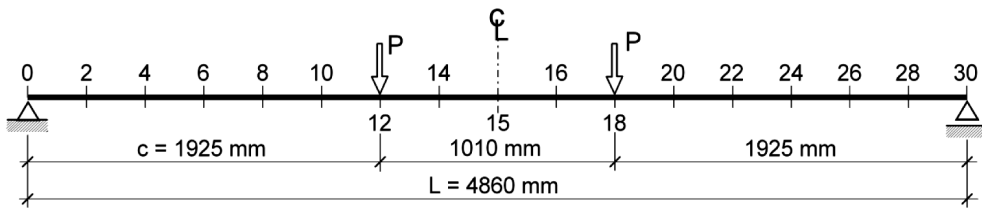
$$T(x) = \frac{dN_b}{dx} . \quad (9)$$

Zakładając liniową zmianę  $N_b$  otrzymuje się stałą wartość  $T(x) = T$ , jak w badaniach *push out test*.



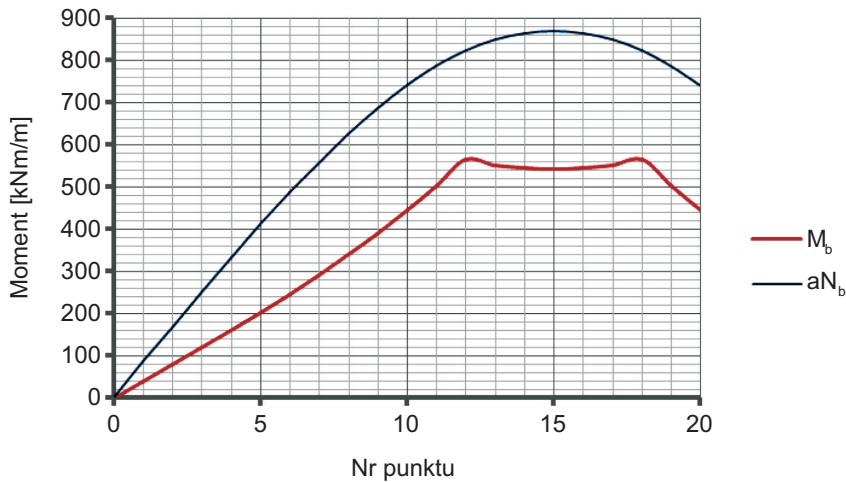
Rys. 7. Siły wewnętrzne w wycinku obwodowym zginanego układu warstwowego  
Fig. 7. Internal forces in circumferential segment of layered structure

Przykład wyników uzyskanych z rozwiązania równania (7) przy założeniu schematu obciążeń według rys. 8 przedstawiono na rys. 9. Ten schemat obliczeniowy realizowano również w badaniach modelu [5], omówionych w p. 4. Założono w obliczeniach, że sztywność połączenia jest stała na długości płyty i wynosi  $C_z = 250$  kN/m<sup>2</sup>. W badaniach wymuszono zginanie walcowe płyty warstwowej złożonej z dwóch, jednakowych blach falistych SC 380 × 140 × 7,1 o parametrach geometrycznych  $A_n = A_b = 9,81$  mm<sup>2</sup>/mm oraz  $I_b = I_n = 24164$  mm<sup>4</sup>/mm [2]. Obciążeniem płyty o rozpiętości  $L = 4860$  mm są dwie siły skupione (rozłożone równomiernie w przekroju poprzecznym) o wartości  $P = 100$  kN.



Rys. 8. Schemat obciążenia elementu zginanego

Fig. 8. Location of bending load on a beam



Rys. 9. Wykresy sił wewnętrznych w elemencie układu warstwowego

Fig. 9. Diagram of internal forces distribution in layered structure

Z przedstawionych na rys. 9 wykresów sił wewnętrznych  $aN_b(x)$  i  $M_b(x)$  wynika, że ich zmiany mają ciągły przebieg na długości elementu z załamaniem w miejscu obciążenia. Kształty wykresów, a szczególnie wartości ekstremalne zależą od sztywności połączenia  $C_z$ .

### 3. WSKAŹNIK PODATNOŚCI POŁĄCZENIA

Funkcja  $C_z(x)$ , podana w (6), jest trudna do identyfikacji, na podstawie wyników badań układu elementów zginanych. Przemieszczenie wzajemne w styku  $d\delta/dx$  można uzyskać z pomiaru, natomiast  $dT/dx$  wyłącznie z obliczeń. Zgodnie z równaniem (6) funkcje  $dT/dx$  oraz  $C_z(x)$  są wzajemnie uwikłane. W badaniach *in-situ* elementów mostowych konstrukcji poddanych zginaniu, do określenia efektów podatności połączenia zaproponowano bezwymiarowy wskaźnik  $\mu$  [6, 9]. Wyznacza się go na podstawie wykresu odkształceń jednostkowych w rozpatrywanym przekroju dźwigara (rys. 6) jako proporcja sił przekrojowych w elemencie podstawowym (bazowym)



$$\mu_b = \frac{a N_b}{M_b} . \quad (9)$$

Analogiczny wskaźnik uzyskuje się rozpatrując siły w nakładce

$$\mu_n = \frac{a N_n}{M_n} . \quad (10)$$

Korzystając z zależności statycznej równowagi momentów zginających w przekroju poprzecznym (rys. 6) otrzymuje się dwa, równorzędne równania:

$$M_n + M_b + a N_b = M \quad (11)$$

oraz

$$M_n + M_b + a N_n = M . \quad (12)$$

Są one równoważne z uwagi na zależność statyczną sił osiowych w elemencie zginanym

$$N_n = N_b . \quad (13)$$

Wprowadzając wskaźniki połączenia z (9) i (10) do (11) i (12) otrzymuje się równania momentów zginających:

$$M_b + (1 + \mu_n) M_n = M \quad (14)$$

oraz

$$(1 + \mu_b) M_b + M_n = M . \quad (15)$$

Korzystając z warunku zgodności krzywizn w przekroju poprzecznym łączonych elementów otrzymuje się związek między wypadkowym momentem zginającym dźwiagar  $M$  a momentami zginającymi elementy składowe:

$$\frac{M}{EI} = \frac{M_b}{EI_b} = \frac{M_n}{EI_n} . \quad (16)$$

Wykorzystując wzór (16) i równanie momentów (15) otrzymuje się moment bezwładności całego przekroju poprzecznego jako układu warstwowego z uwzględnieniem podatności połączenia (rys. 6):

$$I = \frac{M}{M_n} I_n = (1 + \mu_n) I_n + \frac{I_b}{I_n} I_n = (1 + \mu_n) I_n + I_b \quad (17)$$

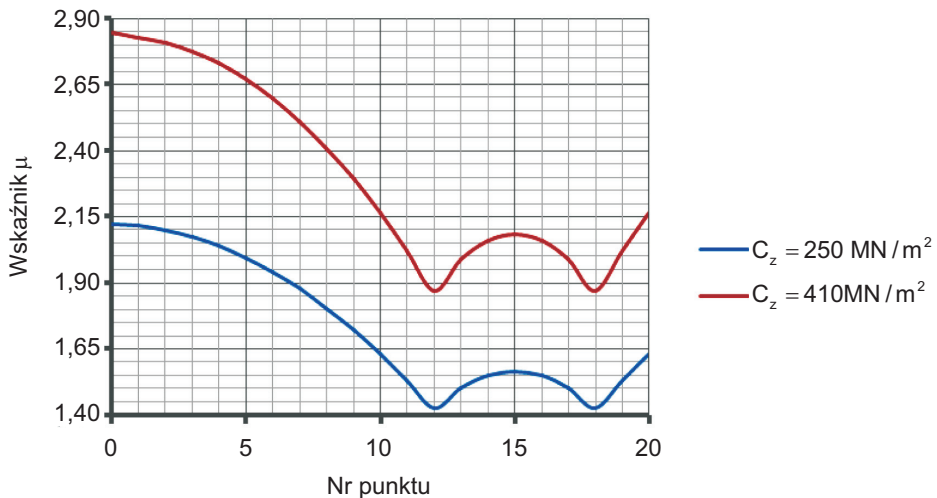
lub

$$I = I_n + (1 + \mu_n) I_b . \quad (18)$$

Wskaźnik sztywności przekroju podany w (3) po uwzględnieniu wzoru (18) jest więc liniowo zależny od  $\mu_b$ :

$$\kappa = \frac{I}{I_b} = 1 + \mu_b + \frac{I_n}{I_b} . \quad (19)$$

Na rysunku 10 przedstawiono wykresy  $\mu(x)$  utworzone przy przyjęciu danych z rys. 9 i wykorzystaniu wzoru (9) (oznaczenia punktów jak na rys. 8). W obliczeniach założono, że układ warstwowy składa się z dwóch jednakowych blach o profilu SC 380×140×7,1 połączonych tak, aby  $C_z$  było stałe na długości elementów zginanych. Przyjmując dwie, różne sztywności połączenia  $C_z = 250 \text{ MN/m}^2$  i w celu porównania  $C_z = 410 \text{ MN/m}^2$  uzyskano podobne wykresy  $a\bar{N}_b$  i  $M_b$  (rys. 9). Również wykresy  $\mu(x)$  w obu przypadkach są podobne.



Rys. 10. Funkcja  $\mu(x)$  w zginanym elemencie warstwowym jak na rys. 8  
Fig. 10. Function  $\mu(x)$  in bent layered element as in Fig. 8

W przypadku nakładki ciągłej, wykonanej z takiej samej blachy jak powłoka podstawowa, z uwagi na takie same charakterystyki geometryczne przekrojów elementów składowych występuje  $\mu_b = \mu_n$  z uwagi na to, że  $M_b = M_n$ . W przypadku nakładki odcińkowej, gdy  $EI_b = 2EI_n$  zachodzi zależność  $M_b = 2M_n$  wobec tego ze wzorów (9) i (10) wynika, że

$$\frac{\mu_n}{\mu_b} = \frac{M_b}{M_n} = 2 . \quad (20)$$

W rozpatrywanym wyżej przypadku z (17) otrzymuje się

$$I = I_b + (1 + 2\mu_b) \frac{1}{2} I_b = (1 + \mu_b) I_b + \frac{1}{2} I_b , \quad (21)$$

a więc wartość zgodną z obliczoną według (18). W związku z tym, w dalszych rozważaniach przyjmuje się, że

$$\mu = \mu_b , \quad (22)$$

natomiast

$$\mu_n = \mu \frac{I_b}{I_n} . \quad (23)$$

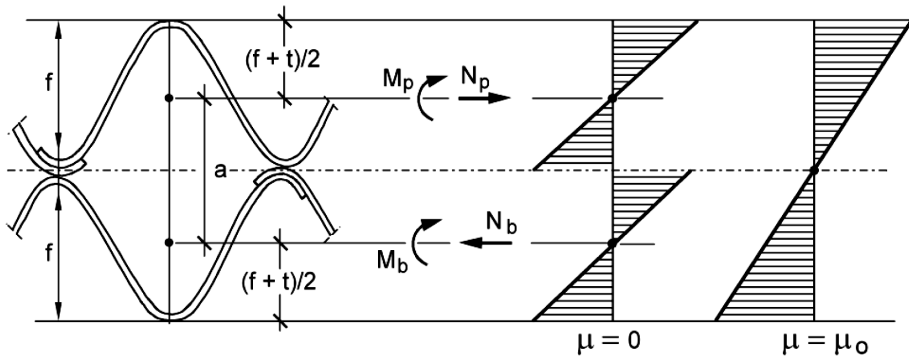
Wobec tego równanie (14), wprowadzając zależności (22) i (23)

$$M = M_b + \left( 1 + \mu_b \frac{I_b}{I_n} \right) M_n = M_b + M_n + \mu_b I_b \frac{M_b}{I_b} = (1 + \mu_b) M_b + M_n \quad (24)$$

można sprowadzić do postaci (15). W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że  $\mu = \mu_b$ .

Wskaźnik podatności połączenia przyjmuje dwie wartości graniczne (rys. 11). Gdy występuje brak zespolenia powłoki z nakładką wskaźnik  $\mu = 0$ . Wówczas, zgodnie ze wzorami (9) i (10) zanikają siły osiowe  $N_b$  i  $N_n$ , a całkowity moment bezwładności jest taki jak w belce złożonej

$$I = I_b + I_n . \quad (25)$$



Rys. 11. Skrajne rozkłady naprężeń na wysokości przekroju poprzecznego  
Fig. 11. Extreme stress distributions along the height of a cross-section

W przypadku połączenia idealnego (bez poślizgu) zachodzi zgodność odkształceń w styku (jak w połączeniu spawanym). Wówczas wskaźnik podatności  $\mu = \mu_0$ , a całkowity moment bezwładności może być obliczany ze wzoru Steinera

$$I_x = I_b + I_p + A_b a_d^2 + A_p a_g^2 , \quad (26)$$

gdzie położenie geometrycznego środka przekroju określa się ze wzorów

$$a_d = \frac{a A_n}{A_b + A_n} \quad (27)$$

oraz

$$a_g = a - a_d = \frac{a A_b}{A_b + A_n} . \quad (28)$$

Podstawiając (27) i (28) do (26) uzyskuje się wzór na moment bezwładności w połączeniu idealnym

$$I_x = I_b + I_p + \frac{A_b A_n}{A_b + A_n} a^2 . \quad (29)$$

Porównując wzór (26) z (29) otrzymuje się

$$\mu_o = \frac{a^2 A_b A_n}{(A_b + A_n) I_b} . \quad (30)$$

Gdy nakładka jest wykonana z takiej samej blachy jak powłoka podstawowa

$$\mu_o = \frac{a^2 A_b}{2I_b} . \quad (31)$$

Z porównania wzorów (26) i (18) widoczne jest, że gdy  $\mu = \mu_o$  wskaźnik podatności połączenia jest składnikiem wzoru Steinera, jak we wzorze:

$$\mu_o I_b = A_b a_d^2 + A_p a_g^2 . \quad (32)$$

Wskaźnik sztywności podany we wzorze (3) można również określić z użyciem  $\mu_o$  jako

$$\kappa_o = \frac{I_x}{I_b} = \frac{(1 + \mu_o) + I_n}{I_b} . \quad (33)$$

Na rysunku 12 podano zależność  $\mu(C_z)$  obliczoną dla przekroju środkowego belki (punkt 15, jak na rys. 8). Z uwagi na duży zakres wartości  $C_z$  (81÷4096) na osi rzędnych podano jako zmienną  $\sqrt[4]{C_z}$ . Gdy odległość pomiędzy geometrycznymi środkami blach falistych wynosi według (4)

$$a = 140 + \frac{3}{2} 7,1 = 150,65 \text{ mm} ,$$

wówczas wartość  $\mu_o$  obliczona według (29) jest równa

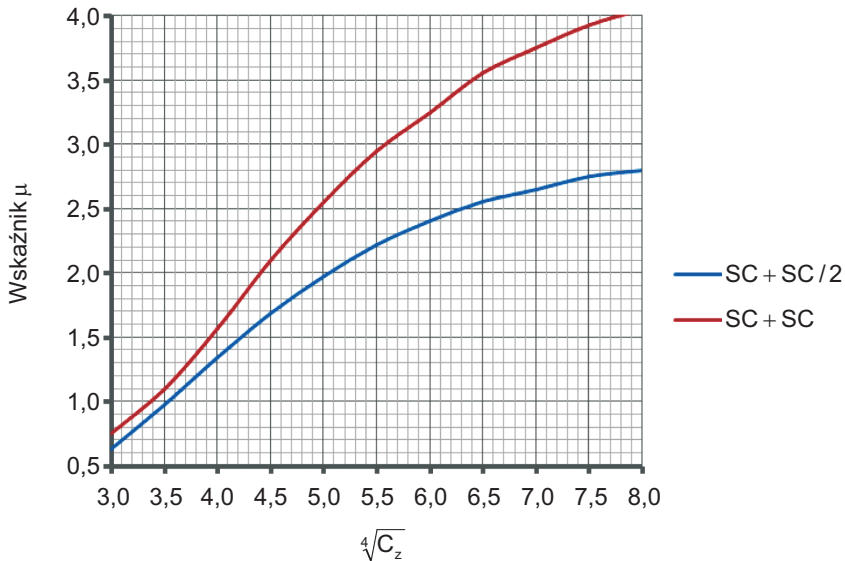
$$\mu_o = \frac{150,65^2 \cdot 9,81}{2 \cdot 24164} = 4,607 .$$

Na rysunku 12 porównano rezultaty uzyskane z analizy układu SC+SC, i przypadku z nakładką rozmieszczoną odcinkowo (przesuniętą o jeden takt, oznaczono to jako SC+SC/2). W takim przypadku  $2A_n = A_b$  oraz  $2I_n = I_b$ . Wówczas ze wzoru (30) otrzymuje się

$$\mu_o = \frac{a^2 A_b}{3I_b} , \quad (34)$$

a stąd

$$\mu_o = \frac{150,65^2 \cdot 9,81}{3 \cdot 24164} = 3,071 .$$



Rys. 12. Zależność pomiędzy  $\sqrt[4]{C_z}$  i  $\mu$  dla przekroju 15 analizowanego układu warstwowego  
 Fig. 12. Relationship between  $\sqrt[4]{C_z}$  and  $\mu$  for cross-section no. 15 of layered structure

Oczywiście gdy  $C_z \rightarrow 0$  również  $\mu \rightarrow 0$ , natomiast w przypadku  $C_z \rightarrow \infty$  otrzymuje się  $\mu = \mu_o$ . Zależność  $\mu(C_z)$  podaną na rys. 12 uzyskano przy założeniu  $C_z(x) = \text{const}$ . Określenie funkcji  $C_z(x)$  na podstawie  $\mu(x)$  wymaga bazy z wieloma punktami pomiarowymi rozłożonymi na długości belki (rys. 8).

Wykorzystując zaproponowane, bezwymiarowe charakterystyki geometryczne przekroju  $\mu_o$  z (30) oraz jego pochodną  $\kappa_o$  z (33) równanie konstytutywne elementów podatnie połączonych (7) można sprowadzić do prostej postaci

$$\frac{EI_b}{aC_z} (\kappa_o - \mu_o) \left( \frac{d^2 N_b}{dx^2} - \frac{1}{C_z} \frac{dN_b}{dx} \frac{dC_z}{dx} \right) - \frac{\kappa_o}{\mu_o} aN_b + M = 0. \quad (35)$$

W (35) uwzględniono zależności (30) i (32), jak w równaniu

$$\frac{I_x (A_b + A_n)}{aA_b A_n} = \frac{I_x a}{\mu_o I_b} = \frac{\kappa_o}{\mu_o} a \quad (36)$$

oraz wzór (19)

$$\kappa_o - \mu_o = 1 + \frac{I_n}{I_b} = \frac{I_b + I_n}{I_b}. \quad (37)$$

Na podstawie zależności momentów zginających (16) oraz momentu bezwładności przekroju (18) (gdy  $\mu = \mu_b$ ) otrzymuje się równanie:

$$M = \frac{\mu I_b + I_b + I_n}{I_b} M_b = \left( \mu + \frac{I_b + I_n}{I_b} \right) M_b. \quad (38)$$

Wykorzystując wzór (37) można zapisać bezpośrednie zależności sił wewnętrznych w powłoce podstawowej od globalnego momentu zginającego  $M$  jako

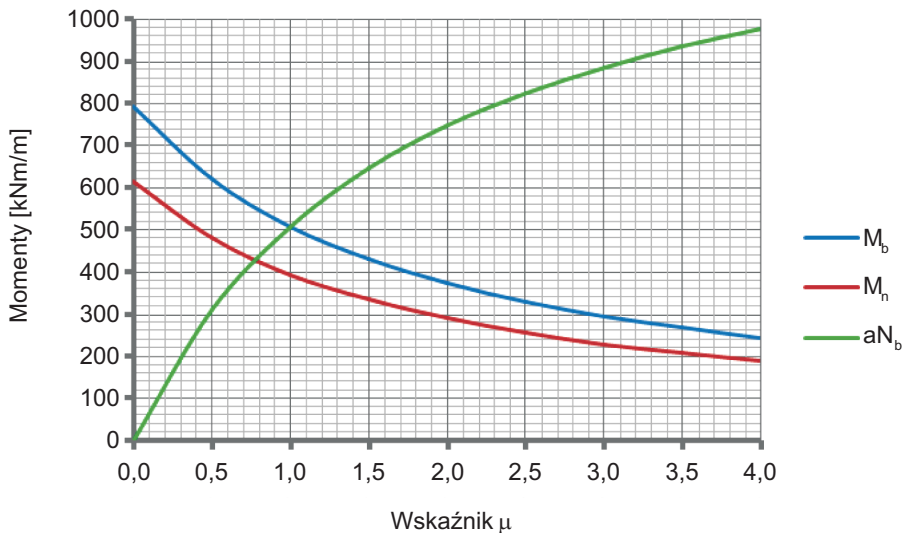
$$M_b = \frac{M}{\kappa_o - \mu_o + \mu}, \quad (39)$$

a korzystając z (9)

$$aN_b = \frac{\mu M}{\kappa_o - \mu_o + \mu}. \quad (40)$$

Wskaźnik podatności połączenia  $\mu$  pozwala zatem na bezpośrednie obliczenie sił wewnętrznych w elementach składowych przekroju.

Na rysunku 13 przedstawiono zmiany  $M_b$ ,  $M_n$ ,  $aN_b$  w środku rozpiętości belki, jak na rys. 8, w zależności od wskaźnika podatności połączenia  $\mu$ , gdy wartość momentu zginającego  $M = 1410$  kNm/m. W przykładzie przyjęto układ blach falistych utworzony z powłoki podstawowej SC 380×140×7,1 z nakładką SC 380×140×5,5. Z podanych wykresów wynika, że wraz z przyrostem  $\mu$  następuje spadek momentów  $M_b$  i  $M_n$  oraz wzrost wartości pary sił  $aN_b = aN_n$ , zgodnie z zależnością (13). W sytuacji skrajnej, gdy  $\mu = 0$  występuje zależność  $M = M_b + M_n$ . Natomiast zmiana sztywności układu jest funkcją liniową od  $\mu$ , jak we wzorze (18).



Rys. 13. Zmiany sił wewnętrznych w zależności od podatności połączenia  
Fig. 13. Changes of internal forces in dependence of connection compliance

#### 4. BADANIA PŁYT WARSTWOWYCH

Podłużne (obwodowe) łączenie powłoki podstawowej z nakładką w mostowych obiektach gruntowo-powłokowych realizuje się jak w przypadku typowych złączy arkuszy

blach falistych [2] a więc z użyciem śrub o standardowym rozstawie. Istotne jest zatem jaka jest skuteczność takiego połączenia w fazie budowy obiektu i użytkowania do obciążeń granicznych włącznie. Efekty zginania powłoki analizuje się na modelach płyt warstwowych poddanych zginaniu walcowemu (rys. 14), utworzonych z blach falistych o profilu SC 380×140×7,1. Schemat statyczny wycinka płyty przedstawiono na rys. 8. Celem badań przedstawionych w [5] była ocena skutków podatności takich połączeń.



Rys. 14. Widok stanowiska badanej płyty warstwowej [5]  
Fig. 14. A view of test stand for layered plates [5]

Układy blach w badanych modelach [5], oznaczonych jako P1 - P8, zestawiono w tablicy 1. Płytę podstawową w tych modelach utworzono z dwóch blach z jednym szwem podłużnym. Układ blach w nakładkach był zróżnicowany. Szerokość płyty podstawowej wynosiła  $b_b = 1624$  mm natomiast szerokości nakładek były zróżnicowane  $b_n = 1624$  mm lub  $b_n = 856$  mm. Wszystkie płyty wykonano ze stali oprócz modelu oznaczonego jako P4 (z aluminium). W płytach P3 i P8 przestrzeń pomiędzy elementem głównym i nakładką wypełniono betonem. W płytach P2, P3, P4, P7 stosowano po trzy śruby w każdej zakładce obwodowej. W płycie P6 nie wykonano takiego połączenia. W badaniach nakładka znajdowała się pod warstwą podstawową (tabl. 1), odwrotnie niż w konstrukcji powłoki (rys. 4). Wyniki pomiarów uzyskane w badaniach płyt P1 i P5 służyły do porównania rezultatów w pozostałych płytach.

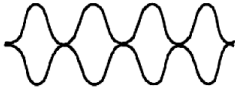
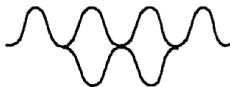


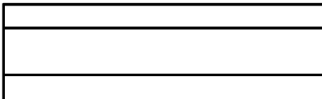
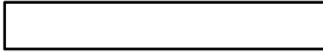
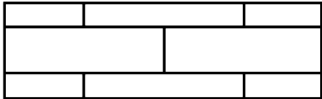
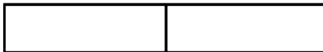
Pomiary tensometryczne realizowano w przekrojach pomiędzy siłami i rzędami poprzecznych śrub nakładki. Przekrój ten oznaczono na rys. 8 jako punkt 14. Położenia tensometrów w przekroju poprzecznym blach falistych podano na rys. 6 jako numery: 1, 2, 3, 4. Ugięcia mierzono w środku rozpiętości płyty w trzech punktach na jej szerokości w celu sprawdzenia założenia zginania walcowego. Badania realizowano z przyrostem obciążenia  $2P = 25$  kN. Wybrane wyniki badań [5] podane w tablicy 2

podzielono na dwie grupy. Pierwsza grupa dotyczy zakresu obciążeń spotykanych na obiektach gruntowo-powłokowych, spełniających warunek ugięcia  $w/L=0,5\%$ , odniesionego do rozpiętości  $L=4860$  mm, jak w (2). Druga grupa to przypadek nośności granicznej określonej przez maksymalne odkształcenia jednostkowe stali o wytrzymałości  $f_a = 324$  MPa

$$\varepsilon_{\max} = \frac{f_a}{E} = \frac{324}{205000} = 1580 \cdot 10^{-6} .$$

Tablica 1. Układy blach w badanych płytach [5]

Table 1. Cross-section of plates [5]

Schemat przekroju poprzecznego	Nakładka pełna	Nakładka odcinkowa
		
Układ blach powłoki podstawowej		
Układ blach nakładki	P1 	P5 
	P2, P3, P4 	P6, P7, P8 

Tablica 2. Wyniki pomiarów i obliczeń

Table 2. Results of measured and calculation

Zakres obciążeń modelu	Modele płyt	Nakładki pełne			Nakładki odcinkowe			
		P1	P2	P3	P5	P6	P7	P8
	$c$ [mm]	1925			1830			1925
Użytkowe $w/L=0,5\%$	$2P$ [kN]	194	184	366	118	92	122	114
	$\varepsilon \cdot 10^{-6}$	902	955	1076	809	707	738	813
	$M$ [kNm/m]	122,0	115,7	230,2	74,2	55,0	73,0	71,7
Graniczne	$2P_{\max}$ [kN]	597	568	861	419	295	400	293
	$M_{\max}$ [kNm/m]	369	352	542	261	176	239	184
	$w_{\max}/L$ [%]	5,1	3,9	5,1	5,0	6,4	5,5	6,5



Momenty zginające w przekroju środkowym można obliczyć na podstawie obciążenia  $2P$  z zależności

$$M = \frac{P \cdot c}{b_o} = \frac{P}{0,795} \quad [\text{kNm/m}]. \quad (41)$$

Wyniki badań podane w [5] posłużyły w niniejszej pracy do szacowania podatności połączenia podłużnego z zastosowaniem metodologii przedstawionej w [6, 9]. Udogodnieniem analizy w tym przypadku było niezmiennie położenie obciążenia i brak elementów niekonstrukcyjnych, które zaburzają wyniki badania obiektu mostowego [9].

## 5. IDENTYFIKACJA PODATNOŚCI POŁĄCZENIA

Naprężenia normalne obliczone na podstawie odkształceń jednostkowych z zależności

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (42)$$

z wykorzystaniem punktów pomiarowych na jednej fali blachy, pochodzące od sił wewnętrznych odniesionych do części składowych płyty (rys. 6), tworzą układ równań

$$\begin{aligned} E \cdot \varepsilon_1 &= \frac{N_b}{A_b} + \frac{M_b(f+t)}{2I_b}, \\ E \cdot \varepsilon_2 &= \frac{N_b}{A_b} - \frac{M_b(f-t)}{2I_b}. \end{aligned} \quad (43)$$

Bezpośrednio z (43) można obliczyć siły wewnętrzne w falistej blaszce powłoki podstawowej

$$M_b = \frac{EI_b}{f} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (44)$$

oraz

$$N_b = \frac{EA_b}{2f} [\varepsilon_1(f-t) + \varepsilon_2(f+t)]. \quad (45)$$

Po przekształceniach wzoru (45) uzyskuje się

$$N_b = \frac{EA_b}{2f} [f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - t(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)], \quad (46)$$

a podstawiając wartość  $M_b$  obliczoną w (44) otrzymuje się

$$N_b = \frac{A_b}{2} [E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \frac{tM_b}{I_b}]. \quad (47)$$

W nakładce siły te, obliczone analogicznie jak wyżej, wyrażone są we wzorach:

$$M_n = \frac{EI_n}{f} (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \quad (48)$$

oraz

$$N_n = \frac{A_n}{2} [E(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) - \frac{t M_n}{I_n}] . \quad (49)$$

Bezpośrednie wykorzystanie wzoru (9) do wyznaczania wskaźnika podatności połączenia podłużnego daje zależność

$$\mu_b = \frac{afA_b}{2I_b} \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \frac{t}{f} \right) . \quad (50)$$

Biorąc pod uwagę, że wartość  $t/f = 7,1/140 = 0,05$  dla blachy falistej SC 380 × 140 × 7,1 jest mała, można stosować wzór uproszczony

$$\mu_b = \frac{afA_b}{2I_b} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} . \quad (51)$$

W odniesieniu do nakładki wzór (51) przyjmuje analogiczną postać

$$\mu_n = \frac{afA_n}{2I_n} \frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_4}{\varepsilon_3 - \varepsilon_4} . \quad (52)$$

Wskaźnik podatności połączenia można również obliczyć korzystając wyłącznie z zależności momentów zginających (15) jak we wzorze

$$\mu = \frac{M - M_b - M_n}{M_b} = \frac{M - M_n}{M_b} - 1 . \quad (53)$$

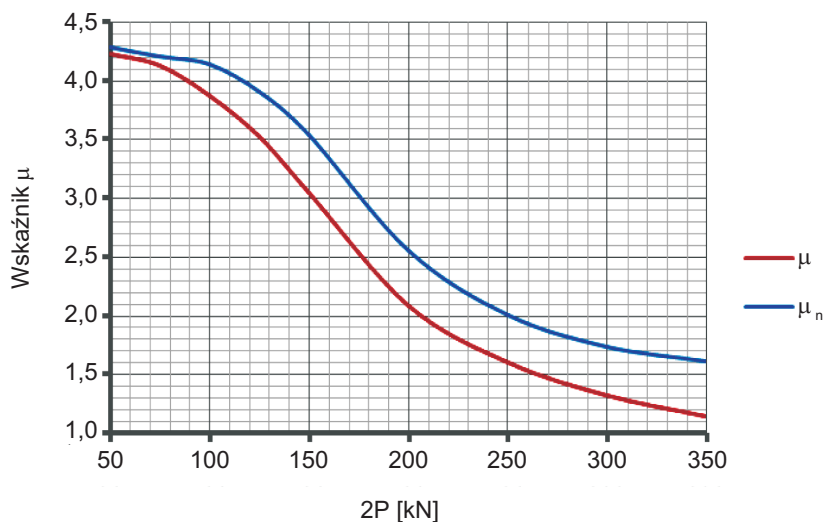
Podstawiając do (53) wyrażenia (44) i (48) otrzymuje się

$$\mu = \frac{Mf - EI_n(\varepsilon_4 - \varepsilon_3)}{EI_b(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} - 1 . \quad (54)$$

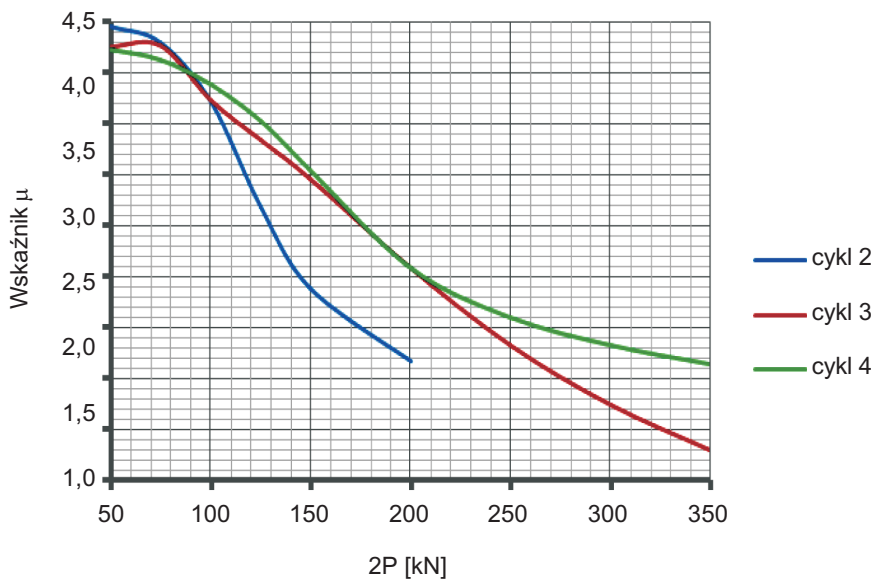
Wzór (54) jest dokładniejszy niż (51), ale jest użyteczny wyłącznie w badaniach laboratoryjnych, gdzie wykonuje się sprawdzenia założeń obliczanej wartości  $M$  (zginanie walcowe i spełnienie założeń schematu statycznego (rys. 8). W przypadku wzoru (51) siły wewnętrzne (44) - (47) oblicza się na podstawie warunku wytrzymałościowego – zasady płaskich przekrojów oraz wyników pomiarów odkształceń jednostkowych. W ogólności spełniają one tylko w przybliżeniu warunki równowagi statycznej (11) - (13). Momenty zginające obliczone ze wzorów (44) i (46) nie muszą spełniać warunku geometrycznego zgodności krzywizn (15). Zatem z obydwu wzorów (51) i (52) otrzymuje się inne wartości również gdy blachy płyty podstawowej i nakładki są jednakowe. Jednak wzory te są użyteczne w badaniach terenowych, gdzie nie są określone wartości  $M$  i schemat obciążenia [9].

Na rysunku 15 podano przykład rezultatów uzyskanych ze wzorów (52) i (54) i wyników badania płyty P1 z cyklu obciążenia nr 4 [5]. Z uwagi na ukształtowanie układu blach w tej płycie warstwowej (tabl. 1) wyniki uzyskane ze wzorów (51) i (52) oraz (54) powinny się pokrywać. Z porównania wykresów  $\mu_n$  i  $\mu$  przedstawionych na

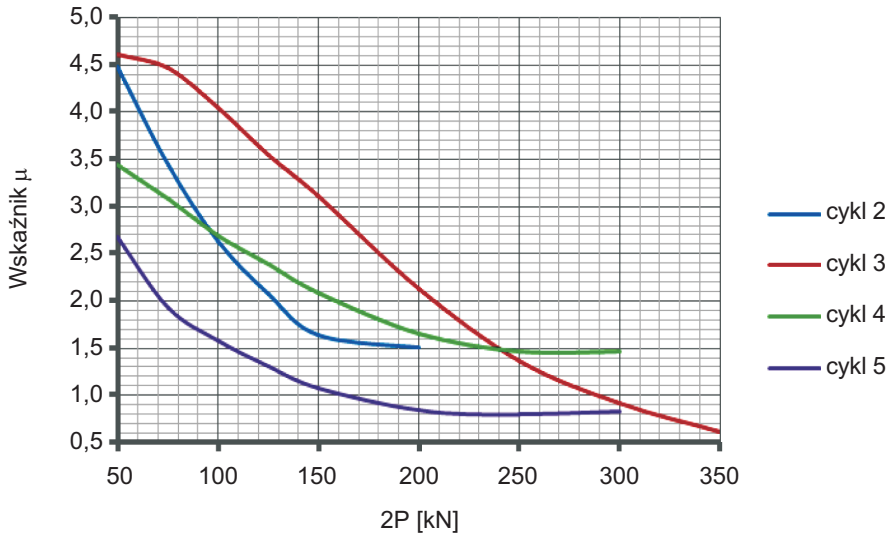
rysunku 15 widoczna jest niewielka rozbieżność wyników. Znacznie większe różnice uzyskano z analizy innych modeli płyt i cykli obciążeń.



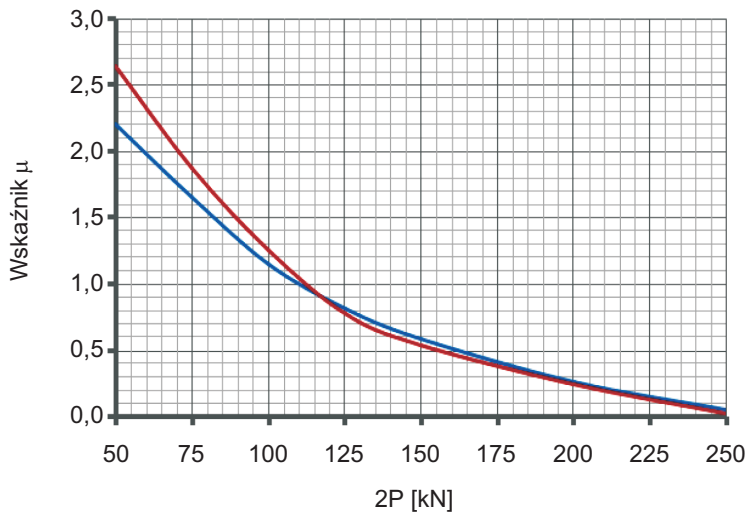
Rys. 15. Wyniki obliczeń wskaźnika podatności połączenia płyty P1  
Fig. 15. Calculated results of stiffness connection factor of plate P1



Rys. 16. Wykresy wskaźnika podatności połączenia w modelu P1  
Fig. 16. Diagram of stiffness connection factor in model plate P1



Rys. 17. Wykresy wskaźnika podatności połączenia w modelu P2  
 Fig. 17. Diagram of stiffness connection factor in model plate P2



Rys. 18. Wykresy wskaźnika podatności połączenia w modelach P5 i P7  
 Fig. 18. Diagram of stiffness connection factor in model plates P5 and P7

Wzór (54) wykorzystano do sporządzenia wykresów podanych na rysunkach 16 i 17. Analizowano zmiany wskaźnika podatności połączenia w zależności od intensywności obciążenia w płytach z pełną nakładką, z tej samej blachy. W przypadku idealnego połączenia blach falistych uzyskuje się wskaźnik  $\mu_o = 4,607$ . Badania realizowano

w wielu cyklach obciążeń tych samych płyt, w różnych zakresach obciążeń  $2P$ . W celu porównania podano wyniki z badania płyty P1 (rys. 16) i P2 (rys. 17). Z kształtu wykresów widoczny jest wpływ wartości obciążenia i kolejności cyklu. Wyniki uzyskane z badań obydwu płyt są zróżnicowane a różnice w konstrukcji płyt P1 i P2 dotyczą liczby śrub blach łączonych na zakładkę. Na rysunku 18 podano analogiczne wykresy w przypadku płyt z odcinkową nakładką z tej samej blachy. Wykresy te również wskazują na duży spadek sztywności połączenia w funkcji intensywności obciążenia. W przypadku idealnego połączenia blach falistych w nakładce odcinkowej (SC+SC/2) wskaźnik  $\mu_o = 3,071$ .

## 6. UGIĘCIA

Najczęściej wykonywanym sprawdzianem podatności połączenia w mostach zespolonych [9] jest pomiar ugięcia dokonywany przy użyciu obciążeń samochodowych. Z uwagi na bazę pomiarową realizuje się to w wybranych punktach dźwigarów głównych uzyskując w ten sposób aproksymację linii ugięcia przęsła mostu. Na podstawie porównania zmierzonych ugięć w analizowanych punktach i wyników obliczeń, przy przyjęciu pełnego zespolenia ocenia się podatność zespolenia betonowej płyty pomostowej z blachownicą stalową.

W obliczeniach wartości ugięć używa się ogólnego wzoru

$$w_i = \int \frac{M_i M}{EI} dx \quad , \quad (55)$$

gdzie  $M_i(x)$  oznacza funkcję momentów od obciążenia jednostkowego w miejscu wyznaczania przemieszczenia oraz  $M(x)$  wynik analizowanego obciążenia. Z uwagi na występowanie podatności zespolenia sztywność dźwigara  $EI(x)$  jest zmienna na długości, również gdy obydwie połączone elementy są przyzmatyczne (o stałych wymiarach na długości). We wzorze (55) wszystkie składniki są więc funkcjami. Sztywność belki (zmienną na długości)  $EI(x)$  można zamienić na stałą  $EI_b$ , odniesioną do elementu podstawowego  $b$ , korzystając z zależności (16) jak we wzorze:

$$\frac{M(x)}{EI(x)} = \frac{M_b(x)}{EI_b} \quad . \quad (56)$$

Wobec tego w przypadku belki przyzmatycznej uzyskuje się uproszczenie wzoru (55)

$$w_i = \frac{1}{EI_b} \int M_i M_b dx \quad . \quad (57)$$

W rozpatrywanym schemacie belki (rys. 8) przykład funkcji  $M_b(x)$  podano na rys. 9.

Równoważny wynik uzyska się wykorzystując zależność (19) we wzorze (57):

$$w_i = \frac{1}{EI_b} \int \frac{M_i M}{\kappa} dx \quad , \quad (58)$$

ale wówczas  $\kappa(x)$  jest również funkcją zmienną na długości przęsła. W przypadku

dźwigara złożonego z dwóch jednakowych elementów, wzór (58) można zapisać także w postaci

$$w_i = \frac{1}{EI_b} \int \frac{M_i M}{2 + \mu} dx . \quad (59)$$

Gdy belka obciążona jest siłami skupionymi  $P$  według rysunku 8, a ugięcie mierzone jest w środku rozpiętości, jak w badaniach przedstawionych w p. 5 obliczenie przemieszczenia odbywa się ze wzoru:

$$w_i = \frac{2}{EI_b} \left( \int_0^c \frac{x}{2} \frac{Px}{2 + \mu} dx + \int_0^{L/2} \frac{x}{2} \frac{Pc}{2 + \mu} dx \right) = \frac{P}{EI_b} \left( \int_0^c \frac{x^2}{2 + \mu} dx + c \int_0^{L/2} \frac{x}{2 + \mu} dx \right) . \quad (60)$$

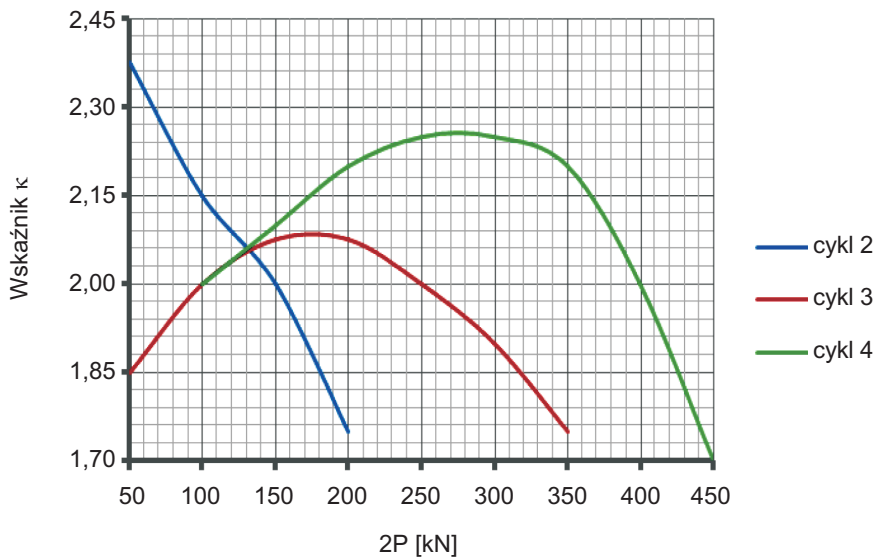
W rozpatrywanym schemacie belki (rys. 8) przykład funkcji  $\mu$  podano na rysunku 10.

Gdyby przyjąć stałą wartość  $\mu$  na długości belki wzór (60) będzie miał postać:

$$w_i = \frac{Pc}{24EI_b} \frac{3L^2 - 4c^2}{2 + \mu} = \frac{Pc}{24EI_b} \frac{3L^2 - 4c^2}{\kappa} . \quad (61)$$

Korzystając ze wzoru (61) można obliczyć wartości uśrednionego wskaźnika sztywności (stałego na długości belki) na podstawie zmierzonych ugięć  $w_i$

$$\kappa = \frac{Pc}{24EI_b} \frac{3L^2 - 4c^2}{w_i} . \quad (62)$$



Rys. 19. Funkcje uśrednionego wskaźnika sztywności  $\kappa(2P)$

Fig. 19. Function of stiffness factor  $\kappa(2P)$

Na rysunku 19 podano wykresy  $\kappa$  jako zależność od intensywności obciążenia  $2P$ , obliczone z (62) na podstawie zmierzonych ugięć w badaniach modelu płyty P1, jak na rys. 14 [5]. Ugięcia  $w_i$  dotyczyły punktu 15 według rys. 8. Z wykresów tych wynika niewielka zmienność wskaźnika  $\kappa$  w całym przedziale obciążenia, od wartości początkowych do wartości granicznych dla tej płyty  $2P_{\max} = 597$  kN i we wszystkich cyklach badania. Maksymalne odchylenia od  $\kappa = 2$  wynoszą około  $\pm 16\%$ .

Funkcje podane na rys. 19 nie są zgodne z wykresami przedstawionymi na rysunkach 15 - 18. Istotną różnicą jest to, że wskaźnik  $\mu$  obliczano dla jednego przekroju belki na dodatek usytuowanego pomiędzy siłami  $P$ , natomiast średnia wartość wskaźnika  $\kappa$ , jak w (62) obliczana jest z (60), a więc z uwzględnieniem  $\mu$  na całej długości belki. Rozbieżność wykresów wskazuje na to, że kształt funkcji  $\mu(x)$  w tym układzie jest bardziej zróżnicowany niż podano na rys. 10, gdzie przyjęto  $C_z = \text{const}$ . W celu uzyskania pełnej zgodności wyników niezbędne jest utworzenie funkcji  $\mu(x)$ , a więc zaprojektowanie odpowiedniej bazy pomiarowej.

## 7. PODSUMOWANIE

W celu zachowania projektowej geometrii obiektu gruntowo-powłokowego podczas jego budowy niezbędna jest odpowiednia sztywność powłoki [3, 4]. Z tego powodu w obiektach średniej i dużej rozpiętości stosuje się nakładki na podstawowy płaszcz powłoki. W przypadku budowy obiektu o maksymalnej rozpiętości przestrzeń pomiędzy blachami dodatkowo wypełnia się betonem.

Na podstawie wyników badań zginanych elementów [5] wykazano, że połączenie powłoki z nakładką jest podatne. Podatność ta zależy od intensywności obciążeń występujących w fazie budowy i eksploatacji obiektu. W pracy podano sposób szacowania tej podatności w wartości wskaźnika  $\mu$ . Na jego podstawie można określić sztywność połączenia  $C_z$ , stosowaną powszechnie w obliczeniach. Wykazano bezpośrednią zależność sił wewnętrznych od funkcji momentu zginającego  $M(x)$  z użyciem  $\mu(x)$ . Podane w pracy wyniki analiz mogą służyć do prognozowania przemieszczeń powłoki obiektu gruntowo-powłokowego podczas zasyпки oraz obliczeń rozkładu sił wewnętrznych pod obciążeniami użytkowymi.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] *Bakht B.*: Evolution of the design methods for soil-metal structures in Canada. Conf. Buried flexible steel structures, Archives of Institute of Civil Engineering, 1/2007, Poznań, 7 - 22
- [2] *Janusz L., Madaj A.*: Obiekty inżynierskie z blachy falistej. WKiŁ, Warszawa 2007
- [3] *Machelski C.*: Modelowanie obiektów mostowych gruntowo-powłokowych. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2008
- [4] *Machelski C.*: Deformacja stalowych powłok mostowych obiektów gruntowo-powłokowych podczas zasyпки. Geoinżynieria: drogi tunele i mosty nr 6/2010, 29, 24 - 30

- 
- [5] *Bakht B., Newhook J.P.*: Tests on Super-Cor plates with different patterns of rib stiffening. Final Report Atlantic Industries Limited, Canada, November 2004
- [6] *Machelski C., Toczkiwicz R.*: Podatność zespolenia mostów stalowych z betonową płytą pomostową. *Drogi i Mosty* nr 3/2005, 37 - 76
- [7] *Furtak K.*: Mosty zespolone. PWN, Warszawa-Kraków, 1999
- [8] *Jeun S., Rhee J.*: An experimental verification of the improved bolting arrangement. Conf. Buried flexible steel structures, Archives of Institute of Civil Engineering, 1/2007, Poznań, 109 - 119
- [9] *Machelski C., Toczkiwicz R.*: Ocena podatności zespolenia na podstawie wyników badania mostu pod obciążeniem samochodami. *Drogi i Mosty* nr 4/2006, 5 - 33

## STIFFNESS OF LAYERED SHELLS IN SOIL-STEEL BRIDGE STRUCTURES

### Abstract

In the case of construction of a maximum span soil-steel bridge structure, the cover plate, in the form of a circumferential shell, mounted on the base shell, is used. The bolted connection of the cover plate is flexible. The analysis of connection flexibility, supported by the test results of layered panels, made of corrugated Super Cor shells, is presented in the paper. The connection stiffness under the loads, occurring during construction and exploitation stages, is analyzed. The results can be used to estimate the displacements of the shell during backfilling and for calculation of internal forces under live loads. It has been shown that the connection stiffness depends on the load intensity.

### Keywords

Shell deformation, soil-steel bridge, stiffness of layered shells